Guido Pinkernell und Markus Vogel

„Das sieht aber anders aus“ - zu Wahrnehmungsfallen beim Unterricht mit computergestützten Funktionsdarstellungen

Mit Computerunterstützung lassen sich multiple Funktionsdarstellungen statisch und dynamisch miteinander verknüpfen. Sicherlich ein medialer Mehrwert, da so Funktionsbetrachtungen im Mathematikunterricht möglich werden, die mit traditionellem Papier und Bleistift nicht möglich waren. Ein medialer Mehrwert geht aber nicht automatisch mit einem Mehrwert bezogen auf das computergestützte Lernen von funktionalen Zusammenhängen einher. Multiple und dynamisierte Repräsentationen von Funktionen können auf der Ebene des am Bildschirm Sichtbaren sehr komplex, flüchtig und sogar irreführend sein, da die mathematischen Zusammenhänge und Prozesse mit den alltäglichen Sehgewohnheiten konfligieren können. In diesem Beitrag betrachten wir solche Wahrnehmungsfallen anhand einiger Beispiele in einem interdisziplinären Fokus von Mathematik und Kognitionspsychologie, berichten von theoretischen Analysen zur Diagnose und Abhilfe und führen diese auf die praktischen Beispiele zurück.

Ein Fallbeispiel zur Einführung

Einer Studentin der PH Heidelberg wurde in einer dynamischen Mathematiksoftware der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + a$ mit Schieberegler a vorgelegt, der vor Beginn des Gesprächs den Wert $a = 0$ aufwies. Ebenfalls im selben Koordinatensystem abgebildet war der Graph der Funktion $g(x) = x^2$. Sie wurde aufgefordert, mittels des Schiebereglers den Wert von a zu vergrößern. Aufgefordert, die Wirkung der Änderung von a auf Gestalt und Position des Graphen von f zu beschreiben meinte sie, der Graph würde – wie es es gelernt hätte – nach oben verschoben werden. Aber außerdem fiele ihr auf, dass er auch enger werden würde (Pinkernell 2015). Sie wusste zwar, dass der Augenschein dem widersprach, was sie in der Schule gelernt hatte: Die „Öffnung“ der Parabel wird durch einen Faktor vor dem quadratischen Teilterm in der Funktionsgleichung bestimmt. Aber dieser Teilterm hatte keinen Koeffizienten, der diesen Eindruck hätte erklären können.

Forschungsfragen

Die Bewegungen von Graphen in dynamischer Mathematiksoftware scheinen zuweilen anders zu verlaufen als wie es der mathematische Sachverhalt beschreibt. Betrachten Sie zum Beispiel auch den Graphen von $f(x) = a \cdot x$. Bei Änderung von a scheint sich die Gerade im Auge des Betrachters um den Ursprung zu drehen. Aber die Wirkung von a auf den Graphen von $f(x) = a \cdot x$ ist – weil f als eine Menge von Paaren einander zugeordneter Werte $(x_i ; f(x_i))$ zu verstehen ist – nicht als Drehung zu beschreiben, sondern als eine Streckung parallel zur x-Achse oder zur y-Achse, je nachdem ob man a als Operator auf x_i oder auf $f(x_i)$ begreift. Mehr noch als bei statischem Lernmaterial wird die unmittelbare Deutung dynamischer Bilder durch Oberflächeneigenschaften dieser Bilder beeinflusst. Das kann die Ausbildung einer sachadäquaten begrifflichen Vorstellung von dem repräsentierten Lerngegenstand behindern. Hieraus ergeben sich zwei Fragen, die auf theoretischer Ebene geklärt werden müssen:

1. Aus kognitionspsychologischer Perspektive: Wie lässt sich der Widerspruch zwischen Wahrnehmungsbild und „besserem Wissen“ erklären?

2. Aus fachlicher Perspektive: Wie kann sich eine verständige Deutung einer dynamischen multiplen Repräsentation einer Funktion zeigen?

Beiden Fragen soll im Folgenden nachgegangen werden. Es sind Teilfragen eines umfassenderen Forschungsvorhabens, welches das Heidelberger Projekt DiaLeCo – Diagnose typischer Hürden beim Lernen mit computergestützten Multirepräsentationsumgebungen – verfolgt.

Kognitionspsychologische Perspektive

Dass man die Bewegungen von Graphen in einer dynamischen Mathematiksoftware unterschiedlich interpretieren kann, erinnert im Bereich von statischem Bildmaterial an Vexierbilder. Das sind Darstellungen, die einander ausschließende Deutungen desselben Sehreizes (Stimulus) erlauben. Im Bereich der Mathematik gehören Kippfiguren dazu, wie z. B. der Neckerwürfel (Abb. 1): Bei diesem kann jedes der beiden als solche sichtbaren Quadrate sowohl als Vorder- wie auch als Rückseite des Würfels betrachtet werden, dies aber nicht gleichzeitig: Entweder der Würfel erscheint „von unten“ betrachtet, oder man meint ihn „von oben“ zu sehen. Der Übergang von der einen Perspektive zur anderen lässt den Würfel vor dem inneren Auge kippen.

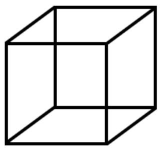

Abbildung 1: Neckerwürfel

In seiner Analyse der Informationsverarbeitung von bildhaften Informationen unterscheidet Palmer (1975) zwischen parametrischen (Farbe, Größe, etc.) und strukturellen Informationen (Figur-Grund, Beziehungen zwischen Teilelementen, etc.). Der fundamentale Unterschied zwischen diesen beiden Informationsarten bezieht sich auf die Wahrnehmung des Auges des Betrachters: Hat etwa ein Betrachter den Eindruck, dass sich die Farbe (also eine parametrische Information) ändert, muss sich diese im durch die externe Repräsentation bedingten Sehreiz geändert haben. Hat er den Eindruck, dass sich Relationen zwischen bestimmten Teilelementen (also Informationen struktureller Natur) geändert haben, kann der Sehreiz derselbe geblieben sein. Ob man den Neckerwürfel von oben oder von unten sieht entscheidet sich im Kopf des Betrachters, nicht in der Abbildung. Bildhafte Darstellungen können also mit Blick auf strukturelle Informationen ambivalent sein, dies betrifft insbesondere den Fall von nicht-realen, i. e. analogen und logischen Bildern (vgl. Kircher, Girwidz & Häußler, 2001; Vogel, 2006). für eine sachadäquate Deutung einer solchen bildhaften Repräsentation braucht es weitere Informationen. Zwei Möglichkeiten sind denkbar: Entweder werden die fehlenden Informationen durch das kognitive System der betrachtenden Person selbst erschlossen, oder die externe Repräsentation wird so modifiziert bzw. ergänzt, dass der Sehreiz eine sachgerechte Deutung nahelegt. Aus didaktischer Perspektive wäre der zweite Fall dann zu bevorzugen, wenn Schülerinnen und Schüler aufgrund des ambivalenten Sehreizes zu einer sachgerechten Deutung nicht in der Lage sind.

In ihrer Theorie der Verarbeitung multipler externer Repräsentationen von Informationen beschreiben Schnotz und Bannert (2003) das „mentale Modell“ als die kognitive Instanz, die den durch externe Repräsentationen bedingten Sehreiz sinngebend interpretiert. Die Sinnkonstruktion baut dabei auf vorhandenen kognitiven

Schemata auf, die im Moment der Informationsverarbeitung instanziiert werden (vgl. Dutke, 1994). Bei der Verarbeitung logischer Bilder, i. e. Graphen oder Diagramme, sind dies sogenannte *graphische Schemata*. Die im Eingangsbeispiel angesprochene dynamische Softwareumgebung bildet eine externe multiple logische Repräsentation des funktionalen Zusammenhangs zwischen a und f(x)+a, für deren sachangemessene Interpretation es ein geeignetes graphisches Schema braucht. Ein Lernender verfügt über solche Schemata nicht (Tversky, Morrison, Betrancourt 2002). Zum „Experten“ in Sachen dynamischer Repräsentationen von Funktionen wird er, indem er ebensolche graphischen Schemata aufbaut. Der Aufbau solcher Schemata kann durch gezielte Modifikationen bzw. Ergänzungen des Lernmaterials unterstützt werden. Wie diese aussehen können, muss sich an einer fachlichen Analyse des Lerngegenstands orientieren.

Fachliche Perspektive

Ein mathematisches Objekt ist dem Wesen nach abstrakter Natur. Ein verständiger Zugang zum mathematischen Objekt „Funktion“ kann nur über seine Repräsentationen erfolgen. Duval folgend (1999) heißt dies, mit den verschiedenen Standardrepräsentationsformen Term, Tabelle und Graph korrekt umgehen und zwischen ihnen nach Bedarf kohärent wechseln zu können. Dabei reicht regelhaftes Wissen über das Wechseln zwischen Term, Tabelle und Graph nicht aus: Die eingangs erwähnte Studentin wusste zwar, dass der Parameter a in $f(x) = x^2+a$ eine vertikale Verschiebung der Normalparabel um a LE angibt. Nur konnte sie ihr Wissen über die Zusammenhänge zwischen Parametern und Graphen in dem Moment nicht mehr anwenden, als die sonst gewohnten statischen Repräsentationen auf dem Computerbildschirm lebendig wurden. Die bloße Anwendung von Regelwissen wie etwa in Hußmann & Laakmann (2011) für die linearen Funktionen zusammengefasst muss also scheitern, wenn dieses dem visuellen Eindruck des Geschehens auf dem Bildschirm augenscheinlich widerspricht. Bestenfalls fordert der Lernende eine Klärung dieses Widerspruchs ein, im schlechten Fall akzeptiert er wortlos, dass mathematisches Wissen nur in dem Medium gültig ist, in dem er es kennengelernt hat. Häufig wird der Widerspruch zwischen Augenschein und Sachlogik nicht einmal offenbar: Man spricht gerne von einer Drehung des Graphen von $f(x)=a \cdot x$, wenn a sich verändert. Und wenn die Software dieses Geschehen durch ein Zeigericon der Form begleitet, dann trägt das nicht wirklich zu einer sachlich adäquaten Aufklärung bei.

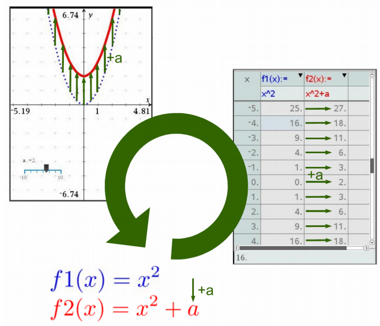

Abbildung 2: Wirkung des Operators +a in unterschiedlichen Repräsentationsformen

Wie also wäre eine sachlich korrekte Interpretation der Bewegungen im Softwarefenster zu begründen? Alle drei Repräsentationsformen – die algebraische, die numerische und die graphische – sind semiotische Systeme, die sich bzgl. ihrer Syntax und den jeweils verwendeten Symbolen fundamental unterscheiden. Und doch bildet jede denselben Zusammenhang zwischen a und f(x)+a ab. Das Wissen, das sich aus der Betrachtung der Informationen in einer Repräsentationsform ergibt, erweist sich also erst dann als valide, wenn es sich in „die Sprache“ der anderen Repräsentationsformen übersetzen lässt. Das ist, was Duval (1999) als „Verstehen“ beschreibt. Im vorliegenden Fall ist es die Wirkung des Parameterwerts, der in Term, Tabelle und Graph unterschiedliche Gestalt annimmt: In der algebraischen Repräsentation ist es der Operator +a, in der numerischen ist es die immer gleiche Differenz zwischen benachbarten Zellen der Wertetabellen von f(x) und f(x)+a, und in der geometrischen ist es der gleichbleibende vertikale Abstand zwischen den entsprechenden Punkten der beiden Graphen (Abb. 2). Dieses Kondensieren der jeweils systemspezifischen Informationen über Relationen zwischen Tabellenwerten oder Punktkoordinaten auf die reine strukturelle Information der invarianten Differenz zwischen den $f(x_i)$ und $f(x_i)+a$ kann als Abstraktion bezeichnet werden. Dies ist ein Lernen, das durch ein kohärentes, weil verständiges Aufeinanderbeziehen von solchen Informationen geschieht, die an der Oberfläche keine Gemeinsamkeiten aufweisen. Ein solches Lernen lässt sich durch das Modell der theoretischen Abstraktion beschreiben (Davydov 1972, Dreyfus 2012). Für die Verarbeitung multipler Informationsrepräsentationen braucht es diesem Modell zufolge eine erkenntnisleitende theoriebasierte Idee a priori, die ein Identifizieren von Analogien in den Tiefenstrukturen der verschiedenen Repräsentationsformen ermöglicht. Wie eine solche für das Lernen mit dynamischen multiplen Repräsentationsumgebungen zu konkretisieren wäre, steht noch offen. Bis dato erscheint uns die folgende Formulierung mit Blick auf die vorangegangenen Überlegungen die naheliegendste: Das Deutungsschema bestünde also in einem Identifizieren des variablen Parameterwerts als Invariante, die Strukuranalogien innerhalb und zwischen den drei Standardrepräsentationsformen aufzeigt. Dynamisches Lernmaterial, das dem Aufbau entsprechender Deutungsschemata zuträglich sein soll, muss also das Identifizieren solcher strukturindizierender Invarianten unterstützen.

Prinzipien multirepräsentationaler Unterstützung

In dem oben genannten Modell zur Verarbeitung multirepräsentationaler Information nach Schnotz und Bannert (2003) ist implizit postuliert, dass unterschiedliche externe Repräsentationen in unterschiedlicher Weise zum Aufbau mentaler Modelle beitragen. Beobachtbare Fehler oder wie im Eingangsbeispiel skizzierte Widersprüche lassen diesem theoretischen Zugang zufolge entweder auf ein unzureichendes mentales Modell oder auf ein defizitäres Operieren auf einem mentalen Modell schließen. In diesen theoretischen Zugang lässt sich gleichzeitig die Frage einbetten, ob und auf welche Weise durch geeignete externe Repräsentationen (dies schließt die computerbasierte Verkettung von externen Repräsentationen zu einer multirepräsentationalen Lernumgebung ein) auf die mentale Modellbildung so Einfluss genommen werden kann, dass den festgestellten Defiziten abgeholfen werden kann. In der Palmerschen (1975) Terminologie gesprochen geht es darum, die parametrische Informationsdarbietung so zu modifizieren, dass die sachgerechte Rezeption struktureller Informationszusammenhänge – hier sind dies die fokussierten, ambivalent erscheinenden Sehreize, die sich aus der Bildschirmdarstellung von dynamisierten Funktionsgraphen ergeben – stärker dem Auge des Betrachters aufgedrängt wird. Diese Fragestellung verknüpft sich mit der Grundidee, welche die Supplantationstheorie nach Salomon (1970; 1972; 1994) begründen: Sie besteht darin, interne Operationen, zu denen Lernende nicht in der Lage sind, extern zu modellieren: „A mental process is supplanted when an analoguous process is overtly executed in front of the learner’s eyes. Thus, supplantation is the function accomplished by an explicit presentation of what would otherwise have to be done covertly by the learner himself, such that a certain learning objective will be attained.“ (Salomon, 1970, S. 47). Das, was Salomon (1994) als Supplantation bezeichnet, findet sich auch bei Vertretern der distributed cognitions-Forschung implizit wieder: „However, for novel and discovery tasks, whose abstract structures are not known, the format of a representation can determine what information can be perceived, what processes can be activated, and what structures can be discovered from the specific representation.“ (Zhang, 1997, S. 213) Es geht darum, dass Lernende zu gedanklichen Leistungen verholfen wird, die sie allein nicht zu bewerkstelligen vermögen. In dieser Sichtweise reicht die Bedeutung von externen Repräsentationen über die Rolle als bloße Stimulanzen interner Prozesse hinaus: Sie erfüllen die Aufgabe, die ansonsten das kognitive System des Lernenden auszuführen hat (vgl. Kerres, 2001, S. 68).

In einer vereinfachten Variante des Informationsverarbeitungsmodells nach Schnotz und Bannert (2003) lässt sich dieser externe Unterstützungsprozess allgemein strukturell wie folgt beschreiben (vgl. Vogel, 2006): Schlägt eine sachgerechte mentale Modellbildung oder das Arbeiten mit einem mentalen Modell fehl, weil intern falsche Referenzen gebildet werden oder solche gar nicht zustande kommen, kann die entsprechende Referenz extern dargeboten werden (vgl. Abb. 3).

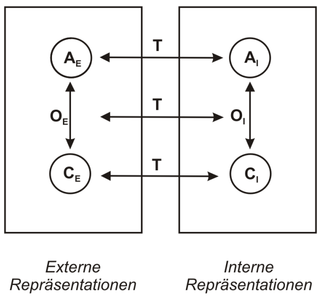

Abbildung 3: Strukturelle Skizzierung externer Repräsentationsunterstützung

Im externen Medium werden zwei externe Repräsentationen A_E und C_E sowie ihre Referenz O_E dargestellt. Die Referenz O_E kann von dynamischer oder statischer Art sein: Entweder werden zwei zueinander gehörende Objekte oder Situationen A_E und C_E extern zueinander so in Beziehung gesetzt, dass relevante Informationen über die Art des Zusammenhangs heraustreten. Oder eine Operation O_E wird auf einem Ausgangsobjekt A_E ausgeführt, was schließlich zu einer Zielrepräsentation C_E führt, welche das Ergebnis dieses Prozesses darstellt. In beiden Fällen werden die Repräsentationen A_E und C_E sowie ihre Referenz O_E über subsemantische und semantische Verarbeitungsprozesse T in die internen Repräsentationen A_I, C_I und O_I überführt. Durch die wechselseitigen Transformationen wird angezeigt, dass die repräsentierten Objekte und Operationen nicht als bloße Stimulanz für interne Repräsentationen dienen, die zum Aufbau und Operieren auf mentalen Modellen führen. Vielmehr findet zwischen internen und externen Repräsentationen ein beständiger wechselseitiger Austausch statt.

Konkret bezogen auf das oben vorgestellt Beispiel heißt dies: Man ergänzt die multiple Repräsentation des Zusammenhangs von $f(x) \rightarrow f(x) + a$ um solche Bildelemente, die den Operator +a in allen drei Repräsentationsformen Term, Tabelle und Graph als Invariante sichtbar machen. Denkbar sind Pfeile wie in Abb. 2., die sich den dynamischen Änderungen der multirepräsentationalen Lernumgebung anpassen. In jedem Moment repräsentieren sie die konstante Differenz zwischen den beiden Funktionstermen f(x) und f(x)+a, die konstante zeilenweise Differenz zwischen den

Funktionswerten f(x) und f(x)+a in der Wertetabelle, und die konstante punktweise vertikale Differenz zwischen den Graphen von f(x) und f(x)+a. Bezogen auf die vorausgehende strukturelle Darstellung des externen Unterstützungsprozesses in Abb. 3 wären die Darstellung von f(x) als A_E, die Darstellung von f(x)+a als C_E und die angesprochenen Pfeile als O_E zu betrachten.

Für woanders im Term platzierte Parameter wäre die Visualisierungshilfe anzupassen: Schnell einsehbar ist, dass der Operator +a in f(x) → f(x+a) in der Wertetabelle als vertikale Abweichung der f(x+a)-Werte von den f(x)-Werten zu markieren wäre. In der Tat beschreiben Probanden, denen wir diesen Fall vorgelegt haben, die Wirkung des Schiebereglers auf die Wertetabelle als „Verschiebung" der f(x)+a-Spalte nach oben. In der geometrischen Repräsentation wäre der Operator +a als horizontaler Abstand der Punkte zwischen den Graphen von f(x) und f(x+a). In den vorgenannten Fällen f(x) → f(x)+a und f(x) → f(x+a) entspricht die Länge des orientierten Pfeils dem Wert des jeweiligen Operators, als Translationspfeil im Koordinatensystem sogar tatsächlich, gemessen an den Achsenskalen. In den Fällen f(x) → a·f(x) und f(x) → f(a·x) dagegen wären die Pfeile nicht mehr als Differenzen bzw. Translationspfeile zu begreifen, sondern als konstante Quotienten bzw. Streckpfeile, deren Länge im Koordinatensystem je nach Position variiert. Während die Pfeillängen im letztgenannten Fall visuell nur schwer auf den Parameterwert a zurückführbar wären – man muss über die Umkehrfunktion argumentieren – wäre im erstgenannten Fall die Länge des Pfeils immer wie in Abbildung 4 gezeigt das a-fache von f(x):

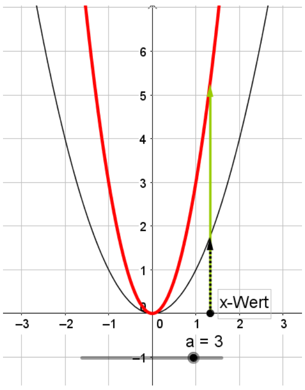

Abbildung 4: Fall f(x) → a·f(x):
Wenn man den x-Wert auf der horizontalen Achse bewegt,
ist der grüne Pfeil immer a-mal so lang wie der schwarze.

Allen Visualisierungen ist gemein: Sie korrigieren den wahrnehmungspsychologisch unvermeidbaren Bias sachadäquat. Ein Experte mag sein „besseres Wissen" in der Form sachangemessener Deutungsschemata aktivieren können, um den Augenschein zu korrigieren. Für den Lernenden ist das notwendige Deutungsschema als Bildelement der externen Repräsentation mitgeliefert. Es ersetzt die Deutung selbst nicht, die ist vom Lernenden selbst zu konstruieren. Das Bildelement ist aber Anlass, den unmittelbaren visuellen Eindruck zu hinterfragen und ggf. sachangemessen zu korrigieren.

Implikationen für den Unterricht

Aus diesen Überlegungen lässt sich für den unterrichtlichen Einsatz von computergestützten Funktionsdarstellungen ableiten, dass eine Lehrkraft die entsprechenden Materialien, wie etwa interaktive Arbeitsblätter oder themenbezogene

Applets, über den mathematischen Inhalt hinaus auf computergenerierte „Sichteigenschaften“ (im Sinne einer vermeintlichen Lernendenperspektive) und Artefakte hin reflektiert. Lassen sich deutungsunterstützende Repräsentationsergänzungen wie die oben skizzierten Pfeile bei Bedarf nicht direkt in eine Applikation einbauen (etwa weil mit fremdgefertigten Downloadmaterial gearbeitet wird), dann können Maßnahmen der direkten Adressierung im Unterricht die Ergänzungsfunktion übernehmen: In der Konsequenz heißt dies, dass computergestützte Funktionsdarstellungen im Unterricht explizit auf den jeweiligen mathematischen Inhalt *und* die computergenerierten Darstellungseigenschaften hin zu thematisieren sind.

Dies könnte zum Beispiel dadurch geschehen, dass die Lehrkraft mögliche Fehldeutungen explizit zur Diskussion bringt: „Jemand hat den Zusammenhang zwischen dem Parameter a und Gestalt und Position des Graphen von $f(x) = x^2+a$ mithilfe eines Schiebereglers untersucht und behauptet steif und fest, der Graph würde nicht nur nach oben verschoben, sondern würde auch enger werden. Was würdest du ihm entgegnen?“ Eine überzeugende Entgegnung würde auf die Wirkung von a als zur y-Achse parallelen Verschiebung verweisen, die auf jeden Punkt des Graphen wirkt. Auch der Hinweis auf die äquidistanten Tabelleneinträge von x^2 und x^2+a wäre aussagekräftig genug.

Zusammenfassung

Die Dynamisierung des Lernmaterials in den digitalen Medien lässt Deutungen zu, die der Sachlogik des Abgebildeten widersprechen können. Man sieht Drehungen dort, wo eigentlich Parallelstreckungen gemeint sind, und Verschiebungen in vertikaler Richtung werden als Stauchungen in horizontaler Richtung wahrgenommen. Kognitionspsychologisch lassen sich diese Phänomene gut als eine Ambivalenz struktureller Informationen im Lernmaterial erklären: Wie sich ein Graph im Koordinatensystem bewegt ist innerhalb dieses geometrischen Repräsentationsmodus gar nicht eindeutig festgelegt, der kognitive Mechanismus der Informationsverarbeitung ist da ziemlich frei in seiner Deutung. Die Sachlogik dagegen ist eindeutig: Die Termstruktur der mitgelieferten Funktionsgleichung legt fest, ob der Effekt eines Parameters geometrisch als Translation oder als Rotation zu beschreiben ist. Es ist im genuinen Interesse einer fachorientierten Didaktik, dass solche Widersprüche zwischen dem Augenschein und der Sachsituation aufgeklärt werden: Solange er einen Merksatz in der Visualisierung nicht begründet sieht kann ein Lernender diesen nur akzeptieren. Verstanden hat er ihn nicht.

Fachlich gesehen ist die Sachsituation dann verstanden, wenn die Effekte des Parameters auf jede Repräsentation einer parametrisierten Funktion durch die Effekte desselben Parameters auf die anderen Standardrepräsentationen der Funktion erklärt werden können. Dieser Effekt lässt sich im mitgelieferten dynamischen Lernmaterial in Form von Pfeilen darstellen, die die strukturanaloge Veränderung in allen Repräsentationsformen visualisieren. Dieses Addendum in der externen multiplen Repräsentation des funktionalen Zusammenhangs korrigiert gewissermaßen den für einen Lernenden unvermeidbaren Wahrnehmungsfehler und unterstützt den Aufbau eines kognitiven Schemas für die sachangemessene Deutung des Lernmaterials.

Wir haben hier Phänomene des Lernens mit dynamischen Bildmaterial am Beispiel einfacher Zusammenhänge zwischen den Repräsentationen parametrisierter Funktionen beschrieben und methodische Lösungen in Form von Supplantationen im Bildmaterial der Lernumgebungen angeboten. Es ist davon auszugehen, dass ähnliche Phänomene und damit vergleichbare Lösungen auch in anderen dynamischen multimedialen Lernmaterial auftreten bzw. zu entwickeln sind. Die Konsequenz ist damit nicht, auf dynamisiertes Lernmaterial zu verzichten. Im Gegenteil: Nur Wissen, das sich in verschiedenen Repräsentationen bewährt, erweist sich als valide. Dynamisches multimediales Lernmaterial ist also als Chance zu begreifen, belastbares, situationsunabhängiges Wissen aufzubauen.

Literatur

Davydov, V. V. (1972). Über das Verhältnis zwischen abstrakten und konkreten Kenntnissen. In J. Lompscher (Hrsg.), Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen. Neuere Untersuchungen zur Anwendung der Lerntheorien Galperins. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag.

Dreyfus, T. (2012). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. In Sung Je Cho (Hrsg.), The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul, South Korea.

Dutke, S. (1994). Mentale Modelle: Konstrukte des Wissens und Verstehens: kognitionspsychologische Grundlagen für die Software-Ergonomie. Göttingen: Verlag für Angewandte Psychologie.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization. In F. Hitt & M. Santos (Hrsg.), Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. I, pp. 3–26). Mexico.

Hußmann, S., & Laakmann, B. (2011). Eine Funktion - viele Gesichter. PM, 53(38), 2–11.

Kerres, M. (2001). Multimediale und telemediale Lernumgebungen: Konzeption und Entwicklung. München: Oldenbourg.

Palmer, S. E. (1975). The nature of perceptual representation: An examination of the analog/propositional controversy. In Proceedings of the 1975 workshop on Theoretical issues in natural language processing (pp. 151–159). Association for Computational Linguistics.

Pinkernell, G. (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions (pp. 2531–2537). In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (pp. 2531-2537). Prague, Czech Republic

Salomon, G. (1970). What does it do to Johnny? Viewpoints: Bulletin of the School of Education, 46(5), 33-62.

Salomon, G. (1972). Can we affect cognitive skills through visual media? An hypothesis and initial findings. AV Communication Review, 20(4), 401–422.

Salomon, G. (1993). No distribution without individuals' cognition: a dynamic interactional view. In: G. Salomon (Hrsg.), Distributed cognitions: psychological and educational considerations (S. 111–138). Cambridge: University Press.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. Learning and Instruction, 13, 141–156.

Tversky, B., Morrison, J. B., & Betrancourt, M. (2002). Animation: can it facilitate? International Journal of Human-Computer Studies, 57(4), 247–262.

Vogel, M. (2006). Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Hildesheim: Franzbecker.

Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. Cognitive Science, 21(2), 179–217.