

„... nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“

Lehramtsstudierende auf dem Weg zur fachdidaktisch fundierten diagnostischen Kompetenz

Susanne Prediger

In etwas veränderter Form erschienen in B. Barzel, T. Berlin, D. Bertalan, A. Fischer (Hrsg.):
Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker, Franzbecker, Hildesheim, S. 89 - 99.

Zusammenfassung: Der Aufbau diagnostischer Kompetenz ist ein entscheidender Teil der Lehraus- und -weiterbildung, für die immer auch eine fachdidaktische Fundierung notwendig ist. Am Beispiel der Bedeutungen des Gleichheitszeichens gezeigt, wie eine solche fachdidaktisch fundierte diagnostische Kompetenz in einem Prozess genetischen und dialogischen Lernens (weiter-)entwickelt werden kann.

Zum Einstieg eine kurze Episode aus meinem Unterricht in einer fünften Gesamtschulklasse (die Namen wurden überall geändert):

Episode 1: Emily und das Gleichheitszeichen

Zur Explizierung von Kopfrechenstrategien bei der Wiederholung der Multiplikation bekam die Klasse 5 folgende Aufgabe:

„Lisa kann Rechnungen wie $24 \cdot 7$ nicht im Kopf. Deswegen zerlegt sie die Rechnung so:

$$24 \cdot 7 = 20 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 140 + 28 = 168.$$

a.) Hat sie richtig gerechnet? Wie hättest Du es gerechnet?

b.) Rechne $54 \cdot 6$ so wie Lisa.“

Emily (10 Jahre) wundert sich sehr: „Lisa rechnet falsch, $24 \cdot 7$ ist nicht 20! Und was soll das dahinter denn noch?“ Aufgrund der Schwierigkeiten mit der Schreibweise bearbeitet sie die Aufgabe nicht weiter, obwohl sie $24 \cdot 7$ genau wie Lisa in $20 \cdot 7$ und $4 \cdot 7$ zerlegt hätte.

Die erste spontane Reaktion einer Kollegin, der ich davon erzählte: „Nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“ zeigte mir: Eine solche Episode didaktisch adäquat zu erfassen und angemessen zu reagieren, ist zwar nicht die einzige, aber eine wichtige Herausforderung, der sich Lehrerinnen und Lehrer täglich zu stellen haben.

Was stört Emily an der Gleichung? Wieso stimmt dies mit der fachlichen Sicht nicht überein? Was könnte eine Lehrkraft tun, um Emilys Perspektiven mit den fachlich üblichen in Einklang zu bringen? Seitdem die PISA-2000-Begleitstudie (Baumert et al. 2001) nachgewiesen hat, dass nicht alle Lehrerinnen und Lehrer über die zur Beantwortung notwendige diagnostische Kompetenz verfügen, ist der Ausbau diagnostischer Kompetenz zu einer bildungspolitisch wichtigen Forderung an die Lehraus- und -weiterbildung geworden (Helmke et al. 2003, Wollring et al. 2003, Peter-Koop 2001). Diagnostische Kompetenz in Bezug auf fachliche Lernprozesse, so soll in diesem Beitrag gezeigt werden, kann immer nur fachspezifisch aufgebaut werden und ist eng verknüpft mit dem Aufbau eines didaktisch sensiblen Fachverständnisses und handlungsrelevanter didakti-

scher Kenntnisse. Am Beispiel der Bedeutungen des Gleichheitszeichens sollen Ansätze für den Aufbau *fachdidaktisch fundierter diagnostischer Kompetenz* vorgestellt werden, die stark von Lisa Hefendehl-Hebeker's Konzepten zur Lehrausbildung geprägt sind (Hefendehl-Hebeker 1998, 2002).

Der Anspruch – Aspekte des theoretischen Hintergrunds

Diagnostizieren als fachdidaktisch anspruchsvolle Tätigkeit

Zum Aufbau diagnostischer Kompetenz in Bezug auf fachliche Lernprozesse gehört zunächst eine den Lernenden zugewandte und aufgeschlossene *Haltung*, also die Bereitschaft und Neugier, sich mit Äußerungen und Denkweisen von Individuen intensiv auseinanderzusetzen. Wie eine solche Haltung zu Beginn des Studiums angebahnt werden kann, indem Faszination für individuelle Wege von Lernenden geweckt wird, zeigen Selzer/Spiegel (1997) durch Beispiele mit der eingängigen Botschaft „Kinder denken anders“. Dies ist der erste Schritt weg vom abweisenden „Nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“

Über diese bereichsunabhängige *Grundhaltung* hinaus müssen auch *Kenntnisse und Fähigkeiten zur Diagnose* erworben werden, denn Helmke et al. betonen:

„Zu einer *Diagnose* wird die *Beschreibung von Personen* [bzw. ihren Äußerungen] erst dann, wenn sie auf einer expliziten theoretischen Basis, auf der *Grundlage eines vorgegebenen kategorialen Rasters oder eines Konzepts* erfolgt.“ (Helmke et al. 2003, S. 19, *Hervorhebung eingefügt*)

Daher muss eine gleichermaßen wissenschaftsbasierte wie professionsorientierte Ausbildung geeignete Lerngelegenheiten schaffen, in denen Lehramtsstudierende sich entsprechende theoretische Hintergründe aneignen können.

Wenn Äußerungen von Lernenden nicht nur hinsichtlich allgemeiner Aspekte (wie Sozialkompetenz oder Selbstregulation), sondern auch hinsichtlich *fachbezogener Lernstände* analysiert werden sollen, dann müssen diese Hintergründe *fach-* und teilweise sogar *bereichsspezifischer Natur* sein. Um diese Forderung zu untermauern, sollen hier Auszüge aus Analysen der Episode 1 zitiert werden, die Studierende zu Beginn einer Lehrveranstaltung zur Didaktik der Elementaren Algebra aufgeschrieben haben:

„Emily ... sieht nur Lisas vermeintliches Endergebnis hinter dem Gleichheitszeichen. ... das Äquivalenzzeichen wäre hier auch sinnvoller gewesen, so dass Emily die Rechnung eher als Umformung versteht. ... Von der Schreibweise her hat Emily Recht. Die Rechnung von Lisa ist jedoch korrekt, wenn man an die Rechengesetze erinnert.“ (Analyse von Ingrid, Lehramtsstudentin im 5. Semester des Didaktischen Grundlagenstudiums, d. h. ohne Unterrichtsfach Mathematik)

Ebenso wie Emily hält Ingrid, die sich als fachfremde Grundlagenstudentin mit Mathematikdidaktik auseinandersetzt, die Schreibweise von Lisa zunächst für falsch. Ihre Antwort ist exemplarisch für die Tatsache, dass eine didaktisch fundierte diagnostische Kompetenz nur auf solider Fachkompetenz aufsetzen kann,

weil sie sonst Irritationen der Lernenden zu verstärken drohen. Maïke dagegen analysiert mathematisch richtig und einfühlsam:

„Emily betrachtet nach dem Gleichheitszeichen nur die erste Zahl zur Gleichung $24 \cdot 7 = 20$. Sie betrachtet $\cdot 7 + 4 \cdot 7$ nicht als Term, der zur Gleichung gehört. Wenn man sich die Gleichung (wie Emily sie sieht) $24 \cdot 7 = 20$ betrachtet, so hat Emily Recht.

Wenn Emily weiß, was Terme sind, würde ich Emily bitten, mir die Terme vorzulesen bzw. zu erklären, wie sie darauf kommt, um einen kognitiven Konflikt bei ihr hervorzurufen, in der Hoffnung, dass sie ihren Fehler eigenständig erkennt, ohne dass ich ihn benennen muss.“

(Analyse von Maïke, Mathematik-Lehramtsstudentin im 7. Semester)

Maïke kann sich partiell in Emily eindenken und schlägt als nächsten Schritt für die Lehrkraft eine wichtige bereichsunabhängige Strategie zur Initiierung von Konzeptwechseln vor, nämlich die Erzeugung eines kognitiven Konflikts. Insofern kann man Maïke bereits etwas didaktische Kompetenz attestieren. Sie stößt jedoch genau dort an ihre Grenzen, wo eine tiefergehende Konkretisierung erforderlich wäre: *Welchen* kognitiven Konflikt genau, und wie kann man ihn erzeugen? Dazu wäre *spezifisches Wissen über typische Schwierigkeiten und divergierende Deutungen von Gleichungen* nötig, über das Maïke noch nicht verfügt. Dies kann nur in einer spezifisch auf die Elementare Algebra fokussierenden Veranstaltung erworben werden, die sie gerade erst begonnen hat.

Entgegen einer bildungs- und wissenschaftspolitischen Tendenz, den Aufbau diagnostischer Kompetenz als fachunabhängige Aufgabe in dem erziehungswissenschaftlichen Studienanteil anzusiedeln, wird hier deswegen das Diagnostizieren fachlicher Lernprozesse als genuin fachdidaktische Tätigkeit angesehen. Sie muss auf mathematikspezifischem fachdidaktischem Wissen und einem didaktisch sensiblen Fachverständnis der Elementaren Algebra aufsetzen.

Stoffdidaktischer Hintergrund:

Unterschiedliche Bedeutungen des Gleichheitszeichens

Zur kategorialen Analyse der Episode mit Emily auf theoretischer stoffdidaktischer Basis hilft die von Kieran (1981), Winter (1982) u.v.a. getroffene Unterscheidung zwischen der in arithmetischen Kontexten dominierenden Aufgabe-Ergebnis-Deutung des Gleichheitszeichens als *Operationszeichen* (wie Emily sie verfolgt) und der algebraisch tragfähigeren Deutung als *Relationszeichen*, das verschiedene Ausdrücke in symmetrischer Weise in Beziehung setzt.

Diese zwei Kategorien für die Bedeutung des Gleichheitszeichens können in eine breitere Liste von möglichen Interpretationen ausdifferenziert werden, vgl. Abb. 1 (ähnlich in Cortes et al. 1990). Siebel (2005) hält diese verschiedenen Interpretationen des Gleichheitszeichens für fachlich so wichtig, dass sie sie zum Bestandteil ihrer Leitvorstellung der Elementaren Algebra macht.

„Elementare Algebra ist die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zah-

Unterschiedliche Interpretationen des Gleichheitszeichens

1. Operationszeichen (Aufgabe-Ergebnis-Deutung)
2. Relationszeichen:
 - 2a. arithmetische, aber symmetrisch verstandene Gleichheit
 - 2b. Bestimmungsgleichungen (Gleichheit als Bedingung für Unbekannte)
 - 2c. allgemeine Formeln im Sachzusammenhang (inhaltliche Gleichheit)
 - 2d. Äquivalenz gleichwertiger Terme (formale Gleichheit)
3. Satzungszeichen (Definition)

Abb. 1: Stoffdidaktischer Hintergrund: Systematik

len, die zu ‚guten‘ Beschreibungen quantifizierbarer Zusammenhänge befähigt. [...] Zahlen und Variable werden durch Operationen zu Termen und Gleichungen als Denkeinheiten verbunden *und durch verschiedene Begriffe von Gleichheit* in Zusammenhang gebracht. ...“ (Siebel 2005, S. 73, Hervorhebung eingefügt)

In vielen Arbeiten (z. B. Kieran 1981, Winter 1982, Cortes et al. 1990 u.v.a.) wird die Kontextspezifität der Deutungen und der in der Lernbiographie notwendige langfristige Blickwinkelwechsel beim Übergang von Arithmetik zu Algebra betont: in der Grundschule dominiert meist eine Operationsdeutung, in algebraischen Zusammenhängen der Mittelstufe die Relationsdeutung.

In der auf die Kontextspezifität der Interpretationen des Gleichheitszeichens konzentrierten Diskussion wird jedoch vernachlässigt, dass in vielen mathematischen Problemlösungen die Deutungswechsel auch *innerhalb einer Aufgabe* vorkommen. Ebenso wie die unterschiedlichen Variablenaspekte (vgl. Malle 1993) stellt das flexible Wechseln zwischen verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten des Gleichheitszeichens nämlich nicht nur eine Lernschwierigkeit dar, sondern auch ein Vorteil und Charakteristikum mathematischen Arbeitens innerhalb einer Problembearbeitung. Exemplarisch soll der flexible Wechsel der Variablenaspekte und Bedeutungen des Gleichheitszeichens an der in Abb. 2 abgedruckten Begründung des isoperimetrischen Problems verdeutlicht werden. Statt eleganterer elementarer Methoden wird dazu der Ableitungskalkül genutzt, weil man daran den Wechsel besonders gut zeigen kann. An den beiden rechten Analyse-Spalten der Abb. 2 sieht man, dass nahezu bei jedem Lösungsschritt sich der genutzte Variablenaspekt oder die Bedeutung des Gleichheitszeichens ändert. Einerseits liegt hier die Stärke der mathematischen Vorgehensweise, denn genau durch diese Flexibilität gelingt es, ein *geometrisches* Problem *algebraisch* zu fassen und dann *analytisch* zu lösen. Andererseits hat Lisa Hefendehl-Hebeker (2001) aufgezeigt, wie gerade solche impliziten Sichtwechsel Verständnishürden darstellen können, wenn sie nicht expliziert werden.

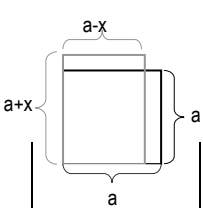
Aufgabe: Zeige, dass unter allen umfangsgleichen Rechtecken das Quadrat das flächengrößte ist.	Variablenaspekt 	Bedeutung des Gleichheitszeichens
Lösung mit Hilfe des Ableitungskalküls: Ein Quadrat mit Seitenlänge a hat den Umfang $U=4a$. Jedes umfangsgleiche Rechteck hat die Seitenlängen $a+x$, $a-x$. Dann gilt für den Flächeninhalt $A = (a-x)(a+x)$ $= a^2 - x^2$	Gegenstandsaspekt Unbestimmte	inhaltliche Gleichheit
Betrachte dies als Funktion $A(x) = a^2 - x^2$ Bestimme die Ableitungen durch $A'(x) = -2x$ $A''(x) = -2$	Kalkülaspekt Veränderlichenaspekt	formale Gleichheit Setzungszeichen
Für jedes lokale Maximum gilt $A'(x_E) = 0$ und $A''(x_E) < 0$	Kalkülaspekt Kalkülaspekt	Operationszeichen Operationszeichen
Setze $A'(x_E) = -2x_E = 0$ also ist $x_E = 0$	Gegenstandsaspekt Unbestimmte Gegenstandsaspekt Unbekannte Unbekannte gefunden	inhaltliche Gleichheit Bestimmungsgleichung Operationszeichen
Somit hat A an der Stelle $x_E=0$ einen potentiellen Extrempunkt. Aus $A''(0) = -2$ folgt, es ist ein Maximum, also ist das Quadrat das flächengrößte Rechteck.		

Abb. 2: Wechsel der Bedeutungen von Variablen und Gleichheitszeichen am Beispiel eines Optimierungsproblems

Lehrkräfte mit didaktisch sensiblem Fachverständnis können diese im Bedarfsfall durchschauen und ihren Lernenden gegenüber kommunizieren (Hefendehl-Hebeker 1998, S. 204).

Diagnostizieren mit stoffdidaktischem Hintergrund

Damit kann Emilys Problem in der Episode 1 fundierter benannt werden: Emily ist die Möglichkeit der unterschiedlichen Deutungen des Gleichheitszeichens nicht klar, kennt sie doch aus ihrer Grundschulerfahrung bisher nur die Aufgabe-Ergebnis-Deutung. Aus ihr leitet sie die von Maike rekonstruierte individuelle Regel ab, eine Gleichung nur bis zur ersten Zahl rechts des Kommas zu lesen.

Erst die Umdeutung des Gleichheitszeichens als Relationszeichen rechtfertigt dagegen die algebraische Leseregeln, den gesamten Term bis zum nächsten Gleichheitszeichen einzubeziehen; nur aus diesem Blickwinkel macht der von Lisa geschriebene, transitiv gemeinte Ausdruck Sinn.

Dass Studierende diese Analyse nicht automatisch vollziehen können, auch wenn sie grundsätzlich zur Auseinandersetzung mit dem Denken von Lernenden

bereit sind, zeigen auch die folgenden Auszüge von Analysen und Handlungsvorschlägen, die andere Teilnehmende der Lehrveranstaltung zu folgenden Fragen spontan geschrieben haben:

- Was meint Emily?
- Aus welcher Sicht hat sie Recht?
- Was würden Sie ihr antworten?

- „a. Emily hat vielleicht nicht gesehen, dass Lisa die $24 \cdot 7$ zerlegt hat. Sie versteht wahrscheinlich nicht die Zerlegung dieser Rechenaufgabe,
 b. $24 \cdot 7 \neq 20$. Wie, aus welcher Sicht hat sie Recht?
 c. Nachfragen und mir noch mal erklären lassen, wie sie das meint und dann würde ich erst antworten. So weiß ich das nicht. Vielleicht erkennt sie beim Erklären aber schon selbst, wo ihr ‚Denk-Problem‘ steckt.“ (Analyse von Martin, 5. Semester Mathematik-Lehramt)

- „... c. Liebe Emily, deine Antwort an sich ist logisch und berechtigt, da die Zahl 20 unmittelbar nach dem Gleichheitszeichen steht und als Ergebnis der Rechnung scheint. Allerdings solltest Du in diesem Fall beide Seiten gänzlich betrachten und in einem Zusammenhang sehen. Somit ist die Zahl 20 nicht allein das Ergebnis, sondern alle Zeichen bis zum nächsten Gleichheitszeichen.“ (Analyse von Johanna, 7. Semester Grundlagenstudium)

Sowohl Johanna als auch Martin zeigen eine begrüßenswerte schülerorientierte Grundhaltung: Martin fragt nach, bis er das Problem besser verstanden hat, Johanna kann sich noch etwas besser in Emily eindenken und gibt zunächst eine bestätigende Rückmeldung. Gleichwohl verfügen beide Analysen und Handlungsvorschläge noch nicht über die *notwendige fachdidaktische Tiefenschärfe*.

Diese könnte auch nicht allein durch die gemeinsame Analyse von Transkripten im Paradigma der interpretativen Unterrichtsforschung erreicht werden (vgl. etwa Jungwirth et al. 1994), Denn auch wenn dieser Ansatz ausgesprochen fruchtbar ist, muss das gemeinsame sorgfältige Interpretieren in solchen Fällen ergänzt werden um stoffdidaktisches Hintergrundwissen, hier der Kategorien verschiedener Deutungen von Gleichheit. Denn genau solche *bereichsspezifischen Kategorien* fehlen Johanna und Martin, um sie zur Analyse der eigentlichen Problemstelle zu nutzen.

Dies gelingt z. B. Sascha in seiner äußerst knappen, aber treffenden Analyse *nach Einführung* der Kategorien in der Lehrveranstaltung:

„Emily interpretiert das Gleichheitszeichen als ‚ergibt‘ und nicht als Gleichheitszeichen, das mehrere Funktionen haben kann und z. B. Terme verbindet.“ (Analyse von Sascha, Mathematik-Lehramt)

Allerdings reicht die Vermittlung der stoffdidaktischen Kategorien allein für den Aufbau bereichsspezifischer diagnostischer Kompetenz nicht bei allen Studierenden aus. Die im Weiteren vorzustellenden Ansätze sind aus der Erfahrung erwachsen, dass selbst *nach Einführung* der Kategorien von Gleichheit eine zielführende Aktivierung zur Analyse von Schüleräußerungen für ungeübte Lehramtsstudierende nicht selbstverständlich ist.

Die Umsetzung - Einblicke in den Weg zur fachdidaktisch fundierten diagnostischen Kompetenz

Diagnostische Kompetenz entwickelt sich beim theoriegeleiteten Diagnostizieren

Diagnostische Kompetenz ist nicht nur ein Bündel von Kenntnissen, sondern eine *handlungsleitende Fähigkeit*, die sich zweckgerichtet auf unterrichtliche Prozesse bezieht. Dies betont Weinert, wenn er diagnostische Kompetenz beschreibt als

„ein Bündel von Fähigkeiten, um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler [...] im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann.“ (Weinert 2000, o.S.)

Wenn also diagnostische Kompetenz in unterrichtliche Handlungssituationen eingebettet ist, sollte dies auch für ihren Erwerb gelten. Deswegen gebe ich in Lehrveranstaltungen dem handlungsleitenden Diagnostizieren den Vorzug vor der kontextlosen Aneignung von stoffdidaktischen Kategorien, indem fachdidaktische Kategorien wie die unterschiedlichen Deutungen des Gleichheitszeichens anhand der Analyse von Episoden und Lösungsprozessen erarbeitet werden. Dabei werden die Kategorien nicht mehr im Vorlesungsstil vorgestellt, sondern eigentätig im Dialog entwickelt. In beidem folge ich dem Ansatz von Lisa Hefendehl-Hebeker (2002) zum dialogischen Lehren.

Dialogisches Lehren

Mit ihrem Vorschlag, das genetische Prinzip auch auf das Lernen fachdidaktischer Kategorien zu übertragen, hat Lisa Hefendehl-Hebeker meine Arbeit erheblich geprägt: Bei der Vermittlung fachdidaktischer Theoriebildung ist

„ebenso viel Veranlassung für aktives und konstruktives Lernen ... gegeben wie hinsichtlich fachwissenschaftlicher Inhalte. ... Ich bin dazu übergegangen, ... ähnlich wie bei der Erarbeitung exemplarischer mathematischer Probleme zu Beginn eine auf die vorhandene intuitive Verstehensbasis gestützte Analyse der Unterrichtsepisode im Dialog vorzunehmen. ... anschließend konnten die ... tastenden ... umgangssprachlichen Beschreibungen durch die Spezialbegriffe ... superponiert werden, um auf diese Weise die Bedeutung einer präzisierenden Ausdrucksweise spürbar werden zu lassen.“ (Hefendehl-Hebeker 2002, S. 57)

Seit Jahren probiere ich immer neue Wege, diese Ideen in fachdidaktischen Lehrveranstaltungen umzusetzen und habe dabei insbesondere für den Aufbau didaktisch fundierter diagnostischer Kompetenz sehr gute Erfahrungen gemacht.

Fehlende diagnostische Werkzeuge erlebbar machen

„Die Erfahrung von Grenzen intuitiver Einschätzungen einer Problemsituation motiviert die Entwicklung präziser wissenschaftlicher Bearbeitungsinstrumente.“ (Hefendehl-Hebeker 2002, S. 58) Diese Grenzerfahrung sollen die Studierenden an konkreten Beispielen wie der Episode 1 mit Emily machen. Ihre Analysen und Vorschläge müssen sich daran messen lassen, wie Emily darauf reagieren würde. Um zu oberflächliche Vorschläge zu verwerfen und das Bedürfnis nach Tiefenschärfe bei allem wecken zu können, ist eine Zuspitzung der Problematik durch eine Episode aus Klasse 11 hilfreich (aufgenommen und transkribiert von Katja Schreiber).

Episode 2: Hanna und die Transitivität des Gleichheitszeichens

Eine Schülerin, Hanna, erklärt an der Tafel, wie sie für einen gegebenen realen linearen Zusammenhang auf die Funktionsgleichung $f_y(x) = 10x + 110$ gekommen ist.

Hanna: Ja, wir haben das halt so gemacht, dass wir zuerst die Punkte, also die Strecke, also ein mal zehn, die zweite z.B. zwei mal zehn sind zwanzig und dann plus 110, weil...

*[schreibt an die Tafel $1 \cdot 10 = 10 + 110 = 120$
 $2 \cdot 10 = 20 + 110 = 130$]*

Lehrerin: Und wie habt ihr dann zu der Gleichung gefunden?

Hanna: Also erstmal die Gleichung ist, f_y von $x = 10x + 110$. *[schreibt $f_y(x) = 10 \cdot x + 110$]*
Ja weil man muss halt zehn mal und dann halt plus 110. ..

Lehrerin: Vielleicht ganz kurz hier dazu. *[zeigt auf Hannas erstes Gleichheitszeichen]*
Mathematikerinnen und Mathematiker sind ein bisschen pingelig mit dem Gleichheitszeichen. Hier steht ein mal zehn und dann steht da gleich 120 ...das ist...

Hanna: Wieso?

Lehrerin: Oder soll das ein Doppelpunkt sein?

Hanna: Nee, das ist 'n Gleichheitszeichen.

Lehrerin: Das ist gleich zwanzig, aber dann darf man da nicht gleich 110 dahinter schreiben. Ich mach' das mal hier vorn in Klammern, weil beim Gleichheitszeichen muss wirklich auf der einen und auf der anderen Seite das Gleiche stehen. Aber die Idee ist klar. Aber das ist nur, Mathematiker kriegen immer das Kribbeln, wenn auf der linken und auf der rechten Seite nicht dasselbe steht...

Hanna: Ich bin aber kein Mathematiker...

Lehrerin: Aber das hat auch Vorteile, weil... *[2 sec]* Verena und Sarah haben da einen anderen Weg, um zur Funktionsgleichung zu kommen. Verena, magst du mal erklären?

Auch hier muss der Konflikt zwischen Operationszeichen und Relationszeichen geglättet werden. Kleingruppendiskussionen unter den Studierenden werden angeregt durch die Fragen: Können wir der Lehrerin beim Argumentieren helfen? Wieso ist das wichtig, dass rechts und links dasselbe steht? Welchen Begriff von Gleichheit benutzt Hanna? Für welchen ist es wichtig, dass rechts und links dasselbe steht?

Unterschiedliche Sichtweisen abwägen

Bei Hanna stellt sich noch schärfer als bei Emily die Frage, wie man zwischen den geäußerten unterschiedlichen Sichtweisen abwägen kann (Hefendehl-Hebeker 1998, S. 204). Hanna akzeptiert die von der Lehrerin eingeforderte *Respektierung der Transitivität des Gleichheitszeichens* nicht. Sie zeigt eine hohe interkulturelle Kompetenz gegenüber Mathematik (Prediger 2004), indem sie ihren eigenen Standpunkt selbstbewusst von dem der Mathematiker abgrenzt („Ich bin aber kein Mathematiker.“). Dies erzeugt bei den Studierenden Irritation und einen noch höheren Bedarf für gute Argumente: „Darf man das einfach so stehen lassen?“

Während die meisten Studierenden darauf drängen, auch für Hanna die Konventionen verbindlicher zu machen, wenden einige ein, „Aber wenn ich in Nebenrechnungen bin, schreib ich auch so, Kettenrechnungen lassen sich doch so viel leichter aufschreiben! Eigentlich blöd, dass es nicht erlaubt ist, nur wegen der Transitivität.“ Der logisch konsequente Vorschlag: unterschiedliche Nutzungen in arithmetischen und algebraischen Kontexten zulassen? Nun wird es Zeit, die unterschiedlichen Sichtweisen einzubetten.

Genetische und dialogische Entwicklung der Kategorien

Die Studierenden können die in Abb. 1 vorgestellten Kategorien von Interpretationen der Gleichheit durch die Auseinandersetzung mit einem sorgfältig ausgewählten Pool von Beispielen genetisch und eigenständig erarbeiten (vgl. den Arbeitsauftrag in Abb. 3). Damit auf diesem induktiven Weg kein *rein exemplarisches Begriffsverständnis* zu den didaktischen Kategorien der unterschiedlichen Interpretationen aufgebaut wird (vgl. Winter 1983 zu verschiedenen Begriffsverständnisarten), muss die eigenständige Arbeit durch einen gemeinsamen intensiven Dialog im Gruppenverband ergänzt werden, bei dem die ersten vagen Vorstellungen zu einem *inhaltlichen Verständnis der Kategorien* weiter ausdif-

Was genau bedeuten die Gleichheitszeichen in diesen Beispielen?
Welchen Zweck erfüllen sie jeweils? Welche sind ähnlich?

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a , b und Hypotenuse c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.	Löse $x^2 + x - 6 = 0$
Sei $y := 2x + 52$	Volumen eines Kegels: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$	$19 = 10^2 - 9^2$
$24 : 6 - 3 = 1$		$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

Abb. 3: Auftrag zur eigenständigen Erarbeitung der Interpretationen-Systematik

ferenziert werden. „Umgekehrt hebt die Kommunikation Nuancen in den Interpretationsmöglichkeiten fachlicher [hier fachdidaktischer] Begriffe und Verfahren ins Bewusstsein, die für Tiefe, Differenziertheit und Nachhaltigkeit des Verständnisses wichtig sind und verschiedenen kognitiven Dispositionen Rechnung tragen.“ (Hefendehl-Hebeker 2002, S. 57)

Das *pragmatische Begriffsverständnis*, das die Kategorien jeweils auch in ihren Nutzungszusammenhängen erlebbar macht, wird durch gemeinsame Analyse des in Abb. 2 abgedruckten Beispiels eines Optimierungsproblems vertieft. Diese Analyse erfordert ein tiefes fachliches Verständnis und bringt damit insbesondere einige derjenigen Studierenden an ihre fachlichen Grenzen, die Mathematik nicht als Unterrichtsfach gewählt haben. Hier liegen das erforderliche didaktische Verständnis und das notwendige fachinhaltliche Verständnis sehr eng beieinander. „Ich konnte den Ableitungskalküls zwar leicht nutzen für die Lösung von Extremwertaufgaben, weil das für mich mechanisch geht, aber wenn wir hier die Bedeutung der Teilschritte hinterfragen, dann wird es echt schwer. Genau genommen hab ich das noch nie begriffen.“, sagt Tina. Eine Erfahrung, die der Trivialisierung komplexer Lösungswege hoffentlich entgegenzuwirken vermag (vgl. Hefendehl-Hebeker 1995, S. 39).

Am Ende stehen schließlich die Systematisierung der unterschiedlichen Interpretationen (vgl. Abb. 1) und ihre Verschriftlichung samt Beispielen und allgemeinsprachlichen Deutungen.

Fazit

Eine berufsfeldbezogene Fachkompetenz für angehende Lehrkräfte und eine fachdidaktisch fundierte diagnostische Kompetenz treffen sich genau in dem Anspruch eines didaktisch sensiblen Fachverständnisses, das geprägt sein sollte durch „eine epistemologische Sicht der Mathematik, die die Entwicklung und Struktur des Wissens mit seinem inneren Aspektreichtum und seinen gestaltenden Leitideen berücksichtigt“ (Hefendehl-Hebeker 1998, S. 205).

Dies wurde hier am Beispiel der Bedeutung des Gleichheitszeichens exemplarisch verdeutlicht. Für die Lernziele einer Didaktik der Elementaren Algebra heißt das, die Studierenden sollen

- unterschiedliche Interpretationen und Kontexte für algebraische Objekte (wie dem Gleichheitszeichen) identifizieren und realisieren sowie als Beispiel für die lokale Aspektfülle der Mathematik einordnen können;
- diese zur Analyse von Schüleräußerungen, Denkhürden und möglichen Schwierigkeiten in der Interaktion nutzen können;
- sie nutzen können, um auch eingeschränkte Schülerperspektiven nachzuvollziehen und sensibel zu ihrer Ausweitung beizutragen;

- Entwicklungsperspektiven für die langfristigen sukzessiven Veränderungen von Bedeutungen aufbauen und diese für unterrichtliche Entscheidungen aktivieren können.

Literatur

- Baumert, J. et al. (2001). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich, Opladen: Leske+Budrich.
- Cortes, A.; Vergnaud, G.; Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. In: Booker, G. et al. (Hrsg.): Proceedings of the 14th PME conference, Vol. 2, Mexico, 19-26
- Hefendehl-Hebeker, L. (1995). Mathematik lernen für die Schule? In: Mathematische Semesterberichte 42, 33-52.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1998). Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. In: Mathematische Semesterberichte 45, 189-206.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2001). Verständigung über Mathematik im Unterricht, in: Lengnink, K. et al. (Hrsg.). Mathematik und Mensch, Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft, 99-110.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2002). Dialogisches Lernen in der Lehramtsausbildung, in: Prediger, S.; Siebel, F.; Lengnink, K. (Hrsg.). Mathematik und Kommunikation, Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft, 49-58.
- Helmke, A.; Hosenfeld, I.; Schrader, F.-W. (2003). Diagnosekompetenz in Ausbildung und Beruf entwickeln, in: Karlsruher Pädagogische Beiträge 55, 15-34.
- Jungwirth, H., Steinbring, H., Wollring, B. (1994). Unterrichtsforschung in der Lehrerbildung, in: Maier, H.; Voigt, J. (Hrsg.). Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung, Köln: Aulis, 12-42.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol, in: Educational Studies in Mathematics 12 (3), 317-326.
- Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Wiesbaden: Vieweg.
- Peter-Koop, A. (2001). From "teachers researchers" to "student teacher researchers": Diagnostically enriched didactics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th Conference of PME, Utrecht, Freudenthal Institute, vol. 1, 72-79.
- Prediger, S. (2004). Mathematiklernen in interkultureller Perspektive - Mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen. München: Profil Verlag.
- Siebel, F. (2005). Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Eine allgemein-mathematische Untersuchung, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühlthal.
- Selter, C. / Spiegel, H. (1997). Wie Kinder rechnen. Leipzig u.a.: Klett.
- Weinert, F. E. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft – Ansprüche an das Lernen in der Schule. In Pädagogische Nachrichten Rheinland-Pfalz 2.
- Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Grundschule. In Mathematica Didactica 5, 185-211.
- Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. In Journal für Mathematikdidaktik 4 (3), 75-204.
- Wollring, B. et al. (2003): Empfehlungen zur Aktualisierung der Lehrerbildung in Hessen. Wiesbaden: Hess. Kultusministerium / Ministerium für Wiss. und Kunst.