



**University of  
Zurich**<sup>UZH</sup>

**Zurich Open Repository and  
Archive**

University of Zurich  
University Library  
Strickhofstrasse 39  
CH-8057 Zurich  
[www.zora.uzh.ch](http://www.zora.uzh.ch)

---

Year: 2008

---

## **Eine Vorstellungsübung zur Propädeutik von Termen**

Weber, C

Posted at the Zurich Open Repository and Archive, University of Zurich

ZORA URL: <https://doi.org/10.5167/uzh-12148>

Book Section

Accepted Version

Originally published at:

Weber, C (2008). Eine Vorstellungsübung zur Propädeutik von Termen. In: Barzel, B; Berlin, T; Bertalan, D; Fischer, A. *Algebraisches Denken – Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker*. Hildesheim Berlin: Franzbecker Verlag, 137-147.

in ausführlicherer Form erschienen in: Barzel, B. / Berlin, T. / Bertalan, D. / Fischer, A. (Hrsg.): *Algebraisches Denken*. Hildesheim: Franzbecker Verlag, 2007, S. 137–147.

## Eine Vorstellungsübung zur Propädeutik von Termen

Für Lisa Hefendehl-Hebeker

Christof Weber

*„Verständiges Lernen von Mathematik muß die Begriffe, Ideen und Strukturen erfassen in ihrer Beziehung zu den Phänomenen, zu deren Darstellung sie geschaffen wurden [...]. Solches Lernen enthält immer eine genetische Komponente.“ (Hefendehl-Hebeker 1997, S. 8)*

**Zusammenfassung.** Moderne Lehrmittel haben sich zum Ziel gesetzt, algebraisches Denken nicht bloß als regelgeleitetes Operieren mit Symbolen zu vermitteln. Vielmehr möchten sie Variablen, Terme und Formeln so unterrichten, dass Schülerinnen und Schüler diese Grundbausteine der mathematischen Formelsprache in ihrem inner- wie außer-mathematischen Bedeutungsgehalt erfassen und verstehen können. In diesem Beitrag wird eine entsprechende Lernumgebung skizziert: eine *Vorstellungsübung*, welche die gedankliche Vergegenwärtigung und Erkundung von Mustern anregt. So widersprüchlich der Fokus auf die Konstruktion und Reflexion von bildhaften Vorstellungen im Kontext der Algebra auch scheinen mag, so produktiv ist er im Hinblick auf ein Verständnis der Algebra – und damit letztlich für einen sinnstiftenden Mathematikunterricht.

### 1. Streichholzketten als propädeutischer Zugang zu Termen

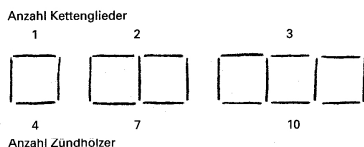
In neuen Lehrmitteln finden sich verschiedene Vorschläge, die auf einen propädeutischen Zugang zum Variablen- und Termbegriff zielen. So werden den Schülerinnen und Schülern auf rekursiven Rechenschemata basierende *Zahlenmauern* oder *repetitive Muster* zur Erkundung vorgelegt (Wittmann & Müller 1990, Cotter et al. 2000, Affolter et al. 2003a, Hußmann et al. 2006). Zu den repetitiven Mustern gehören „Zündholzketten“, die aus Quadraten wachsen, und es wird untersucht, wie die Anzahl Kettenglieder mit der Anzahl Streichhölzer zusammenhängt (siehe Abb. 1).

Diese Aufgabe führt über die umgangssprachliche Beschreibung der abgebildeten Streichholzkette zur formalen Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den beiden Anzahlen. Dazu werden zwei verschiedenartige (Funktions-)Terme vorgegeben, die diesen Zusammenhang algebraisch erfassen. Je nach gedanklicher Strukturierung ergibt sich eine andere umgangssprachliche Beschreibung – und damit auch ein anderer Term: Im Fall von „ $3 \cdot x + 1$ “ könnte die umgangssprachliche Beschreibung „zum ersten Streichholz kommen pro Kettenglied drei Streichhölzer hinzu“ lauten, im Fall von „ $4 + (x-1) \cdot 3$ “ beispielsweise „zu den

vier Streichhölzern des ersten Kettenglieds kommen pro weiteres Kettenglied drei Streichhölzer hinzu“. In den weiteren Aufgaben der Lernumgebung geht es zunehmend darum, die Gesetzmäßigkeiten, die den anderen bildlich dargestellten, repetitiven Mustern zugrunde liegen, nicht mehr zuerst umgangssprachlich zu fassen, sondern sie direkt mit Termen zu beschreiben.

### Zündholzketten

Wenn du mit Zündhölzern Ketten legst, entdeckst du Gesetzmäßigkeiten. Zwischen der Anzahl der Kettenglieder und der Anzahl benötigter Zündhölzer besteht eine Beziehung. Für eine beliebig lange Kette (eine Kette mit  $x$  Gliedern) kann diese Beziehung als Term geschrieben werden.



1.1 Beschreibe, wie die Anzahl Zündhölzer von der Anzahl Kettenglieder abhängt.

1.2 Zu dieser Kette wurden zwei Terme gefunden:

$$3 \cdot x + 1 \text{ und } 4 + (x - 1) \cdot 3$$

A Sind beide richtig? Begründe.

B Welche Darstellung passt zu welchem Term? Warum?



Abb. 1: Wie geht es weiter mit der wachsenden Streichholzketten? (Affolter et al. 2003b, S. 47)

Diese Lernumgebung mit ihrer mathematischen Leitfrage „Wie geht es weiter?“ zielt darauf, sich gedanklich gerade so weit von der bildlich gegebenen Darstellung eines Musters zu lösen, dass sich die Gesetzmäßigkeit zwischen der Anzahl Streichhölzer und der Anzahl Kettenglieder für beliebig lange Streichholzketten formal erfassen lässt. So wird erfahrbar, „dass man auch mit Zahlen rechnen kann, die man gar nicht kennt“, mit „ $x$ -beliebigen Zahlen“ eben (Affolter et al. 2003a) – ein erster Schritt in Richtung *algebraischen Denkens*.

Weniger explizit, aber deshalb nicht weniger erkenntnisreich vermittelt diese Lernumgebung zudem, ...

- ... dass sich hinter Termen *Geschichten* (Muster, Phänomene) verbergen können und
- ... dass ein und dieselbe Geschichte *je nach individueller gedanklicher Strukturierung* durch verschiedenartige Terme beschrieben werden kann (was den Begriff der Äquivalenz vorbereitet, da die Terme gleichwertig sind).

Nicht zuletzt aufgrund dieser beiden Punkte lässt sich die ‘Sache mit den Streichholzketten’ auch in einer Vorstellungsübung präsentieren. Sie wird im folgenden Abschnitt skizziert. Abschnitt 3 versucht schließlich, den spezifischen Charakter der Vorstellungsübung mit zwei Leitlinien von Lisa Hefendehl-Hebekers Schaffen zu verbinden: zum einen ihr didaktisches Interesse an elementarer Algebra und deren Propädeutik, zum anderen ihr pädagogisches Plädoyer dafür, den einzelnen Menschen ernst zu nehmen. Dies gibt mir auch die Gelegenheit, den Hintergrund von Vorstellungsübungen herauszuarbeiten.

## 2. Streichholzketten als Vorstellungsübung

Repetitive Muster wie diejenige von Streichholzketten lassen sich Schülerinnen und Schülern nicht nur bildhaft oder real zur Erkundung vorlegen. Aufgrund ihrer einfachen geometrischen Konstruktion und Gestalt eignen sich Streichholzketten aus Quadraten hervorragend dazu, im Unterricht rein sprachlich beschrieben und gedanklich vorgestellt zu werden. Die entsprechenden *Vorstellungsanweisungen* sind in Kasten 1 formuliert.

Im Unterricht wird dieser Text von der Lehrperson – einzig über den Kommunikationsweg der mündlichen Sprache – vorgetragen, während die Schülerinnen und Schüler den Vorstellungsanweisungen folgen. Die Lernenden sind gehalten, wenn möglich auf äußere Darstellungsmittel wie reale Streichhölzer oder schriftliche Notizen zu verzichten und ihre Augen geschlossen zu halten. Während die Vorstellungsübung vorgetragen wird, geht es einzig darum, sich den Sachzusammenhang der wachsenden Streichholzkette bildhaft vorzustellen und die entsprechenden Vorstellungsbilder stabil zu halten. *Erst aufgrund einer solchen gedanklichen Vergewenwärtigung kann die Streichholzkette in der Folge auch erkundet werden.*

In dieser Vorstellungsübung wird ein mathematischer Inhalt in einen *außermathematischen Bild- und Handlungskontext* gestellt – und das ist typisch für Vorstellungsübungen. So sind die beiden Terme „ $3 \cdot x + 1$ “ und „ $4 + (x-1) \cdot 3$ “ in den Kontext einer wachsenden Streichholzkette gebettet. In einer Folge von Anweisungen werden sowohl der Aufbau von *Vorstellungsbildern* (eine prallvoll gefüllte Streichholzschachtel auf dem Tisch, vier Streichhölzer in Form eines Quadrats, die Form zweier und mehr aneinander gehängter Quadrate) als auch spezifische *Vorstellungshandlungen* (Öffnen der Schachtel, Entnehmen, Legen,

Anfügen und Abzählen von Streichhölzern) angeregt. Dabei wird auf mathematische Begrifflichkeiten („Quadrat“ steht hier für die ungefähre Form, nicht für das mathematische Objekt eines Quadrats mit gleichlangen Seiten, die rechtwinklig zueinander stehen) und Bezeichnungen („seiten  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  und  $D_1$  die Ecken des ersten Quadrats“) bewusst verzichtet. Vielmehr werden bildhafte Wörter und Metaphern („nach rechts“, „Lücke“, „Glieder“, „Kette“) eingesetzt – ein weiteres typisches Merkmal von Vorstellungsübungen.

- Stell dir vor, dass du an einem Tisch sitzt. Auf dem Tisch vor dir liegt eine Streichholzschatel.
- Öffne die Schachtel: Sie ist prallvoll mit vielen Streichhölzern gefüllt.
- Nimm vier Streichhölzer heraus. Lege diese vier Streichhölzer auf den Tisch, so dass sie die Seiten eines Quadrat bilden, und zwar so: Lege ein erstes Streichholz senkrecht vor dich auf den Tisch. Das nächste lege so hin, dass es oben ans erste Streichholz anschließt und waagrecht nach rechts führt. Das Dritte lege so hin, dass es unten an das Erste anschließt und ebenfalls waagrecht nach rechts führt. In die entstehende Lücke fügst du das vierte Streichholz ein.
- Fasse das Quadrat, das du eben gelegt hast, ins Auge.
- Füge rechts an dieses Quadrats drei weitere Streichhölzer an und zwar so, dass insgesamt die Form zweier aneinander gefügter Quadrate entsteht. Das Ganze sieht ein bisschen so aus wie die beiden Glieder einer Kette.
- Wie viele Streichhölzer waren dazu zusätzlich nötig? Und insgesamt, wie viele Streichhölzer hast du für deine Streichholzkette bis jetzt gelegt?
- In gleicher Weise verlängerst du nun die Kette um ein drittes Glied.
- Wie viele Streichhölzer waren dazu zusätzlich nötig? Und insgesamt, wie viele Streichhölzer hast du für deine Kette bis jetzt gelegt?
- In einer neuen Streichholzschatel befinden sich 46 Streichhölzer. Wie viele Glieder hat die Streichholzkette, die mit all diesen Streichhölzern gelegt werden kann?
- Was hast du dir im Laufe der Vorstellungsübung vorgestellt?

Kasten 1: Vorstellungsübung „Streichholzkette“ (in Anlehnung an Affolter et al. 2003b, S. 47)

Neben der Unterscheidung zwischen Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen hat es sich für die Unterrichtsarbeit bewährt, auch zwischen *singulären* und *regulären Vorstellungen* zu unterscheiden. Während in regulären Vorstellungen zum Ausdruck kommt, was unter einem mathematischen Inhalt vorzustellen ist – gewissermaßen die fachliche Norm –, manifestieren sich in singulären Vorstellungen individuelle Bedeutungszuschreibungen. Hier, bei den singu-

lären Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler, nehmen Vorstellungsübungen denn auch ihren Ausgang.<sup>1</sup>

Jede Vorstellungsübung wird von einer *mathematischen Frage* und einer *Reflexionsfrage* abgeschlossen. Die mathematische Frage nach der Länge der Kette, also der Gliederzahl der Kette, die sich mit einer neuen Schachtel Streichhölzer legen lässt, verunsichert. Wie soll man sich dies vorstellen? Dank der im Vorfeld angeregten Vorstellungen und der Vergegenwärtigung der zwei- und dreigliedrigen Streichholzketten stellen sich typischerweise vage *Vermutungen* dazu ein, entweder bildhaft („eine sehr lange Streichholzkette, die gerade noch auf dem Tisch Platz hat“) oder in Form einer Größenordnung („ungefähr ein Drittel der Menge aller Streichhölzer“).<sup>2</sup>

Aufgrund der Anlage der Vorstellungsübung, die verlangt, sich die wachsende Streichholzkette ohne Hilfsmittel vorzustellen, drängt sich die Frage nach den individuell konstruierten Vorstellungen auf. Diese *Reflexionsfrage*, die im Anschluss an die mathematische Frage gestellt wird, zielt auf die Reflexion eigener Vorstellensprozesse und damit auf die Reflexion singulärer Positionen:

- Welche singulären Vorstellungen konstruieren die Schülerinnen und Schüler im Laufe der Vorstellungsübung?
- Welche Vorstellungsbilder sehen sie dabei vor ihrem inneren Auge?
- Welche Vorstellungshandlungen führen sie dabei gedanklich aus?

Solche und ähnliche Fragen eignen sich besonders, um im Anschluss an die Vorstellungsübung in der Klasse gehaltvolle Gespräche über die persönlichen Auseinandersetzungen mit der mathematischen Frage anzuregen: Wie habe ich es mir vorgestellt? Wie hast du es dir vorgestellt? Wie stellt sich das ein Profi vor? Unter anderem richtet sich dadurch der Blick von der eigenen inneren Bühne auf die Bühne der anderen. Es wird ein *Perspektivenwechsel* eingeleitet, ein weiteres metakognitives Element dieser Lernumgebung. Wenn die genannten Fragen in einem Lernjournal (Ruf & Gallin 1998) bzw. in einem Forschungsheft (Hußmann 2002) bearbeitet werden, kann auf die individuell unterschiedlichen singulären Vorstellungen besonders intensiv eingegangen werden – von der Lehrperson, aber auch von den Lernenden selbst. Wie weit dann der Impuls von Vorstellungsübungen und das heißt auch die Reflexion singulärer Vorstellungen in fachlicher Hinsicht reichen kann, zeigt Weber (2008).

---

<sup>1</sup> Insofern fallen reguläre Vorstellungen mit vom Hofes Grundvorstellungen zusammen (vom Hofe 1995, 2003). Für die genaue Begriffsbestimmung von Vorstellungen siehe Weber (2007, S. 128–132, 143–149).

<sup>2</sup> Die fachliche Auseinandersetzung kann bis zur *algebraischen Formel* „Ecken – Kanten + Flächen = 1“ (Polyedersatz für ebene Netze) führen. Sie kann durch gliedweises Abbauen der Kette oder durch Einsetzen der entsprechenden Terme sogar bewiesen werden.

Selbstverständlich fällt es nicht allen Schülerinnen und Schülern leicht, visuelle Vorstellungen zu konstruieren und mit solchen zu arbeiten, ist doch die visuelle Repräsentations- und Denkform nur eine neben anderen (Presmeg 1986, Borromeo-Ferri 2003, Barzel & Hußmann in diesem Band). Dennoch sind Vorstellungsübungen bei Schülerinnen und Schülern sehr beliebt. Ein Grund für die *große Akzeptanz* liegt darin, dass der traditionelle Mathematikunterricht besonders auf abstrakt-prädikative Eigenschaften zielt und sprachliche Repräsentationsformen bevorzugt, also kaum dynamisch-funktionale Bilder heranzieht und nutzt (Schwank 1996, 2003). Dies wird augenscheinlich als Defizit empfunden. Die hier vorgeschlagene neue Lernumgebung ist gleichzeitig attraktiv, weil sie nicht nur von einer vorgegebenen Aufgabe ausgeht, sondern gleichzeitig auch von den singulären Vorstellungen der einzelnen Schülerinnen und Schüler.

### 3. Weitere fachdidaktische und pädagogische Betrachtungen

Anhand der Leitlinien in Hefendehl-Hebekers Schaffen – ihrem fachdidaktischen Interesse an der Propädeutik der elementaren Algebra und ihrem pädagogischen Blick für den einzelnen Menschen im Unterricht – wird nun der besondere Wert von Vorstellungsübungen betrachtet.

- *Algebraisches Denken* zeichnet sich geradezu dadurch aus, von realen oder bildhaften Inhalten zu abstrahieren. Deshalb stand die in der Antike apodiktisch geforderte geometrische Rechtfertigung arithmetischer Objekte einer Entstehung der Algebra entgegen. Hefendehl-Hebeker beschreibt das so:

*„Die Entwicklung der Formelsprache der symbolischen Algebra in der frühen Neuzeit war eine für die Mathematik und ihre Anwendungen konstitutive und vorbildlose Neuerung. Sie entlastet das Vorstellungsvermögen, indem sie es ermöglicht, inhaltsgebundene logische Argumentation weitgehend durch inhaltsinvariante Denkopoperationen zu ersetzen. Sie erhöht die operative Reichweite, indem sie ein regelgeleitetes Operieren mit Symbolen erlaubt. Diese Vorzüge müssen jedoch durch ein hohes Maß an Abstraktion erkaufte werden. Insofern ist das Zusammenspiel von Form und Inhalt in der Mathematik ein tief liegendes didaktisches Problem.“ (Hefendehl-Hebeker 2003, S. 65)*

Allzu Konkretes oder Bildhaftes, das mit algebraischen Operationen und Symbolen verknüpft wird, ist einem routinierten algebraischen Handeln und Denken nicht zuträglich. Dennoch ist es auch für das Lernen und Verstehen von Algebra unabdingbar, *genetisch* vorzugehen, also den historischen Werdegang vom Gegenstandsbezogenen zum Abstrakten selbst zu durchlaufen (Hefendehl-Hebeker 2001). Auf diese Weise lassen sich algebraische Begriffe und Strukturen in ihrer Beziehung zu den Phänomenen, zu deren Darstellung sie geschaffen wurden, verständlich lernen (Hefendehl-Hebeker 1997).

*Verstehen ist also grundsätzlich auf die Beziehung zu Phänomenen angewiesen, auch im Falle der Algebra.* So ist die Anwendung einer Regel (etwa dass Minus mal Minus gleich Plus ist) für algebraisches Operieren ausreichend – wenn sie denn korrekt gelingt. Jedoch lässt die korrekte Anwendung oder die formal saubere Wiedergabe einer Regel noch keineswegs auf ihr Verständnis schließen. Erst wenn verschiedene Kontexte aktiviert werden können, in denen ihr Sinn hervortritt, kann beispielsweise eine nicht korrekte Anwendung der Regel korrigiert werden – und damit von Verständnis die Rede sein. (Hefendehl-Hebeker 1990, 2004b). Hier, bei der Aktivierung der Kontexte, übernehmen Vorstellungen eine wesentliche Stützfunktion.

Deshalb ist es nur auf den ersten Blick widersprüchlich, ausgerechnet Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen für einen propädeutischen Zugang zum Variablen- und Termbegriff heranzuziehen. Die Vorstellungsübung „Streichholz-kette“ beansprucht kein algebraisches Denken von höchster Abstraktion. Vielmehr eröffnet sie eine innere Bühne, auf der die Verwendung von Termen angeregt und als sinnvoll – da nützlich und erleichternd – erlebt wird. Im Unterschied zum entsprechenden Schulbuch (vgl. Abb. 1) wird in der Vorstellungsübung keine Handlungs- bzw. Bild-Situation angeboten, sondern ein gedanklicher Raum, in dem *Vorstellungshandlungen an Vorstellungsbildern* ausgeführt werden sollen. Hier wie dort konstituieren zwar Bilder und Handlungen eine Lernumgebung, aber in Schulbüchern wird hauptsächlich mit konkreten oder abgebildeten Gegenständen und Handlungen gearbeitet, während Vorstellungsübungen bewusst auf vorgestellte Gegenständen und Handlungen fokussieren.

- Wissensvermittlung in der Mathematik ist an Repräsentationsmittel gebunden. Dazu kommt erschwerend hinzu, dass sich jede Wissensform von ihrem Wissensinhalt unterscheidet. Diese „qualitative Kluft“ zwischen Wissensform und Wissensinhalt kann nach Hefendehl-Hebeker „nur von den Lernenden durch geistige Aktivität überbrückt werden“ (Hefendehl-Hebeker 2004b). Die zweite Leitlinie ihres Schaffens lässt sich denn auch in ihrem dezidiert *pädagogischen Blick* für das Individuum erkennen. Hefendehl-Hebeker verbindet damit immer die Hoffnung, Schülerinnen und Schüler beim Lernen – also bei der Überbrückung der qualitativen Kluft – bestmöglich zu unterstützen und fördern:

*„Bestrebungen, die nicht auf fremdgesteuertes Lernen setzen, sondern Lernen des Individuums als selbstgesteuerte Aneignung und Persönlichkeitsbildung konzipieren und in diesem Sinne für ein ‚lebendiges Lernen‘ eintreten, reichen weit in die pädagogische Tradition zurück. [...] Die begründete Hoffnung besteht also darin, dass in geeignet organisierten lebendigen Lernprozessen zugleich fachliches Lernen wie auch die Entwicklung außerfachlicher und übergreifender Fähigkeiten [...] so angestoßen werden, dass die Effekte sich gegenseitig verstärken.“ (Hefendehl-Hebeker 2004b, S. 168f.)*

Immer wieder analysiert Hefendehl-Hebeker kritisch Unterrichtssequenzen, um dann in exemplarischen Gegenentwürfen zu zeigen, wo und wie im Unterricht der *Lebendigkeit* – von Lernenden und von Lehrenden! – mehr Raum geboten werden könnte. So zeigt sie etwa, wie sich der Mathematikunterricht durch eine lebendige, weniger fachsprachliche Einkleidung von mathematischen Fragen in Form von mathematischen Erzählungen (Hefendehl-Hebeker 1982) oder mathematischen Theaterszenen „entkrampfen und beleben“ lässt (Hefendehl-Hebeker 1985, Hefendehl-Hebeker & Wille 1987).

Vorschläge wie diese reden nicht einem „erholsamen Unterricht“ das Wort. Vielmehr sollen Lehrkräfte ihren Schülerinnen und Schülern „ein eigenes Expertentum“ zutrauen, um Mathematik nicht als Fremdkörper erleben zu lassen, sondern „im eigenen Erleben zu verankern“ (Hefendehl-Hebeker 1990). Erst wenn sie eine „aufbauende Grundeinstellung zu den Lernenden“ leben, die darin besteht, „sich von der Schülerperspektive anrühren zu lassen und deren eigenem Reichtum nachzuspüren“, kann eine „geistige Ermutigung im Mathematikunterricht“ stattfinden (Hefendehl-Hebeker 1995). Damit einher muss eine fachliche Offenheit gehen, denn selbst wenn ein Unterrichtsthema schon mehrfach unterrichtet worden ist, können sich hinter Fragen von Lernenden ohne weiteres auch fachliche Zugänge und Zusammenhänge verbergen, die neu und bereichernd sind. So wünscht sich Hefendehl-Hebeker eine Lehrerhaltung, die sie kurz und knapp wie folgt beschreibt: „Dazu fassen wir zwei Ansatzpunkte ins Auge, die wir für wesentlich halten [...]: *Offenheit gegenüber den Lernenden und dem Fach.*“ (Hefendehl-Hebeker 2004a, S. 49, Hervorhebung C.W.)

Die Vorstellungsübung der „Streichholzkette“ kann als *mathematische Geschichte* aufgefasst werden. Das ist ein Grund, weshalb sie sich nicht nur in Form von Abbildungen und schriftlichen Anweisungen präsentieren lässt, sondern als Vorstellungsübung in Szene gesetzt werden kann. Im Gegensatz zu Schulbuchdarstellungen profitieren Vorstellungsübungen von ihrer ursprünglichen Verortung in der mündlichen, lebendigeren und stärker bildhaften Sprache

Die Entscheidung, eine mathematische Fragestellung mit der Klärung von Vorstellungen und damit von *singulären Positionen* beginnen zu lassen, ist eine pädagogische. Sie hat nichts mit der Schaffung von Erholungs- und Entspannungsphasen zur Unterstützung von Lernprozessen zu tun. Vielmehr versteht sie sich als eine mögliche methodische Umsetzung der Forderung Hefendehl-Hebekers, Mathematik im eigenen Erleben beginnen zu lassen, um sich in Mathematik zu vertiefen und Mathematik zu verstehen. Selbstverständlich muss die Lehrperson bei diesem besonderen Umgang mit Lernenden *offen* sein für das, was sich während der Vorstellungsübung in deren Köpfen abspielt, und ihre Produkte *ernst* nehmen, sind doch diese konstruierten singulären Vorstellungen alles andere als vorhersehbar.

## Fazit

Im Sinne von Hefendehl-Hebeker ist es beim Unterrichten algebraischen Denkens nicht nur unproduktiv, die Beziehungen der Begriffe und Strukturen zu den Phänomenen zu unterschlagen, es ist mindestens ebenso unproduktiv, beim Unterrichten von Mathematik den Einzelnen zu übersehen. Vorstellungsübungen beginnen deshalb aus guten Gründen mit der Evozierung und Klärung von singulären Positionen, die in einem weiteren Schritt zum Fachlichen führen. Durch die Vorstellungsübung „Streichholzkette“ werden Vorstellungen konstruiert und reflektiert, um ein repetitives Muster zu vergegenwärtigen und zu explorieren. Auf dieser Grundlage bahnt sich ein algebraisches Denken an, das auf Verstehen und damit letztlich auch auf individueller Sinnstiftung basiert. Die wohl knappste Formulierung einer so verstandenen Mathematikdidaktik stammt von Hartmut von Hentig: „Die Menschen stärken, die Sachen klären“ (zit. nach Hefendehl-Hebeker 2004b).<sup>3</sup>

## Literatur

- Affolter, W. et al. (2003a). X-beliebig. In: mathbu.ch 7 – Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern: schulverlag blmv AG / Zug: Klett und Balmer AG. S. 20–21.
- Affolter, W. et al. (2003b). X-beliebig. In: mathbu.ch 7 – Arbeitsheft 7. Bern: schulverlag blmv AG / Zug: Klett und Balmer AG. S. 47–50.
- Borromeo-Ferri, R. (2003). Mathematische Denkstile – visuell, analytisch, konzeptuell und ihre Präferenzen bei Jugendlichen am Ende der Sekundarstufe. In: Henn, H.-W. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim / Berlin: Franzbecker Verlag. S. 141–144.
- Cotter P. et al. (2000). Arithmetik und Algebra 1. Zürich: saba Verlag. S. 85ff.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1982). Als die Null in das Zahlenreich kam – ein mathematisches Märchen. In: Mathematiklehrer 1. S. 2–4.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1985). Ein Bühnenstück zu einem mathematischen Märchen: Als die Null in das Zahlenreich kam. In: Mathematische Unterrichtspraxis 6, S. 19–30.
- Hefendehl-Hebeker, L. / Wille, Fr. (1987). Mathematische Erzählungen und mathematisches Theater. In: Kautschitsch, H. / Metzler, W. (Hrsg.). Medien zur Veranschaulichung von Mathematik. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky-Verlag / Stuttgart: Teubner Verlag. S. 283–305.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1990). Wie „erholsam“ darf Matheunterricht sein? In: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.). Die Zukunft des Mathematikunterrichts. Soest. S. 69–72.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1995). Geistige Ermutigung im Mathematikunterricht. In: Bühler R. et al. (Hrsg.). Mathematik allgemeinbildend unterrichten – Impulse für Lehrerbildung und Schule. Köln: Aulis Verlag. S. 83–91.

---

<sup>3</sup> Zu ausführlichen *Erfahrungen* mit Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II und zu ihrem *mathematikdidaktischen Potenzial*, aber auch zu ihren *Grenzen* siehe Weber (2007, Kap. 3, 5 und 6).

- Hefendehl-Hebeker, L. (1997). Gedanken zur Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. In: DMV-Mitteilungen 2. S. 5–9.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2001). Die Wissensform des Formelwissens. In: Weiser, W. / Wollring, B. (Hrsg.). Beiträge zur Didaktik der Primarstufe – Festschrift für Siegfried Schmidt. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2003). Das Zusammenspiel von Form und Inhalt in der Mathematik. In: Hefendehl-Hebeker, L. / Hußmann, St. (Hrsg.). Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie – Festschrift für Norbert Knoche. Hildeheim / Berlin: Franzbecker. S. 65–71.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2004a). Selbstgesteuertes Lernen im Dialog. In: Der Mathematikunterricht 3. S. 45–51.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2004b). Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, H. et al. (Hrsg.). Konsequenzen aus PISA – Perspektiven der Fachdidaktiken. Innsbruck: Studienverlag. S. 141–189.
- Hußmann, St. (2002). Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen. Hildesheim / Berlin: Franzbecker.
- Hußmann, St. et al. (2006). Muster und Abhängigkeiten erkunden. In: von Schmid, A. / Weidig, I. (Hrsg.). Lambacher-Schweizer, Ausgabe Nordrhein-Westfalen, Neubearbeitung: 6. Schuljahr. Stuttgart: Klett. S. 192–217.
- vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik Lehren 118. S. 4–8.
- Prediger, S. (2002). Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In: Peschek, W. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim / Berlin: Franzbecker Verlag. S. 399–402.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in High School Mathematics. In: For the Learning of Mathematics 3. S. 42–46.
- Ruf, U. / Gallin, P. (1998). Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik – Band 1 und 2. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.
- Schwank, I. (1996). Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 6. S. 168–183.
- Schwank, I. (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 3. S. 70–78.
- Weber, Chr. (2007). Mathematische Vorstellungen bilden – Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II. Bern: h.e.p. Verlag.
- Weber, Chr. (2008). „Umfallen und Wegrutschen ist gleich“ – mit mathematischen Vorstellungsübungen in den Dialog gehen. In: Ruf, U. / Keller, St. / Winter, F. (Hrsg.). Besser Lernen im Dialog. Seelze: Kallmeyer Verlag. (im Druck)
- Wittmann E. Chr. / Müller, G. N. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen – Vom Einspluseins zum Einmaleins. Band 1. Stuttgart / Düsseldorf: Klett Verlag. S. 104–109.