■ SEKUNDARSTUFE I
5.–7. Schuljahr

Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe?

Anhand von Beispielen wird deutlich, wie die Schwierigkeit einer Aufgabe auch von Art, Anzahl und Komplexität der Grundvorstellungen abhängt, die zum Lösen erforderlich sind. Es werden Vorschläge für die Entwicklung von Aufgaben und Übungen gemacht, die in besonderer Weise für das Ausbilden von Vorstellungen geeignet sind.

Werner Blum

Professor für Mathematik-Didaktik an der Universität Kassel

Rudolf vom Hofe

Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität Regensburg

Aufgaben stellen nach wie vor die Grundlage für mathematisches Lernen dar. Dementsprechend wird eine Verbesserung des Mathematikunterrichts häufig durch eine *neue Aufgabenkultur* angestrebt (vgl. Biermann/Wiegand/Blum 2003). Neben vielen anderen Anforderungen wie Vernetzung, Anwendungsorientierung oder Förderung von Eigentätigkeit sollen Aufgaben und Übungsserien auch dazu geeignet sein, die Ausbildung von Grundvorstellungen zu fördern. Diese Forderung wird unter anderem durch Detailanalysen von TIMSS und PISA bestärkt, bei denen zahlreiche Fehler auch als Defizite im Bereich der Grundvorstellungen interpretiert werden können (vgl. Blum/Wiegand 2000).

Gesucht sind somit Frage- und Problemstellungen, die dazu geeignet sind, nicht nur Fertigkeiten zu trainieren, sondern Fähigkeiten zu entwickeln und die dafür erforderlichen Vorstellungen auszubilden.

Wie sollten solche Aufgaben aussehen? Gibt es Aufgabentypen, die sich hierzu besonders eignen? Wie kann man erkennen, welche Grundvorstellungen zum Lösen einer Aufgabe erforderlich sind? Und wie kann man durch Aufgaben oder Aufgabenserien die Ausbildung von Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern gezielt fördern und gegebenenfalls überprüfen?

Man kann Grundvorstellungen aus *normativer* oder aus *deskriptiver* Sicht betrachten. Für den Umgang mit Aufgaben bedeutet dies, dass es verschiedene Wege der Analyse gibt: Man kann

- innerhalb einer Sachanalyse untersuchen, welche Grundvorstellungen von der stofflichen Struktur her für den Lösungsprozess der Aufgabe erforderlich sind (normative Analyse);
- anhand von authentischen Schülerlösungen untersuchen, welche Grund- bzw. Fehlvorstellungen tatsächlich im Lösungsweg des Schülers nachweisbar sind (deskriptive Analyse).

Im ersten Falle befasst man sich dabei mit den Grundvorstellungen, die Lernende im Sinne einer idealen Lernentwicklung ausbilden *sollen*, im zweiten Falle mit den Vorstellungen, welche die Lernenden tatsächlich ausgebildet *haben*. Aus einem Gegenüberstellen von normativer und deskriptiver Analyse bzw. dem Vergleich des erwarteten mit dem tatsächlichen Lösungsweg lassen sich dann häufig Erklärungen für die eingeschlagenen Lösungsstrategien gewinnen und damit auch Ansatzpunkte für die *konstruktive* Behebung möglicher Fehler. Mit beiden Arten der Analyse werden wir uns im folgenden Teil beschäftigen.

Aufgaben analysieren

Sowohl in der Stoffauswahl als auch in der Auswahl bestimmter Aufgaben oder Übungsformen stehen Lehrende ständig vor Entscheidungen. Ein wesentliches Kriterium hierbei ist die Frage, inwieweit vorliegende Aufgaben zum unverzichtbaren Kern mathematischer Grundbildung gehören. Hier kann es helfen, die Aufgaben im Hinblick auf die in ihnen enthaltenen Grundvorstellungen zu analysieren. Im Folgenden betrachten wir einige Aufgaben und Schülerlösungen durch die „Grundvorstellungsbrille".

Beginnen wir mit einigen einfachen strukturgleichen Aufgaben zur Subtraktion:

1 *Tim hat auf einen Klassenausflug 12,50 € mitgenommen. 7,30 € hat er am ersten Tag ausgegeben. Wie viel € hat er für den zweiten Tag noch übrig?*

2 *Maria braucht für einen Klassenausflug 12,50 €. Bisher hat sie 7,30 € gespart. Wie viel € muss sie noch sparen?*

3a *Zoran hat auf einen Klassenausflug 12,50 € mitgenommen, Stephan 7,30 €. Wie viel € hat Zoran mehr zur Verfügung?*

3b *Maria hat auf der Klassenfahrt 12,50 € ausgegeben, Sarah 7,30 €. Wie viel € hat Maria mehr ausgegeben als Sarah?*

In allen Fällen handelt es sich um den Umgang mit Größen in einer Situation mit subtraktiver Grundstruktur. Die Maßzahlen sind jeweils rationale Zahlen, hier aus dem sehr vertrauten Bereich der Geldwerte, mit dem die Schülerinnen und Schüler bereits seit dem ersten Grundschuljahr „quasikardinales" Rechnen gewöhnt sind. Verschieden sind jedoch die Sachverhalte und die (z.T. vorgestellten) Handlungen, die darin zum Ausdruck kommen; sie lassen sich charakteristischen Grundvorstellungen zuordnen:

In **1** finden wir die wohl typischste Vorstellung der Subtraktion, nämlich das *Wegnehmen* (Wn) – von einer vorhandenen Größe wird ein Teil weggenommen, wie viel bleibt übrig?

In **2** ist die zugrunde liegende Handlungsvorstellung das *Ergänzen* (Eg) – wie viel muss zu einer gegebenen Größe hinzugefügt werden, damit eine andere Größe erreicht wird?

In **3a** werden zwei Zustände verglichen, in **3b** zwei Operationen; insgesamt geht es also um das *Vergleichen* (Vg) – welches ist der Unterschied zweier gegebener Größen?

Diese Vorstellungen sind eng verwandt, und das didaktische Ziel besteht natürlich nicht in einem isolierten Lernen, sondern vielmehr in der Vernetzung dieser Vorstellungen miteinander und mit den entsprechenden Vorstellungen der Addition. Die auf diese Weise beschriebene Fähigkeit, die auf der Ausprägung von Grundvorstellungen und ihrer Vernetzung beruht, wird häufig als *Grundverständnis* eines mathematischen Inhalts bezeichnet (vgl. Oehl 1970; vom Hofe 1995) . Diese Fähigkeit entwickelt sich jedoch – selbst bei elementaren Operationen wie Addition und Subtraktion – im Allgemeinen nicht von allein. Daher ist es zum Beispiel wichtig, dass bei Sach- und Anwendungsaufgaben zur Subtraktion nicht nur Situationen des „Wegnehmens", sondern auch des „Ergänzens" und des „Vergleichens" sowie über Umkehraufgaben die Verbindungen zur Addition thematisiert werden.

Mit einem wachsenden Verständnis der ganzen bzw. rationalen Zahlen im Laufe der Sekundarstufe I erweitert sich dann (im günstigen Falle) auch das Verständnis der Subtraktion einer Zahl: Innerhalb struktureller Betrachtungen stellt dies keine eigenständige Operation dar, sondern wird üblicherweise als Addition der Gegenzahl aufgefasst; viele inner- und außer-mathematische Sachsituationen lassen sich dann auch über die Vorstellung der Umkehroperation erfassen. Wie wir jedoch aus deskriptiven Studien wissen, leben auch dann noch die frühen, auf typischen Handlungsmustern beruhenden Vorstellungen weiter, so dass entsprechende in der Grundschulzeit erworbene Fehlvorstellungen weiterhin wirksam sind (vgl. Fischbein 1989).

Bei den folgenden Beispielen sollen nun Grundvorstellungen nicht nur aus normativer, sondern auch aus deskriptiver Sicht anhand von authentischen Schülerlösungen betrachtet werden. Dazu eine nächste Aufgabe, die ebenfalls nur Basisanforderungen stellt.

Zinsen

Jan hat 200 DM für ein Jahr zu einem Zinssatz von 7% angelegt. Wie viel Zinsen erhält er?

Neben der Fähigkeit, den Text sinnentnehmend zu lesen (das ist bei Textaufgaben immer nötig), und elementarem Kontextwissen über Zinsen erfordert diese Aufgabe nur eine Vorstellung davon, was „7%" bzw. „7% von" bedeutet, das heißt eine Vorstellung vom Prozentbegriff. Wir unterscheiden hier aus normativer Sicht folgende Grundvorstellungen:

- *von Hundert-Vorstellung* (vH)
„p% von G" bedeutet „p von je 100 Einheiten" oder „Hätten wir 100 Einheiten, so wären es p davon".
- *Hundertstel-Vorstellung* (Op) (oder *Prozentoperator-Vorstellung*)
„p% von G" bedeutet „$\frac{p}{100}$ von G" oder „$\frac{p}{100} \cdot G$".
- *Bedarfseinheiten-Vorstellung* (Be) (oder *quasikardinale Vorstellung*)
„p% von G" bedeutet: „G, das Ganze, entspricht 100%, 1% entspricht dem hundertsten Teil von G, und p% ist p mal so viel."

Bei (vH) stellt man sich demnach vor, dass G aus lauter Teilen zu je 100 Einheiten besteht (was nicht immer glatt geht), während man bei (Op) und (Be) sich G in 100 gleich große Teile zerlegt denkt (was immer geht). Dies macht verständlich, dass (vH) kognitiv anspruchsvoller ist und sowohl im Unterricht als auch im Alltagsdenken eher selten auftritt.

Wie wir in umfangreichen Analysen von Schülerarbeiten feststellen konnten, sind diese Grundvorstellungen nicht nur normativer Art, sie lassen sich auch in Schülerlösungen nachweisen. Beispiele dazu zeigt die **Abbildung 1** (wobei das zweite eine verbreitete Ungenauigkeit enthält).

Die Analysen zeigen auch, dass es für die unterschiedlichen Prozentvorstellungen jeweils naheliegende Verfahren gibt: Bei (Op) die entsprechende Operator-Schreibweise, bei (vH) und (Be) der übliche Dreisatz, mitunter aber auch Verhältnisgleichungen.

Aus *aufgabenanalytischer* Sicht erfordert die Aufgabe „Zinsen" also eine einzige elementare Vorstellung, und Schülerlösungen dazu gestatten aus deskripter Sicht Rückschlüsse auf hierbei aktivierte Schülervorstellung.

Die folgende Aufgabe ist schon etwas komplexer:

Schlussverkauf

Der Preis eines Kassettenrecorders beträgt im Schlussverkauf nach einer 20%igen Ermäßigung 120 DM. Berechne den Preis vor der Ermäßigung.

Neben sinnentnehmendem Lesen braucht man hier die Fähigkeit, einen mathematischen Ansatz zu finden, das heißt ein passendes (hier noch vergleichsweise einfaches) mathematisches Modell aufzustellen. Dazu sind Vorstellungen vom Prozentbegriff notwendig (was bedeutet 20 %) und vom Subtrahieren (was bedeutet Ermäßigung). Insofern müssen bei dieser Aufgabe die vorhin beschriebenen Grundvorstellungen in geeigneter Weise zusammengebracht werden. Dies ist auf ganz unterschiedliche Arten möglich, je nach gewählter Vorstellung (vH)/(Op)/(Be) bzw. (Wn)/(Eg)/(Vg) und nach Reihenfolge ihrer Verwendung.

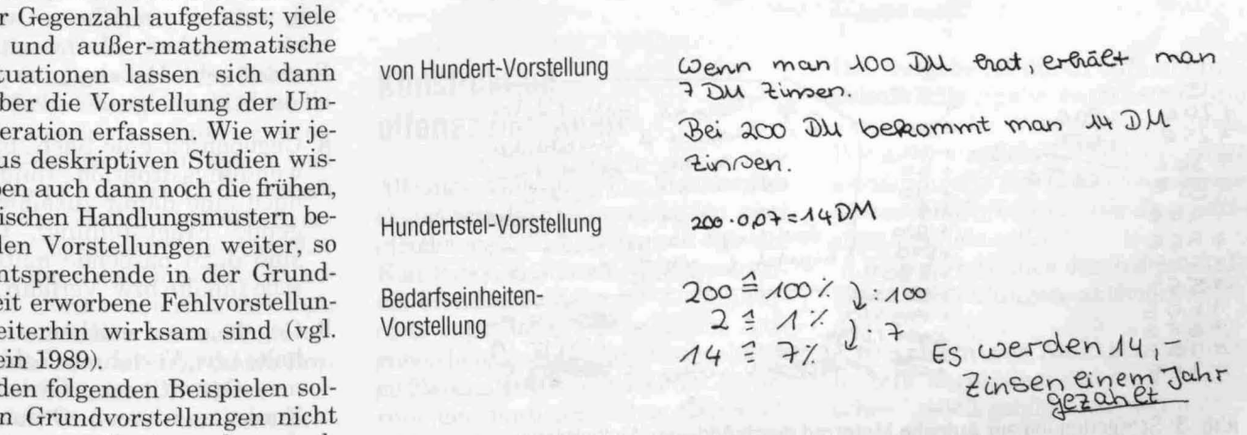


Abb. 1: Schülerlösungen zur Aufgabe Zinsen

Die **Abbildung 2** zeigt drei Schülerlösungen, die unterschiedliche Wege aufzeigen.

Der erste Schüler hat offenbar zunächst im Bereich der Prozentsätze subtrahiert (vermutlich mittels Wegnehmen, aber das ist nicht erkennbar). Das dann angewandte Dreisatzverfahren ist ein starker Hinweis auf die Bedarfseinheiten-Vorstellung: Der gegebene Betrag wird 80 % zugeordnet, was mithilfe des üblichen Dreisatzes zum Geldbetrag führt, der 100 % entspricht.

Auch der zweite Schüler hat offenbar zunächst subtrahiert; sein weiterer Rechenweg ist typisch für die Hundertstel- bzw. Prozentoperator-Vorstellung.

Der dritte Schüler beginnt mit einem Dreisatzverfahren. Hierbei aktiviert er offenbar ebenfalls die Bedarfseinheiten-Vorstellung, wendet sie jedoch in falscher Weise an: Nicht der gesuchte Grundwert, sondern der verminderte Grundwert wird 100 % zugeordnet; von diesem Wert werden dann, rechnerisch korrekt, 20 % berechnet, der entsprechende Prozentwert wird dem verminderten Grundwert zugeschlagen. Hier ist eine adäquate Umsetzung der im Text gegebenen Ermäßigung nicht gelungen.

Hier noch eine komplexere Aufgabe, ebenfalls zusammen mit einem typischen Schülerdokument:

Motorrad

Der Vater will seinem Sohn Thomas einen Zuschuss für ein Motorrad geben.
Er macht zwei Angebote:

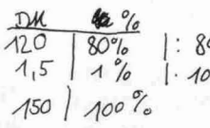
1. *15 € sofort, am folgenden Tag 20 € dazu, am nächsten Tag 25 € dazu usw., und so zwei Wochen lang (der dazukommende Betrag wird täglich um 5 € erhöht).*
2. *5 Cent sofort, am folgenden Tag 10 Cent dazu, am nächsten Tag 20 Cent dazu, usw. (der dazukommende Betrag wird täglich verdoppelt), ebenfalls 14 Tage lang.*

Für welches Angebot soll sich Thomas entscheiden? Begründe deine Antwort.

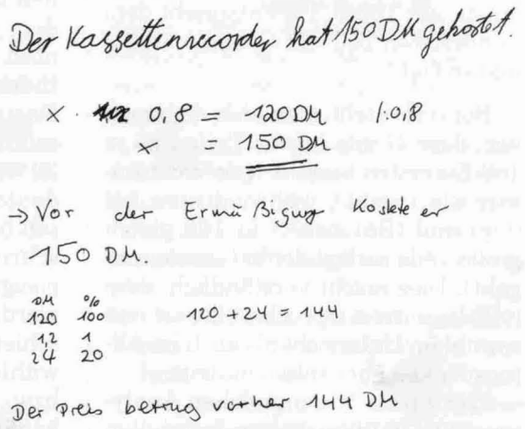
Hier gibt es sehr viele unterschiedliche Lösungswege und dementsprechend unterschiedliche Möglichkeiten, geeignete Grundvorstellungen zu aktivieren. Die einfachste Variante besteht darin, durch fortgesetzte Addition (Angebot 1) und fortgesetztes Vervielfachen (Angebot 2) die beiden Ergebnisse am 14. Tag zu ermitteln und direkt zu vergleichen. Hierbei reicht es, geeignete Vorstellungen der Grundrechenarten repetitiv auszuführen (*Hinzufügen, Verdoppeln*) und geeignet zu verknüpfen (*Aufsummieren, Vergleichen*) (s. **Abb. 3**)

Ein solcher Lösungsweg ist allerdings mühsam, rechnerisch aufwändig und in hohem Maße fehleranfällig. Falls gefestigte funktionale Vorstellungen vorhanden sind, ebenso wie entsprechendes Grundwissen über lineare und exponentielle Funktionen sowie über ihre Wachstumscharakteristik, so kann eine Lösung natürlich wesentlich eleganter gefunden werden. Insbesondere kann bei einer inhaltlichen Deutung des Funktionsterms für exponentielles Wachstum auch auf eine entsprechende Aufsummierung verzichtet werden, da das Ergebnis auch über gezielte Schätzung in naheliegender Weise gewonnen werden kann.

Subtraktion, dann Bedarfseinheiten-Vorstellung



Subtraktion, dann Hundertstel-Vorstellung



Bedarfseinheiten-Vorstellung – nicht korrekt angewendet

Abb. 2: Schülerlösungen zur Aufgabe Schlussverkauf

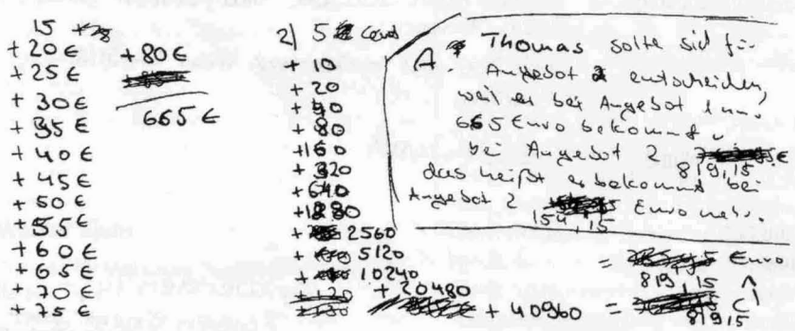


Abb. 3: Schülerlösung zur Aufgabe Motorrad durch Addieren, Multiplizieren, Aufsummieren und Vergleichen

Aufgaben zur Förderung von Vorstellungen konstruieren

Wie kann man nun Aufgaben konstruieren, die dazu geeignet sind, die Ausbildung von Grundvorstellungen zu fördern?

Wie bereits im Basisartikel erläutert wurde, muss man insbesondere dann Grundvorstellungen aktivieren, wenn es um Übersetzungsprozesse zwischen Mathematik und Realität geht. Dabei gibt es prinzipiell die beiden folgenden Richtungen:

A Gegeben ist eine Sach- bzw. Anwendungssituation (und meist auch eine damit zusammenhängende Fragestellung). Gesucht sind dazu passende mathematische Inhalte bzw. Verfahren.

B Gegeben sind mathematische Inhalte bzw. Verfahren (Zahlen, Terme, Operationen, Gleichungen, Funktionen usw.). Gesucht sind dazu passende Sach- bzw. Anwendungssituationen.

Zur ersten Richtung (**A**) gehören die üblichen Textaufgaben, aber auch Problemsituationen, die sich etwa aus naturwissenschaftlichen Versuchen, Erkundungen oder Projekten ergeben. Je gleichförmiger die Aufgaben bzw. Aufgabenklassen sind, um so größer ist dabei die Gefahr, dass sich das Üben auf das Erlernen von Schematismen reduziert. Je abwechslungsreicher hingegen die Aufgaben sind, um so mehr wird die Aktivierung von Grundvorstellungen und damit auch ihre Ausbildung und Vernetzung gefördert. Hierbei spielt es insbesondere auch eine produktive Rolle, dass die Schülerinnen und Schüler eigenständig und von der Sache her motivierte Fragen stellen – gegenüber den häufig verwendeten vorgefertigten Standardformulierungen bzw. den so genannten Einkleidungen. Dies ist eine Erkenntnis, die bereits in der Reformpädagogik ausgeprägt war und die heute in zahlreichen problem- und anwendungsorientierten Unterrichtsvorschlägen und insbesondere in offenen Aufgabenstellungen umgesetzt ist. Wir greifen diese Art der Aufgabenstellung am Schluss dieses Artikels auf und wenden uns zunächst der anderen Richtung zu.

Die zweite Richtung (**B**) ist im üblichen Unterricht weit weniger vertreten, wenngleich es dazu auch seit langem Beispiele gibt. Hierzu gehören die aus der Grundschule bekannten „Rechengeschichten", bei denen passende Sachsituationen zu einfachen Zahlengleichungen erfunden werden sollen (z. B.: Erfinde eine Geschichte zu „$10 - 4 = 6$"). Das Prinzip dieser Rechengeschichten lässt sich, wie die folgenden Beispiele zeigen, auf viele Themen der weiterführenden Schulen übertragen. Eine motivierende methodische Variante kann dabei darin bestehen, dass die Schülerinnen und Schüler sich die Aufgaben gegenseitig stellen und entsprechend lösen (**Kasten 1**).

Bei 1. geht es – etwa im Rahmen der in Klasse 5 üblichen Wiederholung der Grundrechenarten – zum einen um Größenvorstellungen („was könnte etwa 150 g bzw. 7,5 g wiegen") und zum anderen um Operationsvorstellungen (in diesem Falle *Aufteilen* als Vorstellung der Division), die koordiniert werden müssen. Analoge Situationen finden wir bei 2. in einem Bruch- bzw. bei 3. in einem Prozentrechenkontext (6./7. Klasse).

Beispiele dieser Art bzw. entsprechende Varianten lassen sich auch im Bereich der Algebra fortsetzen:

Erfinde eine Rechengeschichte.

1. $150\,g : 7{,}5\,g$	Beispiel: Andreas trinkt gerne heiße Schokolade; in einer Tüte sind 150 g Schokoladenpulver, für eine Tasse braucht er 7,5 g. Für wie viele Tassen reicht die Tüte?
2. $2\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1\frac{1}{4}$	Beispiel: Ein Schulklasse kehrt nach einer Wanderung von $2\frac{1}{2}$ Stunden in einem Gasthaus ein und macht eine $\frac{3}{4}$ Stunde Pause. Der Heimweg dauert $1\frac{1}{4}$ Stunden. Wie lange war die Klasse unterwegs?
3. $2000 \cdot 4\,\% \cdot \frac{1}{2}$	Beispiel: Maria hat 2000 € für ein Jahr zum Zinssatz von 4 % angelegt. Die Hälfte der Zinsen hebt sie ab. Wie viel ist das?

Kasten 1: Sachrechnen

> *Gegeben ist die Gleichung $y = 1{,}2x + 150$.*
> *Erfinde eine reale Problemstellung, die auf diese Gleichung führt.*

Hier geht es darum, zu einer Gleichung eine passende Sachsituation zu finden. Wie wir aus der Analyse zahlreicher Unterrichtsdokumente wissen, fällt diese Anforderung vielen Lernenden selbst bei einfachen Gleichungen, wie der obigen, außerordentlich schwer: Die einzelnen Relations- und Operationszeichen müssen mit entsprechenden Vorstellungen verbunden werden, weiter muss (mindestens) eine Variablen-Vorstellung (vgl. Basisartikel) aktiviert werden, und schließlich müssen diese Einzelschritte so koordiniert werden, dass sie einer Gesamtsituation oder einer Klasse von Situationen zugeordnet werden können, wobei eine zusätzliche Schwierigkeit darin besteht, auch die Zahlenwerte im Sinne eines realistischen Kontexts zu berücksichtigen.

Konstruktion offener Aufgaben

Alle diese Aufgaben, der Idee der Rechengeschichte nachempfunden, sind gleichzeitig auch Beispiele für die Konstruktion offener Aufgaben, wobei hier das Prinzip der *Zielumkehrung* angewandt wurde. Solche Aufgaben können im Unterricht vielfältige Zwecke erfüllen, wobei die Förderung der mathematischen Grundbildung und speziell die Entwicklung, Fertigung und Vernetzung inhaltlicher Vorstellungen eine der wichtigsten ist (siehe dazu Blum/Wiegand 2000).

Eine weitere Technik zum Öffnen von Aufgaben ist das *Weglassen* bestimmter Details; auch hierdurch lassen sich Aufgaben mit erheblichem Grundbildungsgehalt und der Möglichkeit für die flexible Aktivierung von Grundvorstellung konstruieren.

Wir nehmen als Beispiel die von (Kirsch 1991) stammende und inzwischen gut bekannte Vereinsbeitrags-Aufgabe, auch weil wir hierzu auf konkrete Schülerdokumente verweisen können (siehe Biermann/Blum 2001).

Vereinsbeitrag

Ein Sportverein hat 3500 Mitglieder, davon 2000 Jugendliche. Diese zahlten bisher 5 DM Monatsbeitrag, die Erwachsenen 7 DM.
Die gesamten Beitragseinnahmen müssen auf 34500 DM monatlich erhöht werden.
Wie sollen die Beiträge neu festgesetzt werden?

Die Aufgabe ist durch Öffnen einer Schulbuchaufgabe entstanden, die ursprüngliche Fragestellung hieß: *Wie sollen die Beiträge neu festgesetzt werden, wenn die Erwachsenen wie bisher 2 DM mehr als die Jugendlichen bezahlen sollen?*

Inwiefern können durch diese Aufgabe Vorstellungen aktiviert werden?

Der Kern der Aufgabenstellung besteht darin, dass ein mathematisches Modell gebildet werden muss, welches die Beitragserhöhung beschreibt. Für diese Modellierung sind

Vorstellungen nötig, die – wie wir bereits im ersten Teil dieses Beitrags gezeigt haben – durchaus unterschiedlich sein können. Sehen wir uns zwei Schülerlösungen an (**Abb. 4**).

Lösung A: Hier wird eine proportionale Beitragserhöhung vorgeschlagen, realisiert durch je gleiche prozentuale Zuschläge. Der Schüler strukturiert seine Überlegungen zunächst, indem er die alten Gesamteinnahmen im Sinne der Bedarfseinheiten-Vorstellung mit 100 % identifiziert und darüber die erforderlichen prozentualen Erhöhungen berechnet. Bei der Ermittlung der neuen Einzelbeträge wird dann auch die Aktivierung von Operator-Vorstellungen deutlich (eine solche Aktivierung bereits beim ersten Teil hätte zu einem effektiveren und schnelleren Rechenweg führen können).

Lösung B: Hier hat der Schüler zunächst ausgerechnet (im Dokument nicht abgebildet), dass eine Erhöhung von je 4 DM für Jugendliche und Erwachsene die Mehrkosten decken würde. Doch da er dies offenbar für nicht zufriedenstellend hält, sucht er andere Lösungsmöglichkeiten mithilfe einer Tabelle, die deutlich macht, dass der Schüler funktional denkt. Man kann hier sehr schön die *Kovariations-Vorstellung* für die, der allgemeinen Lösung zugrunde liegende, lineare Funktion sehen: „Wenn x um 0,75 abnimmt, wächst y um 1". (Die Bezeichnung „Proportionalität" hierfür ist natürlich fehl am Platze und weist womöglich auf eine diesbezügliche Fehlvorstellung hin).

Auf ähnliche Weise wie bei der Vereinsbeitrags-Aufgabe lassen sich aus nahezu allen Stoffgebieten und allen Jahrgangsstufen entsprechende offene Aufgaben gewinnen (siehe Herget 2000, und die weiteren Beiträge dort). Und natürlich findet man eine Fülle offener Anwendungs-Aufgaben für alle Niveaus einfach durch aufmerksames Studieren der Medien (siehe Herget/Scholz 1998, oder Herget/Jahnke/Kroll 2000) und allgemeiner durch bewusstes Suchen mathematikhaltiger Situationen in der Umwelt (siehe zahlreiche Beispiele aus der ISTRON-Schriftenreihe, 1993–2002). In allen Fällen werden beim Bearbeiten solcher Aufgaben *Vorstellungen* benötigt.

Ausblick

Die Analysen und Beispiele zeigen, dass mit dem *Prinzip der Ausbildung von Grundvorstellungen* nicht etwa ein nebensächlicher didaktischer Spezialeffekt verfolgt wird, der lediglich eine zusätzliche Schwierigkeit in den ohnehin von didaktischen Forderungen überfrachteten Unterricht bringt. Vielmehr handelt es sich bei der Ausbildung von Grundvorstellungen um ein *Kernthema des Mathematiklernens*, das untrennbar mit mathematischer Modellierung verbunden ist und mit dem Lehrende und Lernende täglich zu tun haben, ob man dies nun bewusst und unter diesem Namen verfolgt oder nicht.

Wir sind der festen Überzeugung, dass es wichtig und nötig ist, die Ausbildung der Grundvorstellungen der Lernenden bewusst zu begleiten und gezielt zu fördern. Durch die Analyse von Aufgaben und Schülerlösungen hinsichtlich der innewohnenden Grundvorstellungen können *diagnostische Kompetenzen* geschärft werden, die in der Lehrerbildung bisher viel zu kurz kommen. Die Konstruktion von Aufgaben, die in besonderer Weise für die Ausbildung von Grundvorstellungen geeignet sind, kann frischen Wind in den Mathematikunterricht bringen und dabei gleichzeitig einen wesentlichen Beitrag zur mathematischen Grundbildung leisten.

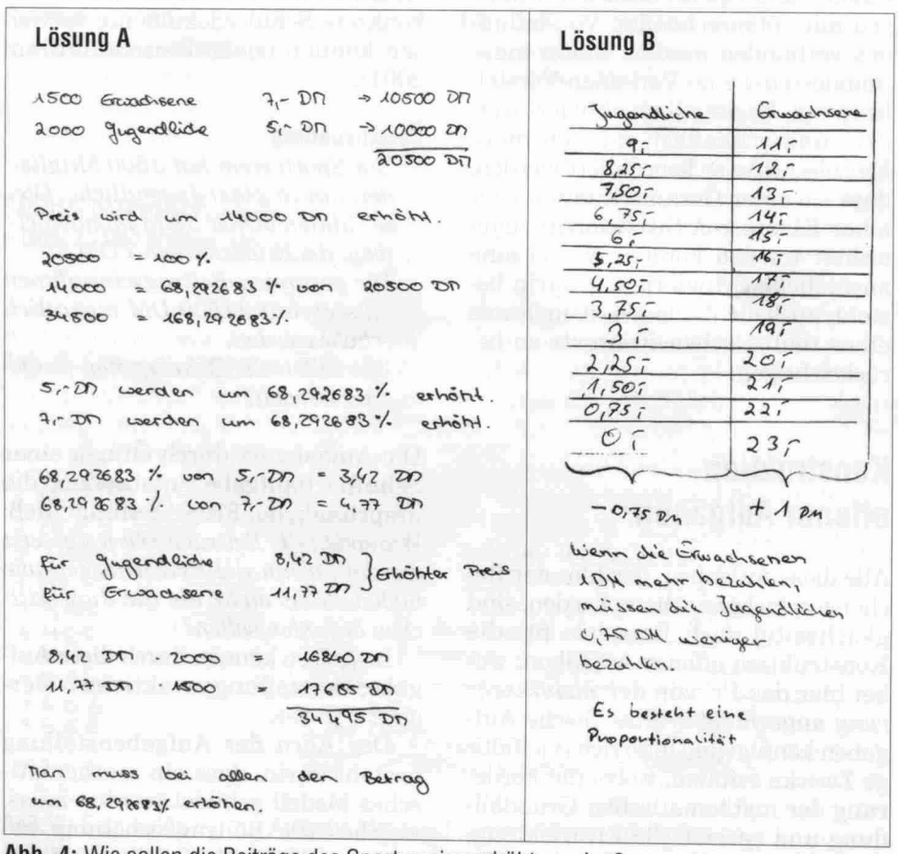


Abb. 4: Wie sollen die Beiträge des Sportvereins erhöht werden?

Literatur

Biermann, M./Blum, W.: Eine ganz normale Mathestunde? Was „Unterrichtsqualität" konkret bedeuten kann. – In: mathematik lehren, H. 108 (2001), S. 52–54.

Biermann, M./Wiegand, B./Blum, W.: Nicht „irgendwie" sondern zielgerichtet Aufgaben verändern. – Friedrich Jahresheft 2003, S. 32–35.

Blum, W./Wiegand, B.: Offene Aufgaben – wie und wozu? – In: mathematik lehren 100 (2000), S. 52–55.

Fischbein, E.: Tacit models and mathematical reasoning. – In: For the Learning of Mathematics 9 (1989), S. 9–14.

Herget, W.: Rechnen können reicht eben nicht. – In: mathematik lehren 100 (2000), S. 4–10.

Herget, W./Scholz, D.: Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. – Kallmeyer, Seelze 1998.

Herget, W./Jahnke, T./Kroll, W.: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. – Cornelsen, Berlin 2000.

vom Hofe, R.: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. – Spektrum, Heidelberg 1995.

Kirsch, A.: Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr. – In: Didaktik der Mathematik 19 (1991) 4, S. 294–308.

Oehl, W. (1970): Der Rechenunterricht in der Hauptschule. Hannover: Schroedel.