Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff

Dagmar Melzig
geboren in Bottrop
Geburtsname: Bertalan

Dissertation
zum Erwerb des Grades Dr. rer. nat.
vorgelegt bei der Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen
Oktober 2013

Erstgutachterin: Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker
Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen
Zweitgutachter: Prof. Dr. Heinz Steinbring
Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen

Datum der mündlichen Prüfung: 11.12.2013

Ich danke herzlich …

… **Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker.** Sie hat mich bereits im Studium für die Didaktik der Mathematik begeistert und im Anschluss daran ermutigt, bei ihr zu promovieren. Dafür bin ich ihr sehr dankbar, da ich als Doktorandin eine gute Zeit mit vielen neuen Erfahrungen, Herausforderungen und tollen Menschen hatte. Ich habe sehr viel von Frau Hefendehl über mathematikdidaktische Forschung und Lehre gelernt und danke ihr für die ausgezeichnete Betreuung meiner Arbeit.

… **Prof. Dr. Heinz Steinbring** für sein stetes Interesse an meiner Arbeit und für wertvolle Ratschläge und Rückmeldungen. Sein Ansatz der epistemologisch orientierten Interaktionsforschung hat meinen Blickwinkel auf mathematische Lernprozesse nachhaltig erweitert.

… **Dr. Tatjana Berlin und Prof. Dr. Astrid Fischer**. Unsere Arbeitssitzungen und informellen Gespräche haben mich immer sehr bereichert.

… **Dr. Christoph Ableitinger und Angela Herrmann** für die schöne gemeinsame „Essener Zeit“. In ihnen habe ich gute Freunde gewonnen.

… **Prof. Dr. Hans-Niels Jahnke.** Über sein Interesse am Fortgang meiner Arbeit habe ich mich immer sehr gefreut und die informellen Gespräche mit ihm über das Schreiben einer Dissertation als sehr hilfreich empfunden.

… **den ehemaligen und aktuellen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik in Essen** für ein angenehmes kollegiales Umfeld. Die Gelegenheit, mein Projekt im Rahmen des Forschungsseminars präsentieren und diskutieren zu können, habe ich sehr geschätzt.

... Prof. Dr. Guershon Harel für sein Interesse an meiner Arbeit und die Gelegenheit, mit ihm über das Wesen algebraischen Denkens diskutieren zu können.

... den Lehrpersonen und Schülerinnen und Schülern, die an meiner Studie teilgenommen haben. Ohne ihre Bereitschaft, sich auf das Projekt und die Video-Aufnahmen einzulassen, wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

... Gabriele Hahn für ihr offenes Ohr und ihre Hilfsbereitschaft in allen Fragen des Uni-Alltags und darüber hinaus.

... meiner Freundin Dr. des. Daniela Fleiß für den Austausch über die Herausforderungen des Promovierens und dafür, dass sie mich in der Abschlussphase immer wieder ermutigt hat.

... meinen Schwiegereltern, Ulrike und Ulrich Melzig, für wöchentliche Oma-Opa-Nachmittage und meinem Schwiegervater für das sehr sorgfältige Korrektur-Lesen meiner Arbeit.

... meinen Eltern, Gerda und Harald Bertalan, für ihr Vertrauen in mich, meinen eigenen Weg zu finden und ihre vielfältige Unterstützung, die sie mir auf diesem Weg haben zu Teil werden lassen.

... meinem Mann Jan dafür, dass er sich mit mir auf das Projekt „Dissertation“ eingelassen und mich dabei mit Rat und Tat unterstützt hat.

... meinem kleinen Sohn Leopold dafür, dass er mir mit wenig Geduld immer wieder sehr deutlich gemacht hat, dass es noch andere wichtige Dinge im Leben gibt.

Bottrop im Dezember 2013

Dagmar Melzig

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

> *„Algebraunterricht [setzt] häufig sehr unvermittelt ein, vor allem dann, wenn er lapidar Zahlen durch Variable ersetzt und mit diesen angeblich ‚wie mit Zahlen' nach den Grundgesetzen der Arithmetik operiert. Zugrunde liegt oft die trügerische Erwartung, die in Bezug auf das Ziffernrechnen erworbenen Formalisierungsfähigkeiten, die in den ersten vier Schuljahren sorgfältig aufgebaut werden, müssten ausreichen, um auch das Rechnen selbst unter formalen Aspekten betrachten zu können. Solche Transferhoffnungen sind inzwischen aus wissenschaftlicher Sicht in Zweifel gezogen (s. hierzu Bauersfeld 1983) und durch die alltägliche Erfahrung von Lehrkräften erschüttert worden. Es scheint so zu sein, dass zwischen dem (numerischen) Zahlenrechnen und dem Formelrechnen ein Sprung im Lernprozess liegt. Dafür spricht nicht nur die fachlich-epistemologische Analyse, sondern auch die empirische Realität.“*
>
> (Hefendehl-Hebeker 2001, S. 92 f.)

Im Zitat wird die Motivation von Frau Prof. Dr. Hefendehl-Hebeker zur Einrichtung einer Forschungsgruppe zum algebraischen Denken deutlich, der die Autorin der hiermit vorgelegten Dissertation angehört. Die Gruppe beschäftigt sich mit der folgenden grundsätzlichen Fragestellung: Gibt es Betätigungen, die den Übergang zwischen Arithmetik und Algebra erleichtern bzw. eine Brücke schlagen?

Forschungsergebnisse zeigen, dass der Umgang mit konkret-gegenständlichen Strukturen begriffliche Strukturen eines Lernenden stabilisieren kann, so dass komplexere Argumentationen ermöglicht werden (Hutchins 2005, S. 1560). Vor diesem Hintergrund entwickelte sich die Frage, inwiefern auch ein Einstieg in die Algebra von konkret-gegenständlichen Kontexten profitieren kann, obwohl der Erwerb der algebraischen Formelsprache ja letztendlich gerade von der Ablösung vom Konkreten / von Abstraktion geprägt ist.

Hefendehl-Hebeker (2001, S. 92) stellt hinsichtlich der Seinsweise algebraischer Formeln fest: „Zahldarstellungssysteme beschreiben und systematisieren ursprünglich Erfahrungen mit Gegenständen (z. B. Zählen und Bündeln), algebraische Formeln indessen beschreiben und systematisieren Erfahrungen mit Zahlen (z. B. Gesetze des Rechnens oder Verfahren zum Lösen von Gleichungen)“. Ein Einstieg in die elementare Algebra habe demnach in zwei Schritten zu erfolgen. Zuerst müssen den Lernenden Gelegenheiten geboten werden, Erfahrungen mit Zahlen zu sammeln, die dazu anregen, Muster und Strukturen zu erkennen und zu beschreiben (ebd.). Ein zweiter Schritt sollte diese „Erfahrungen behutsam reflektieren, ordnen, systematisieren, formalisieren und dabei in erforderlichem Maße neue gedankliche Objekte wie Variable konzipieren“ (ebd.).

Daher stellt sich hier die Frage, inwiefern die Arbeit in konkret-gegenständlichen Kontexten die Entwicklung des gedanklichen Objekts der Variablen (besonders) unterstützen kann, wenn diese Kontexte Strukturen besitzen, die auf einer Zahlenebene analysiert werden können.

Dieser Arbeit liegt eine Studie zu Grunde, in der eine Unterrichtsreihe im Sinne obiger Überlegungen konzipiert wurde (7. Klasse, Gymnasium). Die Unterrichtsreihe wurde nacheinander in drei Klassen durchgeführt. Dabei wurde die Arbeit je zweier Schülergruppen durch Video-Aufnahmen dokumentiert.

In dieser Unterrichtsreihe spielt die auf der folgenden Seite abgedruckte Aufgabe eine zentrale Rolle. Es handelt sich um eine leicht modifizierte Version der ersten Aufgabe der Lernumgebung *Knack die Box* aus dem *mathbu.ch 7* (Affolter et al. 2003, S. 32 f.). Jede Schülergruppe der Studie erhielt zur Bearbeitung der Aufgabe einige ganz weiße und einige mit einem schwarzen Punkt beklebte Streichholzschachteln sowie einen Vorrat an getrockneten weißen Bohnen.

Knack die Box

Legt mit Bohnen und leeren Boxen die beiden folgenden Anordnungen:

Anordnung A	Anordnung B
■■ • • • • • •	□□□ • • •

Nehmt Bohnen aus dem Bohnenvorrat und füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

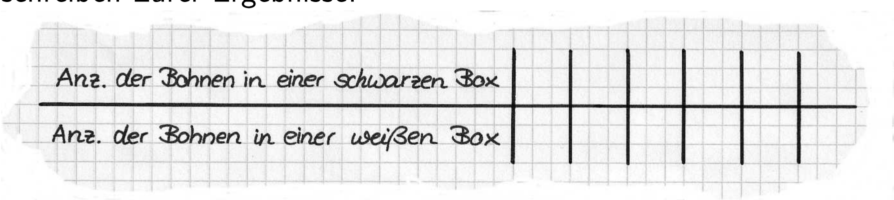
1. In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt).

2. In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen.

Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen?

Erfindet selbst solche Paare von Anordnungen! Versucht die Boxen so zu füllen, dass die beiden Bedingungen von oben erfüllt sind. Gibt es immer (mehrere) Möglichkeiten die Boxen entsprechend zu füllen?

Vielleicht helfen Euch Tabellen der folgenden Art beim übersichtlichen Aufschreiben Eurer Ergebnisse!



Die Aufgabe nutzt konkretes Material zur Darstellung einer Gleichung mit zwei Unbekannten. Die schwarzen und weißen Boxen sind im gegebenen Kontext Stellvertreter für ihre gesuchten, unbekannten Befüllungen mit Bohnen – also die Symbole für die Unbekannten in der materiell repräsentierten Gleichung. Die Bohnen werden als Zählobjekte verwendet.

Die beschriebene Eigenschaft des Stellvertreter-Seins befähigt die *materielle* Box zur Metapher für das *gedankliche* Objekt der Variablen zu werden, wenn es den Lernenden gelingt, die konkrete Boxensituation als Darstellung für ein abstrakteres Problem auf Zahlenebene zu erkennen. Aus diesem Grund können Schülerinnen und Schüler durch die Befassung mit den konkreten Boxen und Bohnen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff sammeln. Vor diesem Hintergrund soll der Titel der vorliegenden Arbeit verstanden werden: *Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff*.

In der vorliegenden Dissertation werden drei Episoden zur einführenden Aufgabenstellung von *Knack die Box* interpretativ analysiert. Dabei wird folgende zentrale Fragestellung verfolgt:

Wie entwickeln sich Vorläuferformen zum Variablenbegriff in einer Lernumgebung zur Einführung in die Algebra, die den Schülerinnen und Schülern Erfahrungen mit Zahlenbeziehungen in einem konkret-gegenständlichen Kontext ermöglicht?

Die Entwicklung soll in dieser Arbeit im Hinblick auf zwei Beobachtungsschwerpunkte betrachtet werden:

- *Die Rolle des Materials und die in der Auseinandersetzung mit dem Material vorgenommenen Deutungs- und Umdeutungsprozesse*,
- *Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander.*

Der zweite Beobachtungsschwerpunkt ergibt sich daraus, dass in dieser Studie Lernen als individuelle und aktive Konstruktion von Wissen in sozialer Interaktion aufgefasst wird.

Am Schluss dieser Arbeit wird die *Charakterisierung von Vorläuferformen algebraischen Denkens als flexible Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen*

- *in Übergängen von konkreten Handlungen zu flexiblen, mathematischen Operationen bzw.*
- *in Prozessen von Verallgemeinerung und Abstraktion*

unter Betrachtung ihrer Entwicklung in sozialer Interaktion stehen.

Vorschau

In Kapitel 1.1 wird erörtert, was in der vorliegenden Studie unter dem Begriff des *Algebraischen Denkens* verstanden werden soll. Dies wird auf die elementare Algebra beschränkt, da in dieser Arbeit ja ein *Einstieg* in die Algebra betrachtet wird. Es wird begründet, warum die Beherrschung der symbolischen Formelsprache als das *eine* Charakteristikum für algebraisches Denken abgelehnt wird, und eine genauere Betrachtung einer Reihe von allgemeinen, aber für die Algebra essentiellen, Denkhandlungen angestrebt werden sollte. Anschließend wird das Konzept der Variablen analysiert. Die Erörterungen des Kapitels stellen Begrifflichkeiten bereit, die im empirischen Teil der Arbeit für die Analyse der Lösungsprozesse der Schülerinnen und Schüler zu *Knack die Box* genutzt werden. Kapitel 1.2 ergänzt die theoretischen Überlegungen zum algebraischen Denken um einen kurzen Überblick über die Forschungslandschaft zum Thema sowie um ausgewählte empirische Befunde, die für die vorliegende Studie insofern interessant sind, als dass sie die Entwicklung algebraischen Denkens ausgehend von prä-algebraischen Artikulationen oder speziell aus einer epistemologischen Perspektive betrachten.

Kapitel 2 stellt Theorien über das Lernen vor, die die in der vorliegenden Studie eingenommenen Perspektiven auf Lernprozesse stützen. Zunächst geht es um Theorien, die eine erweiterte epistemologisch interaktionistische Sichtweise, die im Spannungsfeld von Inhalt, Individuum und Interaktion entfaltet wird, begründen (2.1). Hinzu kommen kognitionswissenschaftliche Theorien, die sich mit der Rolle der handelnden Auseinandersetzung Lernender mit ihrer Umwelt beschäftigen (2.2). Im dritten Unterkapitel wird über die Bedeutung von Gestik gesprochen. Dieser zusätzliche, spezielle Fokus hat sich erst im Laufe der Studie eingestellt. Erste Analysen zeigten, dass die auf das Material bezogene Gestik nicht nur Beiwerk ist, sondern eine sinnstiftende Rolle spielt. Die rein sprachlichen Anteile der Äußerungen waren zum Teil allein tatsächlich gar nicht deutbar. Die Begriffe und Theorien dieses Kapitels über das Lernen sind das zweite Standbein für die empirischen Analysen der Lösungsprozesse der Schülerinnen und Schüler zu *Knack die Box*.

Mit Hilfe der Hintergrundinformationen der ersten beiden Kapitel kann in Kapitel 3 das Forschungsanliegen konkretisiert und das Forschungsziel erläutert werden. Kapitel 4 stellt daraufhin dar, wie dieses Ziel erreicht werden soll. Dabei wird es darum gehen, die gewählten Verfahren zur Datenerhebung und zur Auswertung vorzustellen und zu begründen.

In Kapitel 5 wird zunächst ein Überblick über die gesamte Unterrichtsreihe gegeben, so dass die im Fokus dieser Arbeit stehende Aufgabe *Knack die Box* in deren Konzept verortet werden kann. Als sachliche Vorbereitung auf die empirische Studie wird dann eine A-priori-Analyse zu *Knack die Box* gegeben, bevor in den Kapiteln 6 bis 8 die interpretativen Analysen der Lösungs- und Umgangsweisen der Schülerinnen und Schüler mit der Aufgabe und dem Material folgen. Dort werden durch Interaktionsanalysen die Lösungsprozesse rekonstruiert und die zwei Beobachtungsschwerpunkte besonders erörtert: *Die Rolle des Materials* und *Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander*.

Es folgen zwei resümierende Kapitel. In den ersten drei Unterkapiteln von Kapitel 9 werden die Interpretationen der Fallbeispiele verglichen und die Ergebnisse der Analysen zu Antworten auf die Forschungsfragen zusammengefasst. Auf dieser Grundlage wird in Kapitel 9.4 als Antwort auf die zentrale Frage dieser Arbeit eine Charakterisierung von Vorläuferformen algebraischen Denkens als flexible Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen gegeben. Zu Beginn von Kapitel 10 werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit in Beziehung zu Resultaten der ausgewählten, empirischen Studien aus Kap. 1.2 gesetzt. Da die Erkenntnisse dieser Arbeit zunächst nur für *Knack die Box* gelten, werden sie in diesem Kapitel auch in Bezug auf den Würfelbauten-Kontext der Aufgabe *Stein auf Stein* diskutiert. Dieser soll als Beispiel für einen epistemologisch völlig anders beschaffenen konkret-gegenständlichen Kontext dienen, der auf einer Zahlenebene analysierbare Strukturen besitzt. Außerdem wird dargelegt, welche weiterführenden Fragen sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben.

Kapitel 1

Algebraisches Denken

„*What are the Essential Characteristics of Algebraic Thinking?* I tend to think this question has not yet been worked on enough, so it calls for too much speculation, though it‘s an excellent long-term research question. We‘ve seen that there is no consensus on the attempt to differentiate algebraic thinking from mathematical thinking in general, or on the attempt to reduce the essential content of algebraic thinking to a set of very elementary operations“ (Wheeler 1996, S. 322). Diese auf den Ergebnissen eines internationalen Kolloquiums zu Forschungsperspektiven zur Entstehung und Entwicklung des algebraischen Denkens (Montréal, 1993)[1] basierende Synthese wirkt ernüchternd, wenn man versucht den Forschungsgegenstand *Algebraisches Denken* für seine Dissertation zu definieren. Nichtsdestoweniger ist die persönliche Auseinandersetzung mit dieser Frage im Rahmen eines Forschungsprojektes zum Algebraischen Denken notwendig, auch wenn man damit rechnen muss, mit demselben Resultat zu enden wie Wheeler. In jedem Fall lässt sich auf diese Weise nämlich der eigene Standpunkt erarbeiten und darstellen. Da sich die vorliegende Studie mit einem Einstieg in die Schulalgebra beschäftigt, beschränkt sich die folgende Erörterung auf den Umgang mit der elementar-algebraischen Formelsprache.

[1]Das Kolloquium war Grundlage für die Entstehung des Buches *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (Bednarz, Kieran & Lee 1996).

1.1 Definitionsversuche und theoretische Erörterung

Damit das Mögliche entsteht,
muss immer wieder das Unmögliche versucht werden.
Hermann Hesse

„Algebraisches Denken beginnt nicht mit dem Umformungskalkül, sondern viel früher bei dem Verstehen arithmetischer Operationen und ihrer Wirkungen (Wittmann 1985), bei dem Beobachten von gemeinsamen Strukturen arithmetischer oder geometrischer Gebilde (Wittmann/Müller 2008, Berlin u. a. 2009) und bei der Erfindung arithmetisch-algebraischer Darstellungsweisen für diese Phänomene (Hefendehl-Hebeker 2001)“ (A. Fischer, Hefendehl-Hebeker & Prediger 2010, S. 2). Daher lohne es sich, die dafür **typische**n „**Denkhandlungen** gezielt wahrzunehmen und weiterzuentwickeln, um einen leichter zugänglichen und gleichzeitig fachlich gehaltvolleren Umgang mit der Algebra zu erreichen“ (ebd.; Fettdruck hinzugefügt). Inwiefern sich die vorliegende Studie dieser Devise verpflichtet fühlt, soll im Folgenden erarbeitet werden.

A. Fischer et al. (2010, S. 2) geben folgende Zusammenstellung allgemeiner Denkhandlungen an, die für die Algebra typisch sind:

Verallgemeinern	aus vielen einzelnen Fällen ein allgemeines Muster oder einen allgemeinen Zusammenhang herleiten – das allen Gemeinsame erfassen
Abstrahieren	weglassen bestimmter Merkmale zur Hervorhebung anderer Eigenschaften (die meist von allgemeinerem Interesse sind)
Strukturieren	eine Struktur (lat. Bauart), d. h. eine Ordnung, in etwas hineinsehen oder schaffen; etwas gliedern
Darstellen	Situationen, Muster, Zusammenhänge mit spezifischen Darstellungsmitteln erfassen/beschreiben
Konstruieren	etwas Neues erzeugen aus Bestehendem
Deuten und Umdeuten	in einer Darstellung Bedeutungen erkennen und zwischen Bedeutungen wechseln

Auch im eingangs erwähnten Kolloquium (s. S. 7) wurde eine Liste solcher Denkhandlungen diskutiert – allerdings unter der kontroversen Fragestellung, ob man mittels einer solchen Liste den Forschungsgegenstand des algebraischen Denkens definieren könne. „One can take the line, as Mason does, that these basic operations are, indeed, truly algebraic, and together constitute algebraic thinking, in spite of the absence of mathematical-looking symbols. This then implies that, yes, biology and most other intellectual endeavors rest on a foundation of mental activity that is algebraic in character, just as mathematics itself does“ (Wheeler 1996, S. 319). Im Wikipedia-Eintrag zum Stichwort Biologie kann man nämlich z. B. nachlesen: Die Biologie „befasst sich mit allgemeinen Gesetzmäßigkeiten des Lebendigen, aber auch mit den speziellen Besonderheiten der Lebewesen, ihrem Aufbau, ihrer Organisation und Entwicklung sowie ihren vielfältigen Strukturen und Prozessen“ (http://de.wikipedia.org/wiki/Biologie, zuletzt aufgerufen am 14.07.2012). Die für die Algebra genannten Denkhandlungen spielen also auch hier eine fundamentale Rolle. Wheeler (1996, S. 319) schreibt weiter: „The other line acknowledges the fundamental importance of these very general mental operations, but won‘t allow itself to call them algebra until they have been clothed in an appropriate symbolic form. One option doesn‘t seem necessarily any more ‘correct’ than the other: Both positions are tenable. But there can be some confusion if people don‘t clearly announce their choice“.

In der Weise, in der beide Optionen für Wheeler gleichermaßen als tragfähig erscheinen, lassen sich für beide Varianten auch Probleme aufzeigen. So kann man mit Recht die Liste der typischen Handlungen als unzulänglich erachten, solange sie in gleicher Weise für Algebra wie für Mathematik allgemein oder sogar für Biologie zutrifft, weil ihr dann ein die Algebra heraushebendes Spezifikum fehlt. Die Betonung symbolischer Darstellungen stellt aber ebenfalls einen zu einfachen Ausweg dar. Sie ignoriert beispielsweise allgemeine *verbale* Beschreibungen arithmetischer Beziehungen und hebt daher die symbolische Form als die *eine* charakteristische Eigenschaft hervor. Demgegenüber betonen andere Autoren (s. z. B. Mason, Graham und Johnston-Wilder (2005, S. 66), Radford (2010, S. XXXV f.)), dass solche verbalen Beschreibungen bereits einen wesentlichen Teil von Algebra beinhalten und daher nicht ausgeschlossen werden sollten. Außerdem hilft die Betonung symbolischer Darstellungen nicht bei der Unterscheidung von algebraischem und mathematischem Denken, da symbolische Darstellungen in allen mathematischen Kontexten genutzt werden.

Besteht aber zunächst Übereinkunft darüber, dass es für das algebraische Denken grundlegende Denkhandlungen gibt – auch wenn diese den Gegenstand allein nicht definieren, so können sie doch als Basis für weitere Überlegungen dienen. Ein Weg zu einer besseren Charakterisierung algebraischen Denkens könnte es sein, die bereichsspezifische Verwendung der grundlegenden Denkhandlungen genauer zu fassen. Es ist eine *genauere* Betrachtung notwendig, die jedoch nicht einschränkend wirkt, so wie die alleinige Heraushebung der symbolischen Darstellung. Bei diesem Vorhaben könnte die theoretische Perspektive der *DNR-based instruction* auf Mathematik weiterhelfen (nach Harel 2008a, 2008b). In der Sprache der DNR-Theorie[2] werden die oben zitierten Denkhandlungen als *mental acts* bezeichnet. „Mathematicians ... practice mathematics by carrying out *mental acts* with particular characteristics – *ways of thinking* – to produce particular constructs – *ways of understanding*“ (Harel 2008a, S. 490; Hervorhebungen hinzugefügt). Harel entwickelt die Triade aus *mental acts*, *ways of thinking* und *ways of understanding* anhand des Beweisens: der fertige Beweis ist das Produkt der Denkhandlung des Beweisens, also der zum *mental act* ‚Beweisen‘ gehörende *way of understanding* (ebd., S. 489 f.). „Repeated observations of one's ways of understanding may reveal that they share a common cognitive characteristic. Such a characteristic is referred to as a *way of thinking* associated with that mental act“ (ebd., S. 490). Betrachtet man also z. B. verschiedene Beweise eines Lernenden, so lässt sich feststellen, ob er beim Beweisen beispielsweise empirisch oder deduktiv vorgeht – also wie sein Beweisen charakterisiert werden kann. Die *ways of thinking* beim Beweisen nennt Harel ‚proof schemes‘ (ebd.).

[2]„The initials *D, N* and *R* stand for three foundational instructional principles in the framework: *duality, necessity* and *repeated reasoning*“ (Harel 2008a, S. 487). Sie werden in Harel (2008b, S. 898 ff.) erörtert.

Da Mathematik als Vereinigung aller „institutionalized ways of understanding in mathematics throughout history“ (Harel 2008a, S. 490) und aller „ways of thinking that are characteristics of the mental acts whose products comprise the first set“ (ebd.) gesehen wird, und Algebra ein spezielles Teilgebiet der Mathematik ist, muss etwas fehlen, wenn algebraisches Denken nur durch Denkhandlungen (mental acts) charakterisiert wird (s. o.). Harel (2008b, S. 896) zeigt nun einen Weg auf, wie man zu einer besseren Charakterisierung gelangen könnte: „. . . each mathematical content area is characterized by a unique set of ways of thinking (and ways of understanding obviously)“. Das Auffinden der für die (Schul-)Algebra charakteristischen *ways of thinking* könnte also helfen, algebraisches Denken besser zu beschreiben.

In Harels Texten werden bereits zwei der für die (Schul-)Algebra charakteristischen *ways of thinking* benannt: **algebraic invariance** und **algebraic representation approach**.

- „*Algebraic invariance* refers to the way of thinking by which one recognizes that algebraic expressions are manipulated not haphazardly but with the purpose of arriving at a desired form and maintaining certain properties of the expression invariant“ (Harel 2008c, S. 279). Zu *algebraic invariance* an anderer Stelle: „This way of thinking – which is one characteristic of algebraic reasoning – was known among the teachers as the changing-the-form-without-changing-the-value habit of mind“ (Harel 2008b, S. 904).
- „We refer to the problem-solving approach of representing a given problem algebraically and applying known procedures to the algebraic representation (such as ‘elimination of variables’ to solve systems of equations) in order to obtain a solution to the problem as the *algebraic representation approach*. Clearly, representing *all* the problem conditions algebraically is an essential ingredient of this approach“ (Harel 2010, S. 360). Zum *algebraic representation approach* gehört es auch, im Lösungsprozess vorzugeben, die Lösung bereits zu kennen, und so die Unbekannte als Zahl zu behandeln.

Algebraic invariance und *algebraic representation approach* sind die algebraischen Charakteristika der Denkhandlungen *Symbolisches Manipulieren* und *Darstellen*. Guershon Harel, Lisa Hefendehl-Hebeker, Astrid Fischer und die Autorin der vorliegenden Arbeit haben im August 2008 in einer gemeinsamen Arbeitssitzung begonnen, für weitere Denkhandlungen, die für die Algebra eine zentrale Rolle spielen (s. z. B. obige Liste), die zugehörigen *ways of thinking* theoretisch zu erarbeiten. Dabei konnten wir für die Denkhandlung *Konstruieren* herausstellen, dass es für die Algebra charakteristisch ist, neue Objekte so zu konstruieren, dass sie schon vorhandenen Regeln genügen. Damit kann das Bestreben, bestehende Regeln weiter beibehalten zu können, als für die Algebra charakteristischer *way of thinking* angesehen werden. Für die Denkhandlung *Strukturieren* konnten wir als für die Algebra typischen *way of thinking* erarbeiten, Prozesse gedanklich zu durchlaufen, ohne sie tatsächlich auszuführen bzw. algebraische Terme operativ zu strukturieren.

Man findet eine interessante Parallele zu den bereits von Harel aufgeführten für die Algebra charakteristischen *ways of thinking* (*algebraic invariance* und *algebraic representation approach*) in Kierans Suche nach dem Herzstück der Algebra (Kieran 2004). Sie führt eine Erhebung von Lesley Lee zur Frage „Was ist Algebra?“ an (Lee 1997), in der sich die Auffassung, dass Algebra eine Aktivität sei, gegenüber allen anderen Aussagen (z. B. Algebra ist eine Sprache / Kultur / ein Schulfach / verallgemeinerte Arithmetik) durchsetzte. Darauf aufbauend nähert sich Kieran der Frage nach dem Herzstück der Algebra mit Hilfe eines Modells zur Klassifikation von (schul-)algebraischen Aktivitäten. Sie unterscheidet *generational*, *transformational* und *global/meta-level activities* (Kieran 2004, S. 22). Unter *generational activities* versteht sie solche Aktivitäten, die sich mit der algebraischen Darstellung und Interpretation von Mustern, Zusammenhängen, Problemstellungen usw. beschäftigen (ebd., S. 23). Zu den *transformational activities* schreibt sie: „A great deal of this type of activity is concerned with changing the form of an expression or equation in order to maintain equivalence“ (ebd., S. 24). In Harels Terminologie könnte man sagen, dass unter *generational activities* diejenigen *mental acts* (Denkhandlungen) verstanden werden sollen, die durch den *algebraic representation approach* charakterisiert werden. *Transformational activities* umfassen in diesem Sinne dann dagegen diejenigen Denkhandlungen, die durch den *way of thinking* der *algebraic invariance* charakterisiert sind. Damit heben Kieran und Harel auf ihre Weise die gleichen Charakteristika algebraischen Denkens hervor. Die dritte Klasse von algebraischen Aktivitäten, die Kieran nennt (global/meta-level activities), ist nicht nur dem Namen nach sehr umfassend. Sie schreibt dazu: „These are the activities for which algebra is used as a tool but which are not exclusive to algebra. They include problem solving, modelling, noticing structure, studying change, generalising, analysing relationships, justifying, proving, and predicting – activities that could be engaged in without using any algebra at all" (Kieran 2004, S. 24). Damit kommen wir wieder zum Anfang unserer Überlegungen zurück: zu einer Liste, die der obigen ähnelt, und zum gleichen Vorbehalt ihr gegenüber, dass die aufgeführten Denkhandlungen auch ohne Algebra ausgeführt werden könnten. Aber Kieran positioniert sich in diesem Spannungsfeld sehr deutlich: „attempting to divorce these meta-level activities from algebra removes any context or need that one might have for using algebra" (ebd.). Dies steht in Einklang mit der eingangs zitierten Forderung, „diese Denkhandlungen gezielt wahrzunehmen und weiterzuentwickeln" (A. Fischer et al. 2010, S. 2).

In diesem Sinne soll in den empirischen Analysen der vorliegenden Studie ebenfalls die Relevanz auch allgemeiner Denkhandlungen für das algebraische Denken Beachtung finden. Ich werde dazu obige Zusammenstellung der für die Algebra typischen allgemeinen Denkhandlungen (s. S. 8) nach A. Fischer et al. (2010, S. 2) verwenden (s. auch Kap. 4.3 – Auswertungsmethoden).

Variable

Wendet man sich dem für das algebraische Denken zentralen Konzept der Variablen zu, so fällt die Literaturrecherche bezüglich einer Definition des Begriffs nicht weniger ernüchternd aus: „*Was sind Variable?* Ich glaube, daß diese Frage niemand zufriedenstellend beantworten kann, weil der Variablenbegriff zu schillernd und aspektreich ist. In der mathematischen Literatur werden Variable meist nur *verwendet* und nicht *definiert*. Wo eine Definition versucht wird, werden im allgemeinen in einseitiger Weise nur einige Aspekte des Variablenbegriffs hervorgehoben (eine Zusammenstellung einiger solcher ‚Definitionen' findet man in SCHOENFELD/ARCAVI 1988)" (Malle 1993, S. 44). Aber auch hier gilt: die persönliche Auseinandersetzung mit dem Konzept und auch mit der Problematik der Definition ist für ein Forschungsprojekt zur elementaren Algebra unerlässlich. Im Folgenden nähere ich mich dem Begriff der Variablen daher von verschiedenen Seiten aus an: zunächst gehe ich der Frage nach, warum der Begriff der Variablen (im Hinblick auf eine Definition) so unzugänglich ist. Außerdem wird erörtert, welche Verwendungen für Variable in der Mathematik existieren, und es wird dargestellt, wie sich das Konzept der Variablen ausbilden kann.

Um der Problematik der Definition des Variablenbegriffs nachzugehen, wähle ich Cassirers Überlegungen zur Theorie der Begriffsbildung, die sich kritisch mit der traditionellen Theorie von Abstraktion auseinandersetzen (Cassirer 1910/1980, S. 3-34). Werde die Einteilung von Gegenständen bzw. Sachverhalten in Gattungen mittels traditioneller Abstraktion vollzogen – also dadurch, dass die Objekte in bestimmter Hinsicht als gleich betrachtet werden, wobei von unwesentlich erachteten Merkmalen abgesehen wird, und die als wesentlich erachteten Merkmale dagegen hervorgehoben werden, so würden „schließlich die allgemeinsten Begriffe, zu denen wir gelangen können, keinerlei auszeichnende Eigentümlichkeit und Bestimmtheit mehr besitzen. Die ‚Begriffspyramide', die wir kraft dieses Verfahrens aufbauen, endet nach oben hin in der abstrakten Vorstellung des ‚Etwas', einer Vorstellung, die eben in ihrem allumfassenden Sein, kraft dessen jeglicher beliebige Denkinhalt unter sie fällt, zugleich von jeder spezifischen Bedeutung gänzlich entleert ist" (Cassirer 1910/1980, S. 7). Folgt man Cassirers Einwand, so scheint als Grund für die Unzugänglichkeit des Variablenbegriffs denkbar, dass er weit oben in der Begriffspyramide steht und dort nur noch wenig Eigentümliches besitzt. Whitehead schreibt zum Variablenbegriff: „The one essential requisite for a symbol in … [the mathematician's] eyes is that whatever its possible varieties of meaning, the formal laws for its use shall always be the same“ (Whitehead 1911)[3]. Vielleicht ist es dies, was noch an Eigentümlichkeit und Gemeinsamem der unterschiedlichen Ausprägungen übrig geblieben ist. Den Variablenbegriff erklärend wirkt diese Auffassung allerdings nicht. Um ihn mit mehr Inhalt zu füllen, müsste man die Pyramide wieder hinabsteigen und könnte lediglich einige Aspekte des Begriffs hervorheben. Dies entspricht der Beschreibung der Definitionsversuche in dem meine Überlegungen zum Variablenbegriff einleitenden Zitat von Malle (1993, S. 44). Cassirer (1910/1980, S. 25) merkt an, dass es schwierig bzw. unmöglich ist, aus einem durch bloße Weglassung von Merkmalen entstandenen Begriff wieder seine spezifischen Typen zu rekonstruieren: „denn beim Abstrahieren hat er [der Philosoph] alle Sondermerkmale derart fortgelassen, daß er sie nicht mehr wiederzufinden und noch weniger die Abwechslungen, derer sie fähig sind, genau abzuzählen vermag“ (ebd.). Er führt aus, dass im Zuge der Abstraktion die festen Eigenschaften durch allgemeine Regeln ersetzt werden müssten, „die uns eine Gesamtreihe möglicher Bestimmungen mit einem Blick überschauen lassen. Diese Verwandlung, diese Umsetzung in eine neue Form des logischen ‚Seins‘ bildet die eigentlich positive Leistung der Abstraktion. Wir gehen von einer Reihe $\mathrm{a}\alpha_1\beta_1$, $\mathrm{a}\alpha_2\beta_2$, $\mathrm{a}\alpha_3\beta_3$ ... nicht unmittelbar zu ihrem gemeinsamen Bestandteil a über, sondern denken uns das Ganze der Einzelglieder α durch einen veränderlichen Ausdruck x, das Ganze der Glieder β durch einen veränderlichen Ausdruck y gegeben. Auf diese Weise fassen wir das Gesamtsystem in einem Ausdruck axy ... zusammen, der durch stetige Abwandlung in die konkrete Allheit der Reihenglieder übergeführt werden kann und uns daher den Aufbau und die logische Gliederung des Inbegriffs vollgültig darstellt“ (Cassirer 1910/1980, S. 29). In Bezug auf den hier diskutierten Variablenbegriff interpretiere ich Cassirers Forderung so: im abstrakten Variablenbegriff müssen seine speziellen Aspekte mitgedacht werden. Anders gesagt: eine Variable ist jede ihrer möglichen Verwendungen sowie die Gesamtheit aller ihrer möglichen Verwendungen. Für den Lernprozess heißt das, dass Schüler zunächst die verschiedenen Ausprägungen kennenlernen müssen, um sie dann schließlich für sich unter dem allgemeinen abstrakten Konzept der Variablen zu

[3]zitiert nach Schoenfeld und Arcavi (1988, S. 424)

vereinen. Das Mitdenken der speziellen Aspekte im abstrakten Begriff bedeutet nicht, dass alle Ausprägungen ständig präsent sein müssen. Hat ein Lernender das abstrakte Konzept der Variablen verinnerlicht, so kann er sich durchaus auf der Ebene des Symbolischen bewegen. Es bleibt aber die grundlegende Überzeugung (die nicht in jedem Moment bewusst sein muss), dass es verschiedene Ausprägungen gibt, in deren Richtung die Symbole interpretierbar sind (vgl. Cassirer 1910/1980, S. 28). Für den Versuch der Definition des Variablenbegriffs bedeutet obiges Fazit, dass also tatsächlich nicht gesagt werden kann, *was* eine Variable ist, sondern lediglich ihre Verwendungsweisen beschrieben werden können (vgl. wiederum Eingangszitat von Malle (1993, S. 44)).

In diesem Sinne wird im Folgenden eine Erläuterung des Variablenbegriffs aus einem Lexikon für Philosophie und Wissenschaftstheorie in reduzierter Form wiedergegeben, die bei der Verwendung ansetzt (Thiel 1996, S. 473 ff.)[4]. Der Begriff *Variable* bezeichne in Mathematik und Logik sowie bei der Darstellung formaler und halbformaler Sprachen demnach *Buchstaben*, die einem der folgenden *Zwecke* dienen:

1. „Dem Zweck der *Stellvertretung für bedeutungsvolle Ausdrücke* … im Hinblick auf *formale Operationen* mit diesen. … Dabei markieren die Variablen diejenigen Stellen (die sonst ‚Leerstellen' wären), an denen … Ersetzungen bzw. Einsetzungen vorgenommen werden können; Variablen haben also keine eigene Referenz, sondern sind lediglich ‚Platzhalter'" (ebd., S. 473). In der Elementarmathematik sind sie stets Platzhalter für Zahlen und kommen dort unter zwei Aspekten vor: Variable als
   - „‚Unbestimmte', wie z. B. t in der Angabe eines Polynoms $t^3 + 3t^2 + t$ (das bei Einsetzung verschiedener Zahlzeichen für t im allgemeinen verschiedenen numerische Werte annimmt)" (ebd.),
   - „‚Unbekannte' bei der Auflösung einer Gleichung, wie z. B. $x^3 - 3x = 4x2 + 5x - 24$ (die bei Einsetzung einer ‚Lösung' für x in eine wahre numerische Gleichheitsaussage übergeht …)" (ebd.).

[4]die im Lexikon abgekürzten Worte werden hier ausgeschrieben, Querverweise des Lexikons ausgespart, Kursiv- und Fettdruck zum Teil hinzugefügt

2. „Dem Zweck der *Stellvertretung für bedeutungsvolle Zeichenreihen* zum Ausdruck der *Allgemeingültigkeit von Aussageschemata* (‚Gesetzen'), z. B. des arithmetischen Aussageschemas $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$" (ebd.).
3. Dem Zweck der *Stellvertretung für bedeutungsvolle Zeichenreihen* „zum Ausdruck von *funktionalen Zusammenhängen* wie in $y = x^2 + 5x + 2$ oder $y = \sin x$. Dabei wird das Argument x häufig als ‚**unabhängige**', y als ‚**abhängige**' **Variable** bezeichnet, da in dem durch die Schreibweise $y = f(x)$ signalisierten Kontext der Wert von y in Abhängigkeit von der zuvor getroffenen Wahl von x bestimmt wird" (ebd.).

Variable, die eine der genannten Aufgaben erfüllen, werden als **freie Variable** bezeichnet, „weil sie als Bestandteile der komplexen Ausdrücke, in denen sie diese Aufgabe wahrnehmen, ‚frei' im Sinne der Ersetzbarkeit durch Ausdrücke aus ihrem Variabilitätsbereich sind" (ebd., S. 474). Demgegenüber gibt es auch noch **gebundene Variable**, die dem „Zweck der *Querverweisung und Querverbindung zwischen verschiedenen Stellen in komplexen Ausdrücken*" (ebd., S. 473) dienen. „Querverweisungen der ... genannten Art sind aus der Mathematik durch die Intergralschreibweise $\int_a^b f(x)dx$ bekannt, wo x als gebundene Variable fungiert, für die keine Einsetzungen erlaubt sind" (ebd., S. 474).

Diese vielschichtige Verwendung macht die Variable für Lernende zu einem vielgestaltigen Objekt. Diese Vielgestaltigkeit wird auch in der mathematikdidaktischen Literatur verhandelt. In der vorliegenden Studie soll die Unterscheidung möglicher Variablenrollen nach Drijvers (2003) verwendet werden[5]. Diese wird im Folgenden vorgestellt und sowohl mit den in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik vielfach zitierten Aspekten nach Malle (1993) verglichen als auch in Bezug zum oben zitierten Lexikoneintrag gesetzt. Drijvers (2003, S. 66) unterscheidet Variable als Platzhalter, verän-

[5]Drijvers beschäftigt sich in seiner Studie eigentlich mit Parametern. Er erörtert zunächst die Rollen, die „einfache" Variable einnehmen können und formuliert diese zu einer Kategorisierung von Parameterrollen aus. Die vorliegende Studie greift nur die auch für „einfache" Variable zutreffenden Beschreibungen auf.

derliche Größe, generalisierte Zahl, gesuchte Unbekannte und als Symbol[6].

- Die Rolle als **Platzhalter** entspricht dem *Einsetzungsaspekt* bei Malle (1993): die Variable erscheint hier als „Leerstelle, in die man Zahlen (genauer: Zahlnamen) einsetzen darf“ (ebd., S. 46). In dieser Rolle kommt die Variable dem *Zweck der Stellvertretung für bedeutungsvolle Ausdrücke im Hinblick auf formale Operationen mit diesen* (s. o.) nach, wobei davon besonders die platzhaltende Eigenschaft der Variablen betont wird.
- Die **veränderliche Größe** bei Drijvers (2003, S. 66) und der *Veränderlichenaspekt* bei Malle (1993, S. 80) spiegeln eine funktionale Betrachtung der Variablen wieder. „Algebra, then, is a means to formulate and investigate relations between variables. This involves covariance and dynamics: how does a change in one variable affect the other?“ (Drijvers 2003, S. 40). Malle (1993, S. 80) führt aus, dass beim Veränderlichenaspekt alle Zahlen aus dem betrachteten Bereich in zeitlicher Abfolge repräsentiert würden, wobei der Bereich in einer bestimmten Weise durchlaufen würde. In dieser Rolle erfüllt die Variable den *Zweck der Stellvertretung für bedeutungsvolle Zeichenreihen zum Ausdruck von funktionalen Zusammenhängen* (s. o.).
- Zur Variablen als **generalisierte Zahl** bei Drijvers gibt es meines Erachtens nach kein so klares Pendant bei Malle: die Variable in der Rolle der generalisierten Zahl deckt den *Gegenstandsaspekt*, den *Einzelzahlaspekt* sowie den *Simultanaspekt* bei Malle ab. Die Variable als generalisierte Zahl „is no longer a specific number, but stands for an exemplary number or a set of numbers. The generic representation allows for seeing the general in the particular“ (Drijvers 2003, S. 69). Hierbei beschreibt *stands for an exemplary number* Malles Einzelzahlaspekt („Variable als beliebige, aber feste Zahl“ (Malle 1993, S. 80)) und *stands for a set of numbers* den Simultanaspekt („Alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden gleichzeitig repräsentiert“ (ebd.)). Unter dem Gegenstandsaspekt begreift Malle eine Variable, wenn sie „als

[6]Es werden durch den Autor selbst vorgenommene Übersetzungen ins Deutsche verwendet (Drijvers 2006).

unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl (allgemeiner als unbekannter oder nicht näher bestimmter Denkgegenstand)“ (Malle 1993, S. 46) auftritt. Diese Beschreibung ist für die generalisierte Zahl bei Drijvers ebenfalls zutreffend: die Variable wird in dieser Rolle zum Generalisierer, mit dessen Hilfe sich allgemeingültige Aussagen machen lassen, ohne Bezug auf konkrete Fälle nehmen zu müssen.[7]

Die Variable als generalisierte Zahl hat zwei Verwendungsweisen im Sinne von Thiel (1996) (s. o.): die Variable als *Unbestimmte (zum Zweck der Stellvertretung für bedeutungsvolle Ausdrücke im Hinblick auf formale Operationen mit diesen)* und die Verwendung zum *Zweck der Stellvertretung für bedeutungsvolle Zeichenreihen zum Ausdruck der Allgemeingültigkeit von Gesetzen.*

- Die Rolle des bloßen **Symbol**s bei Drijvers (2003, S. 40) und der *Kalkülaspekt* bei Malle (1993, S. 46) sehen die „Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf“ (ebd.). Hier erfüllt die Variable am ehesten den *Zweck der Stellvertretung für bedeutungsvolle Ausdrücke im Hinblick auf formale Operationen mit diesen*, wobei die Möglichkeit des formalen Operierens betont wird, die stellvertretende Funktion hingegen eher aus dem Fokus gerückt wird.
- Drijvers sieht in einer Variablen eine **gesuchte Unbekannte**, wenn sie in einer Gleichung auftritt und man sich die Frage stellt: „what value(s) of the variable ... fulfil(s) the required conditions“ (Drijvers

[7] Malle (1993, S. 83) diskutiert, ob Einzelzahlaspekt und die beiden Bereichsaspekte Simultan- und Veränderlichenaspekt als Unteraspekte des Gegenstandsaspektes angesehen werden sollten. Er stellt heraus, dass es beim Simultanaspekt und insbesondere beim Veränderlichenaspekt schwierig sei, sie als Denkgegenstände zu begreifen, da sie ganze Bereiche von Zahlen umfassen, und beim Veränderlichenaspekt auch noch die Variation über diesem Bereich im Mittelpunkt der Betrachtung steht. Er führt aus, dass es schwierig sei, „sich vorzustellen, daß x *jede* Zahl aus einem bestimmten Bereich *ist*“ (ebd.) – gleichzeitig (beim Simultanaspekt) oder noch problematischer fortlaufend (beim Veränderlichenaspekt). Daher lässt er offen, ob die Bereichsaspekte als Unterformen des Gegenstandsaspektes angesehen werden sollten oder nicht. Der hier angestellte Vergleich mit den Variablenrollen nach Drijvers spricht jedoch dafür, Einzelzahl- und Simultanaspekt als Unteraspekte des Gegenstandsaspektes zu verstehen, während der Veränderlichenaspekt auch bei Drijvers in Form der veränderlichen Größe eine Sonderrolle einnimmt (s. o.).

2003, S. 40). Während unter Drijvers' Begriff der generalisierten Zahl mehrere Aspekte nach Malle subsummiert werden konnten, findet man zur Rolle der Variablen als gesuchte Unbekannte gar keine Entsprechung bei Malle. Malle (1993, S. 49ff.) betrachtet den *Prozess* des Lösens von Gleichungen und erörtert, dass dieser kalkülhaft vollzogen werden kann (Betonung des Kalkülaspekts der Variablen), aber auch auf inhaltlichen Überlegungen basieren (Betonung des Gegenstandsaspekts der Variablen) oder den Einsetzungsaspekt der Variablen betonen kann.
Die Verwendung der Variablen als gesuchte Unbekannte war auch schon bei Thiel (1996) präsent (als Unterpunkt zur Verwendung zum *Zweck der Stellvertretung für bedeutungsvolle Ausdrücke im Hinblick auf formale Operationen mit diesen*).

Bis jetzt wurde der Variablenbegriff hauptsächlich aus der Sicht des bereits fertigen Konzeptes betrachtet. Lediglich bei den Ausführungen bezüglich Cassirer ist auch die Begriffsgenese bereits angeklungen. Diese soll nun noch aus kognitionswissenschaftlicher Sicht näher betrachtet werden.

„One of the principal results in cognitive science is that abstract concepts are typically understood, via metaphor, in terms of more concrete concepts" (Lakoff & Núñez 2000, S. 39). Eine kognitionswissenschaftliche Herangehensweise an die Frage nach der Ausbildung des abstrakten Begriffes der *Variablen* sucht also nach konkreteren Ideen, die metaphorisch gedacht den Weg zur Variablen bahnen. In einem Lexikon lässt sich unter dem Stichwort *Metapher* nachlesen: „... im weiteren Sinne eine Redewendung, in der statt der eigentlichen Bezeichnung eine uneigentliche oder übertragene gebraucht wird. Unterabteilungen sind Metonymie und Synekdoche sowie die **Metapher** im engeren Sinne, bei der zwischen dem eigentlichen und dem übertragenen Ausdruck eine Ähnlichkeit ... besteht, z. B. ‚Hafen' statt ‚Zuflucht', ‚kalt' statt ‚gefühllos'. ..." (dtv-Lexikon 1997, S. 70; die im Lexikon abgekürzten Worte wurden hier ausgeschrieben, Querverweise des Lexikons ausgespart, Fettdruck hinzugefügt). Während die Metapher hier also als rein sprachliches Mittel dargestellt wird, sehen Lakoff und Núñez (2000, S. 39) sie – wie im obigen Zitat deutlich wurde – als wesentliche *Denk*figur an.

Lakoff und Núñez (2000, S. 74f.) führen als grundlegend für die Algebra die Rolle-für-Individuum-**Metonymie** an. Sie erklären diese Metonymie mit Hilfe der folgenden Aufforderung aus dem Alltag: „Wenn der Pizzalieferant kommt, gib ihm ein gutes Trinkgeld“. Obwohl der Sprechende (vermutlich) nicht weiß, wer die Pizza bringen wird, kann er mit Hilfe des Wortes ‚Pizzalieferant‘ auf die spezielle Person, die kommen wird, verweisen – wer immer sie ist. Die Rolle des Pizzalieferanten wird metonymisch für eine spezielle Person, die das Trinkgeld tatsächlich erhalten wird, verwendet. Die Metonymie bringt „das eigentlich Gemeinte durch einen anderen Begriff zum Ausdruck . . . , der aber (im Gegensatz zur Metapher[8]) eine offensichtlich reale Beziehung dazu hat . . . “ (Bertelsmann Lexikon 1973, S. 356; die im Lexikon abgekürzten Worte wurden hier ausgeschrieben, die Fußnote hinzugefügt). Nach Lakoff und Núñez (2000, S. 74) ist es die Rolle-für-Individuum-Metonymie, die es erlaubt, von einem auf der Ebene der konkreten Zahlen agierenden arithmetischen Denken zum algebraischen Denken weiterzugehen. „It is this metonymic mechanism that makes the discipline of algebra possible, by allowing us to reason about numbers or other entities without knowing which particular entities we are talking about“ (ebd., S. 75). Als Beispiel geben Lakoff und Núñez (2000, S. 74) die Gleichung $2 + x = 7$ an: das x stehe für eine Rolle und die Gleichung besage ‚Welche Zahl auch immer x ist, die Addition von 2 ergibt 7‘.

Die Rolle-für-Individuum-Metonymie greift für symbolische Ausdrücke, sie tritt aber auch in umgangssprachlich formulierten mathematischen Aussagen auf. Letztere Variante wird in der mathematikdidaktischen Literatur unter dem Begriff **Wortvariable** besprochen. Dabei wird zunächst betont, dass Variable keine Erfindung der Mathematik seien, sondern auch in der Umgangssprache Ausdrücke als Variable verwendet würden (vgl. R. Fischer & Malle 1985, S. 40), wozu Beispiele wie die Pizzalieferanten-Trinkgeld-Aufforderung von oben angeführt werden. ‚Der Pizzalieferant‘ ist in die-

[8] hier und im folgenden Text im engeren Sinne der obigen Lexikondefinition gemeint

sem Sinne dann eine Wortvariable der Umgangssprache. Andererseits wird ausgeführt, dass Wortvariable in der historischen Entwicklung des heutigen Variablenbegriffs eine entscheidende Rolle spielten (ebd.). Sie traten in der sogenannten rhetorischen Phase auf: „'Rhetorical algebra' belongs to a period before Diophantus (circa 250 AD) when all arguments were written in longhand and no symbols were available to represent 'unknowns'" (Harper 1987, S. 77). Die Phase nach Diophant wird als synkopierte Algebra bezeichnet, in welcher bereits einzelne Buchstaben zur Darstellung von Unbekannten verwendet wurden, aber noch nicht mit dem Ziel Allgemeinheit auszudrücken: „the algebraist's concern was exclusively that of discovering the true identity of the letter(s)" (ebd.). Vieta läutete Ende des 16. Jahrhunderts mit der Verwendung von Buchstaben auch für gegebene Größen schließlich die dritte und letzte Phase ein: die symbolische Algebra (ebd., S. 78). Unser heutiger mathematischer Variablenbegriff, der daraus entstand, zeichnet sich gegenüber Wortvariablen „durch größere Explizitheit, Formalisierung, Kontextfreiheit und systematischere Verwendung aus" (Mormann 1981, S. 71). Diese die algebraische Formelsprache als mächtiges Werkzeug auszeichnenden Aspekte stellen gleichermaßen aber auch ihren Pferdefuß dar: „the step to a symbolic system eliminated the meanings of individual items and even of the operations acting on them ..., introducing the difficulty for the learner that, by suiting all contexts, the language appears to belong to none" (Kieran 1990, S. 97).

Empirische Forschungsergebnisse stützen die Relevanz der (historisch) früheren Phasen des algebraischen Denkens für Lernende. Harper (1987) identifizierte in einer Studie mit Elf- bis Sechszehnjährigen alle drei historischen Entwicklungsstufen in den Antworten der teilnehmenden Schüler(innen). Er merkt an: „It is ... interesting that the preference for solution type does appear to shift through Rhetorical to Diophantine to Vietan, and that the use of 'givens' is adopted relatively late in school life (in the majority of cases)" (Harper 1987, S. 84). Laborde (1990, S. 60) führt zwei Studien an (Laborde 1982; Lee 1987), in welchen Neunt- bzw. Zehntklässler je eine Aufgabe erhalten haben, in der sie eine arithmetische Aussage über Zahlen begründen und verallgemeinern sollten. „No algebraic code was proposed in the statement of the problem, and the decision to denote a general number by a letter and to express general relations between numbers by means of algebraic statements using these letters depended on the students' initiative" (Laborde 1990, S. 60). Beide Studien kommen zu dem gemeinsamen Ergebnis, dass Lernende selten von sich aus die algebraische Formelsprache nutzen, um ein Problem zu lösen, sondern in Handlungsbeschreibungen verharren und sich durch Zahlenbeispiele Gewissheit über die Gültigkeit von Aussagen verschaffen. „It could be assumed that the resistance to having recourse to formulae or algebraic statements would be due to the difficulty the students had in going beyond the context and deleting time and action references. The changeover from natural language to mathematical symbolism eliminates all these elements, which create the actual meaning for the students" (ebd., S. 61). Daher erscheint es als sinnvoll, den (historisch) früheren Phasen des algebraischen Denkens auch im Unterricht Raum zu gewähren, um Lernenden die Gelegenheit zu geben, ein Verständnis für die symbolische algebraische Formelsprache zu entwickeln. Lernende sollten zunächst gedanklich und sprachlich Rolle-für-Individuum-Metonymien im mathematischen Kontext ausbilden und verwenden, d. h. das Allgemeine in Sachverhalten mit Hilfe von Wortvariablen ausdrücken lernen, bevor sie angeregt werden, dazu die abstrakte symbolische Formelsprache der Algebra zu verwenden.

1.2 Ausgewählte Forschungsergebnisse

Das algebraische Denken ist mittlerweile ein intensiv beforschtes Gebiet mit einer Vielzahl von Veröffentlichungen. Einen Überblick über die Forschungslandschaft geben die Aufsätze Kieran (1992) und Kieran (2007), wobei sich der neuere Artikel vornehmlich mit Studien seit den 1990er Jahren beschäftigt und insofern den älteren aktualisiert. Einen guten Einblick erhält man auch, wenn man die Sammelbände *Approaches to Algebra* (Bednarz et al. 1996), *Perspectives on School Algebra* (Sutherland, Rojano, Bell & Lins

2001) und *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Stacey, Chick & Kendal 2004) betrachtet, die alle aus internationalen Kooperationen entstanden sind. In *Approaches to Algebra* findet sich eine Sammlung von Aufsätzen, gegliedert nach verschiedenen möglichen unterrichtlichen Zugängen zur Algebra: Verallgemeinern numerischer und geometrischer Muster, Problemlösen, Modellieren von natürlichen Phänomenen sowie funktionale Betrachtungen. Darüberhinaus wird aus historischer Perspektive die Komplexität algebraischer Begriffe und die für ihre Konstruktion notwendige Leistung gewürdigt. In der Einleitung kommentieren die Herausgeber: „The different approaches to introducing algebra that have been put forward by the international community appear ... to be related to the conceptions of algebra held by their authors“ (Bednarz et al. 1996, S. 4). Dieser Sammelband stellt die Forschungslandschaft zum algebraischen Denken also strukturiert entlang verschiedener Sichtweisen auf algebraisches Denken vor.

Die Herausgeber des Buches *Perspectives on School Algebra* heben dagegen hervor, dass insbesondere die Konfrontation theoretischer und eher unterrichtspraktischer Forschungsperspektiven zum algebraischen Denken in der Arbeitsgruppe[9] als sehr fruchtbar erlebt wurde, und sehen darin die verbindende Komponente, die die Einzelaufsätze des Buches zu einem Ganzen zusammenfügt (Sutherland et al. 2001, S. 2).

The Future of the Teaching and Learning of Algebra[10] ist schließlich nach in der Community präsenten Forschungsrichtungen gegliedert: Frühe Algebra, Zugänge zur Algebra, Rechnereinsatz im Algebraunterricht, Computer Algebra Systeme (CAS) im Speziellen, Geschichte, Symbole & Sprache, Lehrerwissen, Algebra für Lernende aller Leistungsstufen sowie Algebra an der Hochschule. Auf diese Weise geben die drei Sammelbände also aus unterschiedlichen Perspektiven Einblicke in die Forschungslandschaft zum algebraischen Denken.

---

[9] eine Arbeitsgruppe der *International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*

[10] Publikation der gleichnamigen ICMI Study

Hier sollen nun exemplarisch vier Arbeiten vorgestellt werden, in welchen ähnliche Ziele wie in der vorliegenden Studie verfolgt werden, indem ausgehend von prä-algebraischen Artikulationen die Genese algebraischen Denkens betrachtet (Van Amerom (2002), Berlin (2010) und Radford (2010)) bzw. die Entwicklung des Variablenbegriffs speziell aus einer epistemologischen Perspektive untersucht (Akinwunmi 2012) wird.

Van Amerom (2002) geht in ihrer im Bereich der Entwicklungsforschung angesiedelten Studie der Frage nach, wie Lernende (5. - 7. Klasse) den Übergang von arithmetischem zu algebraischem Denken meistern können. Dabei verfolgt sie zwei Stränge: „The first way ... is to start from the students' informal strategies and to build more formal methods out of these. ... The second approach, which functioned rather in the background of the project, is to use input from the history of mathematics“ (Van Amerom 2003, S. 63 f.). Ich beschränke mich auf die Darstellung der Ergebnisse des ersten Zugangs, da dort Anknüpfungspunkte zu meinem Projekt zu finden sind. Van Amerom (2002, S. 279) konnte zeigen, dass sich algebraisches Argumentieren und Darstellen unabhängig voneinander entwickeln, wobei das algebraische Argumentieren den Lernenden leichter fällt. Bezüglich des Darstellens beobachtet sie: „Letters as abbreviations are very natural to students, but informal notations are not easily proceeded by formal notations“ (ebd., S. 280). Insgesamt stellt van Amerom fest (ebd., S. 283), dass prä-algebraisches[11] Argumentieren und Darstellen helfen *können*, die Kluft zwischen Arithmetik und Algebra zu überwinden, aber nicht alle Lernenden davon profitieren. Manche benötigen die prä-algebraische Phase einfach nicht – sie überqueren die Kluft mit einem großen Schritt – und manche sehen schon in der prä-algebraischen Phase den Mehrwert der Bemühungen nicht. Aber auch ein gutes prä-algebraisches Verständnis entwickle sich nicht automatisch weiter zu algebraischem Argumentieren und Darstellen.

Berlin und Radford beziehen in ihren Studien explizit Sprache und andere Ausdrucksmodalitäten wie z. B. Gestik mit ein. Wie sehr sich insbesondere auch die Gestik in der vorliegenden Studie als Indikator für ein sich

[11] Unter Prä-Algebra versteht van Amerom „the transition zone of informal explorative activity from arithmetic into early algebra“ (Van Amerom 2002, S. 26).

anbahnendes Verständnis der elementaren Algebra erweist, ist im Überblick über die einzelnen Kapitel der Arbeit im Rahmen der Einleitung bereits angeklungen.

Berlin (2010) hat untersucht, wie deutsche und russische Schülerinnen und Schüler der Klasse 5 „in der Beschäftigung mit geometrischen und arithmetischen Mustern Strukturen erkennen, beschreiben, verallgemeinern und sich dabei Buchstabenvariable als symbolische Darstellungsmittel zu eigen machen“ (Berlin & Hefendehl-Hebeker 2011, S. 16). Sie konnte diesbezüglich drei Stufen herausarbeiten (ebd., S. 22):

1. Vorbewusste Auseinandersetzung mit dem Material, Formierung einer Methode des Strukturierens;
2. Entwickeln einer bewussten Strategie des Strukturierens, Beobachten von Mustern;
3. Erkennen von Zusammenhängen, Durchschauen von Mustern und deren strukturelle Beschreibung.

Auf der ersten Stufe gehen die Schülerinnen und Schüler intuitiv an die Aufgabe heran. Dabei kann sich bereits eine Methode des Strukturierens ausbilden, sie wird dem Lernenden aber noch nicht bewusst. Für einen Beobachter kann sie „jedoch durch Gestik, Mimik, Zeigetechnik und eventuell egozentrische Sprachäußerungen des Kindes sichtbar werden“ (ebd., S. 18). Der Übergang auf die zweite Stufe zeichnet sich dadurch aus, dass dem Lernenden seine Methode bewusst wird, und er sie als Strategie verwendet. Die Ausdrucksmodalitäten verharren dabei noch auf einer vorbegrifflichen Stufe. Schülerinnen und Schüler erreichen die dritte Stufe, wenn sie erkennen, „warum beobachtete Gesetzmäßigkeiten gelten und angewandte Strategien funktionieren“ (ebd., S. 18). Wie van Amerom weist auch Berlin darauf hin, dass das Erkennen von Zusammenhängen, Durchschauen von Mustern und deren strukturelle Beschreibung jedoch nicht automatisch in eine formale Darstellung münden. Dementsprechend fächert sie die dritte Stufe in weitere Stadien auf. Die strukturelle Beschreibung kann exemplarisch an einem repräsentativen Beispiel, begrifflich oder formal-symbolisch erfolgen (ebd., S. 22). Zusammenfassend stellen Berlin und Hefendehl-Hebeker (2011, S. 20) fest, dass der „Abfolge dieser Stufen … eine sprachliche Entwicklung [entspricht], die sich von ursprünglich egozentrischen Äußerungen oder bloßen Gesten zu einer expliziter werdenden Artikulation von Beobachtungen und Begründungszuammenhängen und einer zunehmenden Verwendung von Fachbegriffen bewegt“.

Radford (2010) stellt Ergebnisse einer Langzeitstudie vor, in der Lernende von der achten bis zur zwölften Klasse im Algebra-Unterricht begleitet wurden. An Unterrichtsausschnitten zum Thema Musterfolgen illustriert er eine Klassifikation von Arten algebraischen Denkens. Er unterscheidet *Factual Algebraic Thinking*, *Contextual Algebraic Thinking* sowie *Symbolic Algebraic Thinking* (ebd., S. XXXIX ff.). Als Zwischenform diskutiert er noch das *Iconic Symbolic Algebraic Thinking*. Die Erläuterung der verschiedenen Arten wird deutlich machen, dass sie die Genese algebraischen Denkens in ähnlicher Weise beschreiben wie Berlins Stufen – nur, dass an unterschiedlichen Stellen in der Entwicklung Halt gemacht wird, um Bilanz zu ziehen. Während Berlin die Stufen danach festsetzt, ob und in welchem Umfang die Strukturen der Musterfolge *bewusst* erkannt und verarbeitet werden, verwendet Radford als Maß den Grad der Explizitheit des Unbestimmten. Das Factual Algebraic Thinking spielt sich auf der Ebene konkreter Zahlen ab (ebd., S. XL), „indeterminacy does not reach the level of discourse“ (ebd.). Die Strukturen der Musterfolgen werden aber erkannt und an repräsentativen Beispielen unter Zuhilfenahme von Gesten (z. B. Zeigen auf bestimmte Teile des Musters) beschrieben (ebd., S. XXXIX). Im Contextual Algebraic Thinking wird das Unbestimmte explizit benannt. Die Lernenden sprechen beispielsweise über die *Nummer der Figur* (ebd., S. XLI). Die Bezeichnung ‚Contextual‘ resultiert aus der Tatsache, dass die so entstehenden Terme noch stark kontextgebunden sind (ebd.). Der Übergang zum Symbolic Algebraic Thinking beginnt bei der Verwendung der symbolischen Formelsprache. Solange es aber für Lernende wichtig ist, dass die aufgestellten Terme ihre Entstehungsgeschichte ‚erzählen‘ (dies wird z. B. in der Weigerung deutlich, im Term $(n+1)+(n+2)$ die Klammern wegfallen zu lassen), ist das Symbolic Algebraic Thinking noch nicht erreicht. Radford spricht in diesem Zusammenhang von Iconic Symbolic Formulas (ebd., S. XLIV). Da die Stärke der Algebra nämlich in der Loslösung vom Kontext, in der abstrakten Darstellen liege (ebd.), müsse die narrative Dimension der Terme zusammenbrechen (ebd., S. XLV), damit das Symbolic Algebraic Thinking erreicht würde: „The mode of designation has to move to a different layer where signs borrow their meaning not from the things they denote but from the *relational* way they mean within the context of other signs“ (ebd., S. XLIV). Wie Berlin stellt also auch Radford die Veränderung der den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehenden Ausdrucksmodalitäten auf dem Weg zur (elementaren) Symbolsprache der Algebra heraus.

Akinwunmi (2012) beschäftigt sich im empirischen Teil ihrer Arbeit mit der folgenden zentralen Forschungsfrage: „Wie und mit welchen Mitteln verallgemeinern Schülerinnen und Schüler der Grundschule mathematische Muster und wie entwickeln sich dabei Variablenkonzepte?“ (ebd., S. 278). Sie beantwortet die Frage gegliedert nach neun Teilaspekten. Ergebnisse zu zweien dieser Aspekte bieten Anknüpfungspunkte zur vorliegenden Studie und werden im Folgenden ausschnittsweise zitiert:

- „Aus epistemologischer Perspektive lassen sich Verallgemeinerungsprozesse als Beziehungsherstellung zwischen allgemeinen mathematischen Mustern und Strukturen und mathematischen Zeichen auf zweierlei untrennbar miteinander verbundenen Weisen beschreiben. Einerseits deuten die Lernenden eine allgemeine Struktur in die gegebenen mathematischen Zeichen und andererseits nutzen sie ihnen bekannte Zeichen (Wörter, Symbole) aus anderen Kontexten, um die allgemeinen Muster und Strukturen zu beschreiben.
  Eine Entwicklung des Variablenbegriffs findet im Verallgemeinerungsprozess durch die Herstellung neuartiger Wechselbeziehungen zwischen der allgemein zu beschreibenden Struktur und den in der Kommunikation verwendeten Zeichen statt, welche so bei der Verallgemeinerung die Rolle von Variablen einnehmen und auf die mathematischen Muster in ihrer Allgemeinheit verweisen“ (ebd., S. 278 f.).

- „Bei der Verallgemeinerung mathematischer Muster auf verschiedenen Darstellungsebenen lassen sich hinsichtlich des Wechsels zwischen und der Verknüpfung von diesen Darstellungsebenen zwei eng verflochtene Prozesse erkennen:
  - Bei der Verallgemeinerung der Muster erfolgt eine Ablösung von der geometrisch-visualisierten Ebene, da die Lernenden die Vor-

teile (bzgl. Schnelligkeit und Aufwand) des Einbeziehens der arithmetischen Ebene erkennen und nutzen.

– Die Lernenden wechseln bei der Verallgemeinerung der Muster flexibel zwischen den Darstellungsebenen und nehmen auch nach der Ablösung von der geometrisch-visualisierten Ebene (oftmals spontan) Rückbezug zu dieser.

Aufgrund dieser beiden Komponenten stellt sich die Verallgemeinerung mathematischer Muster als Prozess dar, der durch die Vernetzung unterschiedlicher Darstellungsebenen geprägt ist. Auf den verschiedenen Darstellungsebenen werden Aspekte der Struktur entdeckt, verallgemeinert und aufeinander bezogen. Die Verknüpfung der Darstellungsebenen trägt dabei zur Entwicklung und Verallgemeinerung der Musterstrukturierung bei und lässt die dynamische Wechselbeziehung zwischen geometrisch-visualisierter und arithmetischer Darstellung sichtbar werden“ (ebd., S. 280 f.).

Es wird sich zeigen, dass die „Herstellung neuartiger Wechselbeziehungen zwischen der allgemein zu beschreibenden Struktur und den in der Kommunikation verwendeten Zeichen“ (Akinwunmi 2012, S. 278 f.; hier s. erster Spiegelpunkt), die im Zentrum der zitierten Ergebnisse steht, den Umdeutungsprozessen in der vorliegenden Arbeit ähnelt, wenn man von den verschiedenartigen Aufgaben(themen) abstrahiert, die in den Studien fokussiert werden (*Verallgemeinern von Mustern* bzw. *Knack die Box*).

Kapitel 2

Lernen

Lernen ist ein extrem vielschichtiges Phänomen. Theorien, die es zu beleuchten versuchen, sind variantenreich, stammen aus diversen Zweigen der Wissenschaft und stehen in der Tradition verschiedener erkenntnistheoretischer Denkweisen. Daher liegt eine umfassende Erörterung aller aktuellen Theorien und Forschungsrichtungen außerhalb der Möglichkeiten und des Interesses dieser Arbeit. Die nachfolgende Darstellung beschränkt sich auf diejenigen Theorien, die die in der vorliegenden Studie eingenommenen Perspektiven auf Lernprozesse stützen. Dies ist zum einen eine erweiterte epistemologisch interaktionistische Sichtweise, die im Spannungsfeld von Inhalt, Individuum und Interaktion entfaltet wird, und zum anderen eine eher kognitionswissenschaftliche, die Annahmen über die Rolle der handelnden Auseinandersetzung des Lernenden mit seiner Umwelt aufgreift. Die Rolle der Gestik in dieser Auseinandersetzung wird in einem separaten Unterkapitel erörtert.

2.1 Im Spannungsfeld von Inhalt, Individuum und Interaktion

Die erweiterte epistemologisch interaktionistische Sichtweise der vorliegenden Arbeit auf Lernprozesse soll vom interaktionistischen Ansatz ausgehend dargelegt werden. „Eine Grundannahme der interaktionstheoretischen

Perspektive auf Unterricht besteht darin, daß kulturelle und soziale Aspekte keine Randbedingungen des Mathematiklernens sind, sondern wesentliche Eigenschaften“ (Voigt 1994, S. 79 f.). Dies wird z. B. darin besonders deutlich, dass Bedeutungen von Äußerungen sowie Handlungen erst in der Interaktion ausgehandelt werden, da sie in der Regel „a priori keine von allen Beteiligten geteilte gemeinsame Bedeutung“ besitzen (Krummheuer 2007, S. 64). Dies gilt grundsätzlich auch für die Gegenstände des Mathematikunterrichts. Die streng interaktionistische Sichtweise geht aber sogar so weit zu sagen, dass die Bedeutung der mathematischen Objekte „auch nur dort [in der Interaktion] lokalisiert werden kann und nicht in den Interaktionsbeteiligten bzw. deren Köpfen wie ein kognitivistischer Ansatz es tun würde und auch stoffdidaktische Arbeiten (implizit) machen“ (Jungwirth & Krummheuer 2008, S. 148). Für die Deutung von Lernprozessen folgt für sie, „dass Lernen aus der zunehmend selbständigeren Teilnahme der Lernenden an musterartig verlaufenden und für sie, aus ihrer Perspektive, einen Überschuss an Bedeutung produzierenden kollektiven Argumentationsprozessen resultiert. Diese Theoretisierung ist anschlussfähig an psychologische Konzepte, als durch die Konfrontation mit einem interaktiv erweiterten Bedeutungsgehalt in einer Interaktionssituation eine Umkonstruktion des Gewussten, metaphorisch gesprochen: der Erwerb einer neuen ‚Brille‘, bei den Lernenden angeregt werden kann“ (Jungwirth & Krummheuer 2008, S. 149).

Die Rolle des Individuums wird hier letztlich also zwar nicht in Abrede gestellt und auch Krummheuer (2007, S. 65) will ausdrücklich nicht behaupten, „dass es keine Gedanken, Intentionen usw. bei den handelnden Individuen gäbe“, betont aber, dass diese für die interaktionistische Perspektive erst bedeutsam werden, wenn sie in der Interaktion thematisiert werden. Die bloße Anschluss*fähigkeit* des interaktionistischen Ansatzes an Perspektiven auf individuelle Prozesse und das Zugeständnis eigener Gedanken an das Individuum genügen der vorliegenden Studie jedoch nicht. Sie will die Perspektive erweitern und das Individuum tatsächlich miteinbeziehen. Ziel der Arbeit ist es, eine möglichst ganzheitliche oder zumindest mehrperspektivische Betrachtung von algebraischen Lernprozessen im Sinne des folgenden Zitates zu versuchen: „Natürlich reicht der interaktionstheoretische Blickwinkel nicht aus, wenn man Unterrichtsprozesse ganzheitlich verstehen wollte (s. die psychologischen und epistemologischen Analysen im vorliegenden Band). Die interaktionstheoretische Perspektive ... lenkt die Aufmerksamkeit auf die Aushandlung mathematischer Bedeutungen in den lokalen Geschehnissen des Mathematikunterrichts“ (Voigt 1994, S. 83).

Im Hinblick auf die hier bereits geforderte Mitbetrachtung individueller Aspekte folgen wir zunächst einer Weiterentwicklung des interaktionistischen Ansatzes durch Brandt (s. Brandt 2006), die auf dem *Interaktionistischen Konstruktivismus* fußt. Brandt verweist diesbezüglich auf Sutter (1994) und Sutter und Charlton (1994). Sutter kritisiere, dass sich der Konstruktivismus bei der Analyse von Lernprozessen allein auf das lernende Subjekt und der Interaktionismus allein auf die soziale Interaktion konzentriert, und suche „einen Ausweg im Konzept des ‚interaktionistischen Konstruktivismus‘ (Sutter & Charlton 1994, 19)“ (Brandt 2006, S. 19 f.). Für Brandt (2006, S. 20) ist wesentlich, dass Sutter damit Lernen im Spannungsfeld zwischen lernendem Individuum und sozialer Interaktion als Lernbedingung erfasst. Brandt (2006) versucht darauf aufbauend, die Wechselbeziehung zwischen Subjekt und Interaktion ausgewogener zu erfassen, indem sie untersucht, wie Individuen sich in die Interaktion einbringen und welchen Einfluss sie damit auch auf die sachlogische Entwicklung nehmen. Sie rekonstruiert Partizipationsprofile, die die „individuellen Mitgestaltungen der Schüler(innen) im Interaktionsprozess“ fokussieren, „ohne dabei den Theorierahmen des symbolischen Interaktionismus aufzukündigen“ (Brandt 2006, S. 20).

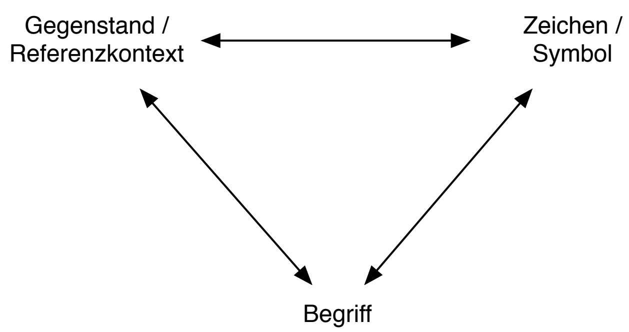
Nun ist diese Darstellung vom interaktionistischen Ansatz ausgegangen und hat begründet, warum die Hinzunahme der Perspektive auf individuelle Prozesse sinnvoll erscheint. Bei gegenläufiger Herangehensweise ließe sich die Einseitigkeit der ausschließlichen Betrachtung des Individuums mittels der „Notwendigkeit sozialer Impulse bei der Entwicklung des theoretischen Wissens beim Schüler“ (Voigt 1994, S. 81) aufzeigen. Wegen der Eigenständigkeit der Interaktion müsse dies über soziale Ausprägungen des Konstruktivismus hinausgehen, da dieser die Vorstellungen und Ideen des Individuums nach wie vor über die Interaktion heraushebe (Brandt 2006,

S. 21, in Bezug auf Sutter & Charlton 1994). Dort setzt Interaktionismus an.

In interaktionstheoretischen Analysen des Mathematikunterrichts wird zwar berücksichtigt, „dass in den Interaktionen Mathematik gehandhabt wird" (Jungwirth & Krummheuer 2008, S. 151), auf Grund der Abwendung vom stoffdidaktischen Paradigma, durch welche die interaktionstheoretische Perspektive auf Mathematikunterricht hervorgebracht wurde, bleibt die *Besonderheit* des mathematischen Wissens aber unberücksichtigt (s. Steinbring 2000a, Bd. I, S. 14 ff.). Steinbring ergänzt die interaktionstheoretische Perspektive daher um einen epistemologischen Fokus, welcher „die Besonderheit des in der Interaktion verhandelten Gegenstandes ‚mathematisches Wissen' ... in die theoretischen Untersuchungen" mit einbezieht (ebd., S. 15 f.). „Dabei wird der Unterrichtsgegenstand ‚Mathematik' ... nicht als ein vorgegebener, fertiger Stoff verstanden, sondern entsprechend den epistemologischen Bedingungen seiner dynamischen, interaktiven Entwicklung interpretiert" (ebd., S. 16).

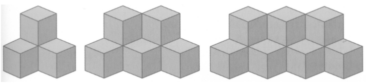
„Im Hinblick auf die Analyse der Konstruktionsbedingungen neuen Wissens sind mathematische Zeichen und Symbole die zentralen Bindeglieder zwischen der epistemologischen und kommunikativen Dimension interaktiver Konstruktionsprozesse; zum einen sind Zeichen und Symbole die *Träger des mathematischen Wissens*, und zum anderen sind sie gleichzeitig die *Informationen in der mathematischen Kommunikation*" (Steinbring 1999, S. 515). Steinbring (2000b, S. 28) fasst die „Entwicklung des Wissens als Herstellung von Deutungen zwischen symbolischen Strukturen und möglichen Referenzkontexten" auf. Für die Seinsweise des mathematischen Wissens bedeutet dies, dass es „nicht als ein vorgefertigtes, objektives und logisch konsistentes Produkt gesehen wird, sondern die Herstellung von Beziehungen zwischen Symbolsystemen und Deutungskontexten in den Mittelpunkt gestellt wird" (Steinbring 2000b, S. 29). Dabei betont Steinbring (1999, S. 518), dass mathematische Zeichen und Referenzkontexte nicht direkt das neu konstruierte Wissen wiedergäben, sondern als ikonische Träger des Wissens im Sinne von Hinweisen auf andere strukturelle Beziehungen des Begriffs benutzt würden. Damit transportieren Symbole und Referenzkontexte wie z. B. auch Anschauungsmaterialien keine unmittelbare, unmissverständlich ablesbare Botschaft, sondern verlangen eine echte Deutungsleistung. „Schülerinnen und Schüler stehen ... vor dem besonderen Deutungsproblem, sich bei mathematischen Zeichen und zugehörigen Referenzkontexten immer von der Konkretheit der Situation zum Teil zu distanzieren und darin etwas ‚anderes', eine andere Struktur, zu deuten oder zu erkennen" (ebd.).

Zur Darstellung der Zusammenhänge zwischen neuen mathematischen Zeichen und Symbolen und möglichen Referenzkontexten in konkreten Lernsituationen wird das **epistemologische Dreieck** verwendet (s. z. B. Steinbring 2000b, S. 34; eine ausführliche Herleitung findet sich in Steinbring 2009):

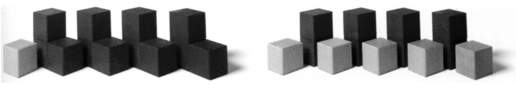


Wir betrachten ein Beispiel für die Triade der epistemologischen Perspektive aus Zeichen, Referenzkontext und Begriff. Folgende Aufgabe – inklusive der Abbildungen – stammt aus dem *mathbu.ch 7* (Affolter et al. 2003, S. 23), sie wurde lediglich sprachlich etwas verändert:

Jemand hat aus Würfeln diese Mauern gebaut:



Milena und Kevin beschreiben die Anzahl der Würfel unterschiedlich.
Milena: $2 \cdot x + (x + 1)$
Kevin: $3 \cdot x + 1$
Sie haben ihre Überlegungen veranschaulicht:



Welche (zweifarbige) Mauer stammt von Milena, welche von Kevin? Erklärt, was die beiden sich überlegt haben.
Liefern beide Terme für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl Würfel?

„Im Zentrum der Aufgabenstellung stehen zwei formale algebraische Darstellungen: Es werden zwei verschiedene Terme zur Beschreibung der Anzahl der Würfel in den Mauern angegeben. Dabei wird nicht näher spezifiziert, wofür die verwendete Variable x jeweils steht. Die Aufgabe sieht nun vor, dass die Lernenden die Angemessenheit der Darstellungen überprüfen, indem sie inhaltsgebundene Deutungen der Terme anhand des Musters vornehmen“ (Melzig 2010, S. 8). In einer Gruppenarbeit äußert eine Schülerin dazu folgendes[1]:

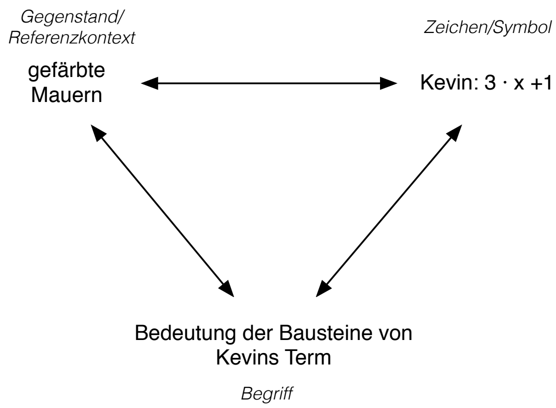
Bea
Guck mal diese Ls sag ich jetzt mal, *(malt zweimal mit der Hand ein L in die Luft)* die ähm zwei aufeinander *(malt einen Strich in die Luft)* und dann einen nach rechts *(zeigt mit dem Daumen von sich aus gesehen nach rechts)*. Sind die drei beim Kevin *(zeigt drei Finger der rechten Hand)*. Und der plus eins *(öffnet die rechte Hand und zeigt mit dem kleinen Finger auf ihr Arbeitsblatt)* ist der, der ähm – der nicht damit eingeschlossen ist.

Nach kurzer Bestätigung durch ihre Mitschülerinnen fährt sie fort:

x mal drei. Wie oft man diese Ls machen muss.

[1] Die Erörterung der ganzen Episode – mit besonderem Augenmerk auf die zu beobachtenden Denkhandlungen – ist in Melzig (2010) zu finden.

Bea „untergliedert ... Kevins Term in Bausteine, die sie einzeln an der Mauer zu deuten versucht“ (ebd., S. 10). Im epistemologischen Dreieck lässt sich dies so darstellen:



Bea deutet die ‚3‘ in Kevins Term (also in der zu deutenden Zeichenkette) als Anzahl der Würfel pro L in der linken gefärbten Mauer (also in einem Teil des von der Aufgabe vorgesehenen Referenzkontextes), das x als Anzahl der Ls in der betrachteten Mauer und die 1 als Anzahl der Würfel im sich nicht ändernden Teil der Mauer (vgl. Melzig 2010, Kasten 1, S. 10). „Obwohl Kevin und Milena durch Einfärben der vierten Mauer ihre Terme veranschaulichen wollten, ist die Herstellung eines deutenden Bezuges zu den Termen kein Selbstläufer. Die Variable x trägt zu den Schwierigkeiten sicherlich in besonderer Weise bei, aber auch zur Deutung der übrigen Termbestandteile müssen die von Milena und Kevin intendierten Strukturen in den Veranschaulichungen zunächst erkannt werden. Dies wird an Kevins ‚3‘ besonders deutlich: die Ls, die Bea ... in den Mauern als ‚drei‘ identifiziert, sind in Kevins Mauer nicht offensichtlich. Bea – und nun auch wir – sehen sie in die schwarz gefärbten Würfel hinein, müssen die schwarz gefärbten Würfel also zunächst vor unserem inneren Auge strukturieren“ (ebd.). Hierin zeigt sich auch schön die dynamische Beziehung zwischen den Ecken des epistemologischen Dreiecks (hier insbesondere zwischen Zeichen und Referenzkontext): ohne den Term würde man vermutlich keine Ls in der Mauer sehen. Zeichen und Referenzkontext tauschen im Prozess der Deutung von

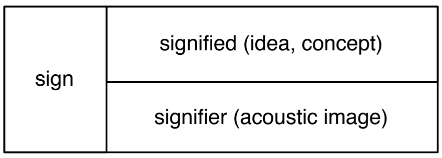
Kevins Veranschaulichung also quasi kurzfristig die Rollen. „Die Beziehungen zwischen den Eckpunkten dieses Dreiecks sind nicht explizit definiert, sie bilden ein sich wechselweise stützendes und ausbalancierendes System“ (Steinbring 2000b, S. 34). Die Deutungsleistung, die für den Termbaustein ‚+1‘ notwendig ist, fällt wesentlich kleiner aus, da Kevins Mauer einen einzelnen andersfarbigen Würfel enthält.

Bei der Deutung der Variablen x in der Aussage „x mal drei. Wie oft man diese Ls machen muss.“ nimmt Bea eine Verallgemeinerung vor. „Ausgehend von der Mauer mit vier Ls stellt sie damit nämlich fest, dass alle Mauern aus einer bestimmten Anzahl Ls und einem einzelnen Würfel aufgebaut sind“ (Melzig 2010, S. 10). Um die Variable x an Kevins Mauer deuten zu können, muss Bea sich also „von der Konkretheit der Situation zum Teil ... distanzieren“ (Steinbring 1999, S. 518; hier s. S. 34).

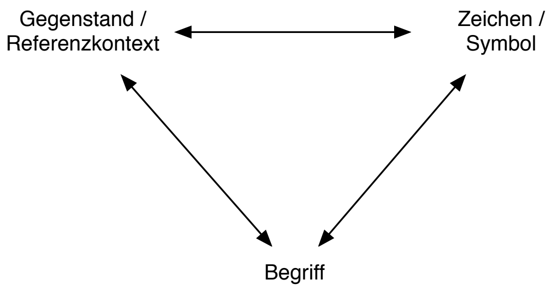
Beim Erwerb der algebraischen Formelsprache müssen sich Lernende ein ganz neues Darstellungs- bzw. Zeichensystem zu eigen machen, das sich deutlich vom semiotischen System der Arithmetik unterscheidet. Der konkretgegenständliche Kontext, der im Fokus dieser Arbeit steht und den Erwerb der algebraischen Formelsprache unterstützen soll, stellt für die Schülerinnen und Schüler noch ein weiteres neues, zu deutendes Darstellungssystem dar.[2] Das damit der Arbeit inhärente Thema „(Be-)Deutung und Gebrauch von Zeichen“ legt nahe, in den empirischen Analysen auch eine semiotische Perspektive einzunehmen. Durch die eben vorgestellte epistemologische Perspektive nach Steinbring gelingt dies bereits, denn mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks wird die semiotische Vermittlung zwischen Zeichen/Symbol und Gegenstand/Referenzkontext modelliert, wobei aber die besondere epistemologische Natur mathematischer Begriffe und Zeichen Berücksichtigung findet (s. Steinbring 2006, S. 135). Für Steinbring haben mathematische Zeichen eine semiotische und eine epistemologische Funktion (ebd., S. 134). Während die semiotische Funktion den darstellenden Charakter des Zei-

[2] In Kapitel 5 wird noch zu begründen sein, warum die Einführung dieses speziellen semiotischen Systems sinnvoll erscheint, welche Anforderungen für die Schülerinnen und Schüler daraus erwachsen, welche Charakteristika der algebraischen Formelsprache repräsentiert und welche Handlungen darin möglich sind.

chens betrifft – „etw. steht für etwas anderes“, bezieht sich die epistemologische Funktion auf die Rolle des mathematischen Zeichens im Hinblick auf die Beschaffenheit mathematischen Wissens (ebd.). „This attempt to model the semiotic function of mathematical signs with the help of the epistemological triangle under the simultaneous epistemological influences of theoretical mathematical knowledge has the consequence of regarding the defining characteristic for the sign – something that stands for something else – in a new way. Mathematical concepts are not empirical things, but they represent relations. Whatever an object/reference context for a mathematical sign might be, it must be understood as an embodiment of a relational structure and not as a kind of real thing with perceivable properties“ (ebd., S. 143). Diese veränderte Betrachtung wird beim Vergleich des semiotischen Modells nach de Saussure (dargestellt nach Steinbring 2009, S. 53 f.) mit dem epistemologischen Dreieck deutlich:



Semiotisches Modell
nach de Saussure



Epistemologisches Dreieck
nach Steinbring

Im semiotischen Modell nach de Saussure sind signifiant (Bezeichnendes, engl. signifier) und signifié (Bezeichnetes, engl. signified) die zwei Komponenten des signe (des Zeichens, engl. sign): das Bezeichnende (z. B. ein Stop-Schild) steht für etwas anderes (für die Anweisung „Halt! Vorfahrt gewähren!“). Aus diesen beiden Komponenten konstituiert sich das Zeichen (im Beispiel: das Verkehrs*zeichen* „Stop“). „In contrast with de Saussure's semiotic model with its terminological distinction between ‘signifiers’ and ‘signified’, which constitute the ‘sign’, a different notation has been chosen for the epistemological triangle: ‘sign / symbol’, ‘object / reference context’ and 'concept' .... This terminology takes into account the fact that mathematical signifiers are often understood in the form of a sign themselves which represents an aspect of a reference context. Furthermore the mathematical concept is of a central epistemological meaning in mathematics exceeding the function of being a 'sign / symbol'" (Steinbring 2009, S. 78).

Das epistemologische Dreieck soll in der vorliegenden Studie verwendet werden, um die Kernfrage der epistemologischen Perspektive „Wie erhalten die neuen mathematischen Zeichen und Symbole Bedeutung, und von welcher Art ist diese (Be-)Deutung?“ (Steinbring 2000b, S. 31) für den untersuchten Einstieg in die Algebra zu erörtern.

Damit wird hier ein epistemologisch interaktionistischer Blickwinkel auf Lernprozesse eingenommen, der versucht, auch das lernende Individuum in der Gruppe wahrzunehmen: Lernen im Spannungsfeld von Inhalt, Individuum und Interaktion.

Aus lerntheoretischer Sicht wird der handelnden Auseinandersetzung des lernenden Individuums mit seiner Umwelt eine besondere Bedeutung beigemessen. Durch die folgende Erörterung dieses Zusammenhangs wird der theoretische Rahmen um einen speziellen Aspekt ergänzt. Dieser wird Anhaltspunkte für die Konstruktion der Unterrichtsreihe liefern und eine Grundlage für eine spätere Meta-Analyse dieses Aspekts des Lernprozesses schaffen. Darüber hinaus wird die Perspektive auf das Individuum indirekt vertieft, da die verwendeten Theorien subjektbezogen sind.

2.2 Denken und Handeln

Aebli (1985, S. 4) schreibt Bezug nehmend auf Piaget: „Das Handeln und das Wahrnehmen ist auch für das ältere Kind, den Jugendlichen und den Erwachsenen die Grundlage und die Urform des geistigen Lebens“, und stellt damit die stete Relevanz der handelnden Auseinandersetzung mit der Umwelt für das Lernen heraus. Während Piaget insbesondere die Bedeutung der Handlungen im Kindesalter bis hinein in das konkret-operative Stadium seiner Stufentheorie betont hat (s. z. B. Piaget (1947/1970, S. 165)), geht Aebli davon aus, dass Handlungen Grundlage des Denkens bleiben und bezeichnet „Denken als Ordnen des Tuns“ (im Titel des Buches Aebli (1980)).

Auch für Freudenthal (1973) ist „Denken ... nur ein ins Geistige fortgesetztes Handeln“ (ebd., S. 108). Er „spricht ... von Lernstufen, ... und diese Stufen entspringen dem Konzept des entdeckenden Lernens, das Freudenthal ‚(gelenkte) Nacherfindung‘ nennt“ (Winter 1989, S. 75). Das Handeln werde im Lernprozess – nach einer nullten Stufe des Sammelns praktischer Erfahrungen – mehrfach gedanklich geordnet. Auf Stufe 1 werde durch Ordnen der praktischen Erfahrungen der nullten Stufe ein erstes theoretisches Wissen erworben, welches auf Stufe 2 dann wiederum selbst einem Prozess des Ordnens unterzogen werde. Der Lernprozess durchlaufe zwei weitere Stufen, auf welchen das theoretische Wissen systematisiert, formalisiert und schließlich in eine größere Theorie eingebunden werde (Rekonstruktion der Stufen nach Winter (1989, S. 75)). Im gesamten Lernprozess werden „die Ordnungsmittel niederer Stufen ... auf höherer Stufe Gegenstand des Ordnens“ (Freudenthal 1973, S. 118). Wird durch ein Lernangebot eine Stufe zu überspringen versucht, so könne das Wissen dieser Stufe nur algorithmisch vom Lernenden erworben werden, und nur durch zusätzliche Aneignung nötiger Anwendungsschemata überhaupt zum Einsatz kommen (ebd., S. 120). Für sinnstiftendes Lernen ist also ein Durchlaufen aller Stufen notwendig – auch das der Nullten. „Andererseits warnt er [Freudentahl] vor einer Mystifizierung der Stufe 0: Wenn der Lernende auf ihr verharre und nicht veranlaßt werde, über sein praktisches Tun systematisch nachzudenken, könne sich keine spezifisch mathematische Erfahrung entwickeln“ (Winter 1989, S. 75). Bezüglich des Geltungsbereichs dieses Stufenmodells stellt Winter (1989, S. 75) fest: „Das Freudenthalsche Stufenkonzept ist spezifisch für Mathematiklernen (und wahrscheinlich untauglich z. B. für Geographie- oder Orthographielernen) insofern, als es für den Fortschritt im Erwerb mathematischer Fähigkeiten typisch ist, das Gelernte immer wieder neuen Bearbeitungen zu unterwerfen (und nicht etwa, Wissenselemente assoziativ aneinander zu reihen).“ Freudenthal betont, dass auch der Erkenntnisprozess des forschenden Mathematikers mit Erfahrungen beginnt, mit dem Ordnen derselben fortgeführt wird und erst am Ende dieses Prozesses eine deduktiv geordnete Theorie des Beforschten stehen kann (Freudenthal 1973, S. 120). Er stimmt in gewisser Hinsicht also mit Aebli überein: Erfahrungen sind für den Lernprozess des Kindes relevant, bleiben es aber auch für späteren Erkenntnisgewinn. Dabei müssen die Erfahrungen nicht (mehr) unbedingt mit konkreten Gegenständen gemacht werden, sondern können auch aus abstrakteren Zusammenhängen entstehen, wenn diese für das Subjekt nur genügend vertraut sind.

Die vorliegende Arbeit vertritt den Standpunkt des *Denkens als Ordnen des Tuns* (im Titel des Buches Aebli (1980), s. o.) für den Erwerb elementarer algebraischer Begriffe und Zusammenhänge: „Zahldarstellungssysteme beschreiben und systematisieren ursprünglich Erfahrungen mit Gegenständen (z. B. Zählen und Bündeln), algebraische Formeln indessen beschreiben und systematisieren Erfahrungen mit Zahlen (z. B. Gesetze des Rechnens oder Verfahren zum Lösen von Gleichungen)“ (Hefendehl-Hebeker 2001, S. 92). Ich folge Hefendehl-Hebekers Umsetzung dieses Gedankens in einen Hinweis zur Gestaltung von Unterricht zum Einstieg in die elementare Algebra, der auf Freudenthals Stufenmodell zurückgreift: ein Einstieg in die elementare Algebra hat in zwei Schritten zu erfolgen. Zuerst müssen den Lernenden Gelegenheiten geboten werden, Erfahrungen mit Zahlen zu sammeln, die dazu anregen, Muster und Strukturen zu erkennen und zu beschreiben. Ein zweiter Schritt sollte diese „Erfahrungen behutsam reflektieren, ordnen, systematisieren, formalisieren und dabei in erforderlichem Maße neue gedankliche Objekte wie Variable konzipieren“ (ebd.).

Die im Folgenden vorgestellte Studie (Hutchins 2005) liefert sogar Anhaltspunkte dafür, dass es günstig sein kann, zum Einstieg in die Algebra mit konkret-gegenständlichen Kontexten zu arbeiten, wenn diese Strukturen besitzen, die auf einer Zahlenebene analysiert werden können. Hutchins (2005) hat sich mit der Frage beschäftigt, wie der Umgang mit konkret-gegenständlichen Strukturen begriffliche Strukturen eines Lernenden beeinflussen kann. Im Ansatz des conceptual blending (nach Fauconnier & Turner

(2002)) konnte er zeigen, dass **material anchor**s (Hutchins 2005, S. 1560) eine begriffliche Struktur eines Lernenden stabilisieren können, so dass komplexere Argumentationen möglich werden. Die Stabilisierung werde dadurch erreicht, dass begriffliche Elemente auf die konkret-gegenständlichen Strukturen abgebildet würden und auf diese Weise im übertragenen Sinne dort ‚festgehalten' werden könnten (ebd., S. 1562). „A physical structure is not a material anchor because of some intrinsic quality, but because of the way it is used. It might be better to ask under what conditions something becomes a material anchor than to ask whether it is a material anchor" (Hutchins 2005, S. 1562).

Als Beispiel lässt sich die Knöchel-Regel zur Bestimmung der Monatslängen anführen. Dabei werden die Monatsnamen genannt, während man mit einem Finger die Knöchel und Senken zwischen den Knöcheln der anderen Hand abtippt (Zeigefinger bis kleiner Finger). Ist man beim letzten Knöchel angekommen, beginnt man mit dem Tippen wieder beim ersten. Trifft ein Monat auf einen Knöchel, so ist er 31 Tage lang, trifft er auf eine Senke, so ist er (in der Regel) 30 Tage lang (Ausnahme: der Februar mit 28 oder 29 Tagen). Bei dieser Vorgehensweise fungiert die Hand mit ihren Knöcheln und Senken dazwischen als ‚material anchor', da durch das Tippen darauf die Zuordnung eines Monats zu einer Monatslänge festgehalten wird. Die Tatsache, dass sich lange und kurze Monate abwechseln und nur Juli und August als aufeinanderfolgende Monate gleich lang sind, findet sich in der Anordnung der Knöchel und Senken – also in der verwendeten Struktur – genau wieder. Um die Länge eines bestimmten Monats zu ermitteln, kann man daher einfach die Monatsnamen bis zum betrachteten aufsagen und dabei die Knöchel und Senken abtippen, ohne sich Gedanken über die Länge der anderen Monate machen zu müssen. Das Verfahren entlastet also das Denken.

Hutchins beschreibt dann aber auch die Ablösung vom Konkreten: „A final turn on this path is that when a material structure becomes very familiar, it may be possible to imagine the material structure when it is not present in the environment. It is even possible to imagine systematic transformations applied to such a representation" (ebd., S. 1575). Obwohl die konkret-gegenständliche Struktur irgendwann also nicht mehr verfügbar ist, bleibt der Anker gesetzt. Diese Untersuchung kann für die vorliegende Arbeit somit theoretisch und empirisch fundieren, den Einstieg in die Algebra mit konkret-gegenständlichem Material anzulegen und zu fragen, inwiefern dieses zum ‚material anchor' für den Begriff der Variablen werden kann.

Im Rahmen seiner genetischen Erkenntnistheorie beschäftigt sich auch Piaget mit dem Umgang mit konkreten Gegenständen und erörtert, wie dieser zu neuen Erkenntnissen führen kann: „Es gibt zwei Möglichkeiten. Die erste ist die folgende: wenn wir auf ein Objekt einwirken, hat unsere Erkenntnis ihren Ursprung im Objekt selbst. Dies ist der allgemeine Gesichtspunkt des Empirismus, der im Falle experimenteller oder empirischer Erkenntnis im großen und ganzen richtig ist. Aber es gibt eine zweite Möglichkeit: wenn wir auf ein Objekt einwirken, können wir auch das Einwirken selbst – oder, wenn Sie wollen, die Operationen – in Betracht ziehen, da die Transformation im Geiste ausgeführt werden kann. Nach dieser Hypothese ist das, wovon abstrahiert wird, nicht das Objekt, auf das eingewirkt wird, sondern das einwirkende Handeln. Mir scheint, daß dies die Grundlage der logischen und mathematischen Abstraktion ist" (Piaget 1970/1973, S. 23 f.). Hierin deutet sich auch wieder an, dass für die Mathematik häufig nicht das Anschauungsmaterial an sich relevant ist, sondern der Umgang damit sowie die ihm inhärenten Strukturen (s. bereits das obige Zitat aus Steinbring (1999, S.518)). Auch Freudenthal stellt (am Beispiel der Geometrie) heraus, wie konkretes Material zu verwenden sei, damit es zu Erkenntnis führe: „Wichtig am Material ist es, wie man es verwendet. Es soll ja nicht einfach Spielzeug sein. Dina van Hiele formulierte als Sinn des konkreten Materials, daß das Kind mit ihm denkend handelt" (Freudenthal 1973, S. 381). Außerdem betont auch er, dass es nicht um die physischen Aspekte des Experiments geht. Als Beispiel führt er die folgende Passage aus der Arbeit der van Hieles an: „Wenn die Schüler die Ebene mit kongruenten Dreiecken pflastern sollen, so unternehmen sie nichts, was man im Sinne experimenteller Technik ein Experiment nennen könnte. Es kommt ihnen nicht darauf an, ob die Stücke gut passen; sie hören mit dem Bauen auf, sobald sie die

Gesamtstruktur erfaßt haben, und sie werden es nicht mit andern Dreiecken wiederholen.“ (zitiert nach Freudenthal 1973, S. 381; aus Freudenthal: Report on Methods of Initiation into Geometry, 1958, p. 76).

Sowohl Piaget und Freudenthal als auch Hutchins betonen also, dass es im Umgang mit konkretem Material auf die Verwendungsweisen ankommt, und Material nicht allein aus sich heraus einen günstigen Effekt auf Erkenntnisprozesse hat. Dabei heben Piaget und Freudenthal besonders das Ordnen der Erfahrungen mit dem Material als relevant hervor, während für Hutchins die Funktion des Verankerns eines Begriffs im Konkreten zentral ist.

2.3 Ein zusätzlicher Fokus: Gestik

Erste Analysen der Gruppenarbeitsprozesse zu *Knack die Box* zeigten, dass die auf das Material bezogene Gestik nicht nur Beiwerk ist, sondern eine sinnstiftende Rolle spielt. Dies passiert in einem solchen Ausmaß, dass die rein sprachlichen Anteile der Äußerungen zum Teil allein nicht deutbar sind. Daher soll die Gestik der Schülerinnen und Schüler explizit in die Untersuchung mit aufgenommen werden.

Sagt man, dass jemand viel gestikuliert, so ist gemeint, dass er seine Hände und Arme beim Sprechen intensiv bewegt. Diese Auffassung von Gestik findet sich in der wissenschaftlichen Befassung mit ihr wieder. So schreibt beispielsweise David McNeill in der Einleitung zu seinem Buch *Hand and Mind*, welches in Arbeiten zur Gestik häufig zitiert wird: „The gestures I mean are the movements of the hands and arms that we see when people talk. Sometimes the movements are extensive, other times minimal, but movements there usually are.“ (McNeill 1992, S. 1). Insoweit stimmt das wissenschaftliche Grundverständnis von Gestik mit unserer alltäglichen Beobachtung und umgangssprachlichen Auffassung also überein. Die wissenschaftliche Betrachtung der Handbewegungen wird dann aber zwangsläufig differenzierter: erstens nimmt sie sich der Frage an, was als Geste angesehen werden soll und was nicht – sie versucht also eine Definition zu geben, und zweitens werden diejenigen Bewegungen, die dann als Geste aufgefasst werden, in verschiedene Gruppen unterteilt.

Um Gesten von anderen Handbewegungen abzugrenzen, arbeitet McNeill (1992, S. 37) mit einer Unterscheidungsweise von Kendon (1988), deren Klassen er in einem Kontinuum anordnet und zu dessen Ehren Kendons Kontinuum nennt (vgl. auch McNeill 2005, S. 5 ff.). Dabei werden fünf verschiedene Arten von Handbewegungen unterschieden: (1) Gestikulation (gesticulation), (2) mit der Sprache verschränkte Handbewegungen, die Satzbausteine ersetzen (language-like gestures), (3) Sinnbilder (emblems), (4) pantomimische Darstellungen (pantomimes) und (5) Zeichensprachen (sign languages). McNeill reserviert den Begriff *Geste* in seinen Arbeiten für Handbewegungen der ersten Kategorie: „Gestures in this sense are idiosyncratic spontaneous movements of the hands and arms accompanying speech. An example is the hand rising upward while the speaker says ‘and he climbs up the pipe.’ Gestures (gesticulation) almost never occur in the absence of speech“ (McNeill 1992, S. 37). Diesem Verständnis von *Geste* schließt sich die vorliegende Studie an. Die Handbewegungen der zweiten Gruppe aus Kendons Kontinuum treten zwar auch während des Sprechens auf, ersetzen aber Bausteine des verbal ausgedrückten Satzes, ihnen kommt im Satz eine grammatische Funktion zu (Bsp.: „Sollen wir dann mal so langsam *(trippelnde Bewegung mit allen Fingern der rechten Hand, die Hand wird dabei vor dem Körper von rechts nach links bewegt)*“; die Geste ersetzt das Verb „gehen“). Dies geht über ein Begleiten der Sprache hinaus, das Gesten oben zugeschrieben wurde. Als Sinnbilder (3) werden konventionalisierte Handbewegungen bezeichnet – z. B. Daumen-hoch für OK. Aufgrund der Konventionen werden diese von McNeill nicht als Gesten aufgefasst. Bei pantomimischen Darstellungen ist keine Sprache erlaubt, die Handbewegungen sind nicht konventionalisiert. Sie bestehen häufig aus einer Abfolge von mehreren Handbewegungen, die zusammen genommen Objekte oder Handlungen darstellen. Über die Abwesenheit von Sprache bei pantomimischen Darstellungen hinaus unterscheidet sie dies nach McNeill (1992,

S. 37) von Gesten, da Gesten sich nicht miteinander zu einem neuen Ganzen verbinden. Die letzte Kategorie, die Zeichensprachen, stellt ein hoch konventionalisiertes System von Bewegungen der Hände dar. Aufgrund von festgelegten Bedeutungen für die verwendeten Zeichen, dem Vorhandensein einer Grammatik und weiteren Eigenschaften, die Zeichensprachen mit gesprochenen Sprachen teilen, werden sie als eigene Sprachen eingestuft. Für Kendons Kontinuum als Ganzes stellt McNeill folgendes fest: „First, the degree to which speech is an obligatory accompaniment of gesture[3] *decreases* from gesticulation to signs. Second, the degree to which gesture shows the properties of a language *increases*“ (McNeill 2005, S. 5; Hervorhebungen im Original, Fußnote hinzugefügt).

Goldin-Meadow (2005, S. 4 f.) bezieht sich bei der Abgrenzung der Gesten von anderen Handbewegungen auf ein Schema zur Klassifikation von nonverbalem Verhalten von Ekman und Friesen (1969) und analysiert dessen Kategorien hinsichtlich Intentionalität, Konventionen und dem Erfordernis von Sprache. Sie kommt zu folgendem Schluss: „It is precisely because gestures are produced as part of an intentional communicative act (unlike adaptors[4]) and are constructed at the moment of speaking (unlike emblems[5]) that they are of interest to us. They participate in communication, yet they are not part of a codified system. As such, they are free to take on forms that speech cannot assume and are consequently free to reveal meanings that speech cannot accommodate“ (Goldin-Meadow 2005, S. 5). Damit kommt sie im Wesentlichen zu demselben Ergebnis wie McNeill (2005, S. 9), der aufgrund seiner Überlegungen zu Kendons Kontinuum Sprache und Gestik in einem System verbunden sieht, in welchem sie, sich gegenseitig ergänzend, ihren jeweils eigenen Zweck erfüllen.

Goldin-Meadow (2005) gibt noch weitere Bewegungen der Hände wäh-

[3]Hier wird das Wort *gesture* von McNeill noch allgemein für jegliche Form der Handbewegung verwendet.

[4]Goldin-Meadow (2005, S. 4f.) gibt dafür u. a. folgende Beispiele: sich über das Haar streichen, die Brille die Nase hochschieben, auch wenn sie eigentlich schon vorher perfekt sitzt. Sie führt aus: „Adaptors are performed with little awareness and no intent to communicate (Ekman and Friesen 1969).“ Es handelt sich um Angewohnheiten.

[5]In dieser Kategorie stimmen Kendon und Ekman und Friesen überein, sie wurde oben als *Sinnbilder* übersetzt.

rend des Sprechens an, die keine Gesten darstellen. Werde z. B. während des Sprechens ein Marmeladenglas aufgeschraubt, so sei dies eine Handlung an einem Objekt und daher nicht als Geste zu aufzufassen (Goldin-Meadow 2005, S. 8). Außerdem dürfe die Hand auch z. B. nicht zum Ausmessen einer Länge benutzt werden, da sie dann wie ein anderes dingliches Objekt als Werkzeug verwendet würde (Goldin-Meadow 2005, S. 13). Diese Aspekte könnten für die vorliegende Studie relevant werden, da die Schülerinnen und Schüler stets Material zur Verfügung haben, das zunächst zum Handeln anregt.

Die bisherigen Ausführungen stellen einen Definitionsversuch von Gestik durch Abgrenzung von anderen Handbewegungen dar. Ein aspektreicheres Positiv-Bild der „idiosyncratic spontaneous movements of the hands and arms accompanying speech“ (McNeill 1992, S. 37, s. auch oben) soll nun die genauere Betrachtung verschiedener Arten von Gesten liefern. Ihnen wird ein eigener Abschnitt gewidmet, da sie für die vorliegende Studie wichtige Beschreibungsmittel sein werden.

Verschiedene Arten von Gesten

Es gibt verschiedene Arten, Gesten zu klassifizieren. Gegenüberstellungen verschiedener Schemata lassen sich beispielsweise bei McNeill (1992, S. 75 ff.) oder Goldin-Meadow (2005, S. 6) nachlesen. Diesen kann man entnehmen, dass die Schemata gleiche Wurzeln haben und sich daher hauptsächlich im Feinheitsgrad der Einteilung unterscheiden. Hier soll das Klassifikationsschema von McNeill (1992) vorgestellt werden, welches für Studien der Gestik in Nacherzählungen von Zeichentrickfilmen entwickelt wurde, aber mittlerweile auch zur Untersuchung der spezifischen Gestik beim Sprechen über mathematische Inhalte herangezogen wurde und diesbezüglich eine erste Weiterentwicklung erfahren hat (s. Edwards 2009).

McNeill (1992, S. 76 ff.) unterscheidet vier Haupttypen von Gesten: *iconics*, *metaphorics*, *deicitcs (pointing)* und *beats*. Unter **ikonischen Gesten** (iconics) versteht er solche, die eine enge Verwandtschaft mit der Bedeutung des begleitenden Sprechakts aufweisen. Goldin-Meadow (2005, S. 7) führt dazu aus: „In general, iconic gestures represent body movements, movements of objects or people in space, and shapes of objects or people. They do so concretely and relatively transparently.“ Ein einprägsames Beispiel ist ein rotierender aufgerichteter Zeigefinger eines Sprechers und eine gleichzeitige Aufwärtsbewegung der Hand, während er erzählt, eine Wendeltreppe hinaufgegangen zu sein.

Edwards (2009, S. 138 f.) konnte McNeills ikonische Gesten für das Sprechen über mathematische Inhalte weiter ausdifferenzieren in **ikonisch-materielle** (iconic-physical) und **ikonisch-symbolische** (iconic-symbolic) Gesten. Hierbei versteht sie unter ikonisch-materiellen Gesten die Gesten, die McNeill als ikonisch bezeichnet hat, die also konkrete Objekte oder Formen darstellen. Neu hinzu kommen die ikonisch-symbolischen Gesten. Edwards beschreibt ihre Beobachtungen, die sie zu diesem neuen Typ führten, so: „the students used iconic gestures to communicate about abstract or general mathematical objects or processes (fractions, addition, etc.), using gesture to evoke the symbolic expressions that are used to represent the mathematics“ (Edwards 2009, S. 137). Man stelle sich z. B. vor, wie ein Schüler die Vorgehensweise bei der Division durch einen Bruch erklärt: „Um irgendeine Zahl durch einen Bruch *(formt mit Daumen und Zeigefinger der linken Hand ein C, so als würde er dazwischen etwas festhalten; der Daumen ist unten, der Zeigefinger oben, die übrigen Finger sind eingerollt)* zu dividieren, muss man sie mit dem Kehrwert des Bruches *(dreht die linke Hand, so dass der Zeigefinger nach unten und der Daumen nach oben kommt)* multiplizieren“. Der Schüler deutet in seinen Gesten die symbolische Erscheinungsform eines Bruches und die Vorgehensweise bei der Kehrwertbildung an. Folgende Aspekte werden erkennbar: der Bruch besteht aus zwei Zahlen, die räumlich übereinander angeordnet sind (der Bruchstrich wird nicht dargestellt) und die Kehrwertbildung wird als Umdrehen des Bruches verstanden.

Metaphorische Gesten (metaphorics) teilen mit ikonischen das Bildhafte, stellen aber etwas Abstraktes und keine konkreten Objekte oder Formen dar (vgl. McNeill 1992, S. 80). McNeill (1992, S. 80) zeigt auf, dass sie naturgemäß komplexer sind als ikonische Gesten: „Whereas an iconic gesture depicts some concrete event or object by creating a homology to aspects of the event/obeject, a metaphoric must depict two things. There is the Base (this term is from Mandel 1977), which is the concrete entity or action that is actually presented in the gesture. An example is a gesture presenting the concept of a question as a cupped hand: the Base is this cup, iconically depicted in the gesture. There is also the Referent (Mandel 1977), which is the concept that the metaphoric gesture Base is presenting: the concept of a question or of the answer (in either case, an abstract concept).“ Metaphorische Gesten entstehen also durch Überlagerung von ikonischen Gesten mit neuer Bedeutung (Parrill & Sweetser 2004, S. 216).

Deictics sind **Zeigegesten**, die innerhalb einer Kultur zwar eine Standardform besitzen (z. B. ausgestreckter Zeigefinger und zusammengerollte übrige Finger in Nordamerika und Europa), aber auch verstanden werden, wenn sie von dieser Standardform abweichen, z. B. Zeigen mit zwei ausgestreckten Fingern, der ganzen Hand oder sogar der Nase (vgl. McNeill 1992, S. 80). Zeigegesten kommen zum Teil auch ohne begleitende Sprache aus – hauptsächlich in Fällen, in welchen sie auf konkrete Objekte, Personen oder reale Orte verweisen. McNeill (1992, S. 173) beobachtete in den Nacherzählungen der Zeichentrickfilme aber auch **abstrakte Zeigegesten** (abstract poining), bei welchen der Sprecher in den leeren Raum zu zeigen scheint, tatsächlich aber einem gedachten Objekt einen Ort im realen Raum zuweist, auf welchen er durch Zeigen verweisen kann. „Abstract pointing is a species of metaphoric gesture, where space and a locus within it are used to present a nonspatial meaning“ (McNeill 2005, S. 40).

Rhythmische Gesten (beats) erinnern an das Schlagen des Taktes in der Musik: „The hand moves along with the rhythmical pulsation of speech“ (McNeill 1992, S. 15), wobei rhythmische Gesten unabhängig vom Inhalt gleich bleiben. Nach McNeill haben sie eine Funktion, die derjenigen des Textmarkers für geschriebenen Text ähnelt: sie können Wörter aus dem Sprachfluss hervorheben (vgl. McNeill 1992, S. 169) und damit ihre Relevanz für die Gesamtaussage unterstreichen (vgl. McNeill 1992, S. 15). Beispielsweise werden das Auftreten neuer Charaktere in einer Erzählung, das Zusammenfassen einer geschilderten Handlung oder die Einführung neuer Inhalte in der Regel durch rhythmische Gesten begleitet (ebd.).

Gesten und die sie begleitende Sprache werden stets im Zusammenhang gedeutet (vgl. z. B. McNeill 1992, S. 76). Da Gesten und Sprache aber auf sehr verschiedene Arten Informationen übermitteln, kann es aufschlussreich sein, die durch die Gesten gegebene Information derjenigen aus dem Sprechakt gegenüberzustellen. Die Untersuchungen von Church und Goldin-Meadow (1986) haben in dieser Hinsicht ergeben[6], dass sich das Verhältnis zwischen Inhalt der Sprache und Inhalt der Gestik zwischen zwei Polen bewegt: (1) Die Geste stellt eine Information, die auch durch die Sprache gegeben wird, auf ihre Weise dar. Dieser Fall wird als **gesture-speech-match** bezeichnet. (2) Die Geste liefert eine Information, die über den Inhalt des Gesprochenen hinausgeht, bzw. gibt sogar ganz andere Informationen. Dies wird als **gesture-speech-mismatch** bezeichnet. Um Missverständnissen des Begriffs *mismatch* vorzubeugen, stellt Goldin-Meadow (2005, S. 26) klar: „The term 'mismatch' adequately conveys the notion that gesture and speech convey different information. For many, however, 'mismatch' also brings with it the notion of conflict, a notion that I do not intend.“ Das oben gegebene Beispiel der Geste zum Bericht über das Hinaufgehen einer Wendeltreppe fällt in die Kategorie gesture-speech-match. Änderten wir es etwas ab, so dass verbal nur die Information gegeben würde, dass man eine Treppe hinaufgestiegen sei, so würde der spiralförmige Weg der Geste eine neue Information liefern – nämlich, dass es sich bei der Treppe um eine Wendeltreppe handelte. Dies wäre also ein gesture-speech-mismatch.

Diese Unterscheidung liefert eine weitere Sicht auf die Auftretensformen von Gestik, die quer liegt zu den Kategorien *iconics*, *metaphorics*, *deicitcs (pointing)* und *beats*. Im folgenden Abschnitt wird u. a. diskutiert, welche Bedeutung das Auftreten von mismatches haben kann.

Bedeutung von Gestik – allgemeine Gesichtspunkte

In der Einleitung wurde mit Verweis auf erste Analysen der Gruppenarbeitsprozesse zu *Knack die Box* festgestellt, dass die Gestik für das Verständnis der verbalen Äußerungen der Lernenden z. T. unabdingbar ist

[6] gemäß Darstellung in Goldin-Meadow (2005, S.26)

und sie deshalb in den Analyse-Kanon dieser Studie mit aufgenommen werden soll. Die Darstellung ausgewählter empirischer Forschungsergebnisse zur Gestik soll im Folgenden zeigen, dass eine Analyse der Gestik darüber hinaus noch tiefer gehendes Erkenntnispotential für die vorliegende Studie in sich birgt. Als Grundlage für diese Darstellung wird das Buch *Goldin-Meadow (2005): Hearing Gesture – How Our Hands Help Us Think* herangezogen. Auf dieses sei auch im Hinblick auf eine genauere Darstellung der Studien verwiesen, hier werden im Wesentlichen nur die Ergebnisse referiert.

Für die Forschung ermöglichen Gesten Einblicke in das Denken, die von der Sprache verwehrt bleiben. Goldin-Meadow (2005) sieht in Gesten „A Window on the Mind“ (Titel des ersten Teils des Buches). In diesem Zusammenhang geht sie insbesondere auf die Reichhaltigkeit von gesture-speech-mismatches ein, da Gesten in mismatches andere Informationen liefern als die sie begleitende Sprache. Studien haben gezeigt, dass die Gestik in mismatches (neue) Ideen ausdrücken kann, die dem sprachlichen Ausdruck noch nicht oder zumindest momentan nicht zur Verfügung stehen (vgl. ebd. S. 29). Dagegen zeigen sich Zusammenhänge, die sprachlich ausgedrückt werden, in der Regel auch in der Gestik. Goldin-Meadow erklärt diese Asymmetrie dadurch, dass sie Gesten als **Eingangstor zu einem neuem Gebiet** für Lernende ansieht (vgl. ebd. S. 57). Forschende können in Gesten also neue Ideen Lernender entdecken, die sich noch nicht ihren Weg in die sprachliche Darstellung gebahnt haben.

Der Inhalt von Gesten kann aber nicht nur von Forschern gelesen werden, die diese absichtsvoll analysieren, sondern wird auch vom Gegenüber in Kommunikationssituationen wahrgenommen und gedeutet. Goldin-Meadow (2005, S. 95) fasst das gemeinsame Ergebnis verschiedener Studien zur Wahrnehmung von Gesten wie folgt zusammen: „... we find that **everyone can read gesture**, even one-year-olds. ... Gestures not only display information but communicate that information to listeners“ (Hervorhebung hinzugefügt). Gesten, die Lernende in einer Interaktionssituation produzieren, können für diese also relevant werden.

Goldin-Meadow (2005) zeigt anhand einer Studie mit von Geburt an Blinden auf, dass die Bedeutung von Gestik über den Zweck der Kommunikation noch hinausgehen muss: „The blind group gestured at the same rate as the sighted group, and conveyed the same information using the same range of gesture forms“ (Goldin-Meadow 2005, S.142). Die Blinden gestikulierten sogar auch gegenüber ebenfalls blinden Zuhörern. Goldin-Meadow schließt daraus, dass Gestik also nicht nur als Mittel zur Kommunikation produziert werden kann, da die blinden Zuhörer sie gar nicht sehen können, und Gesten auch nicht nur durch Beobachtung anderer erlernt und dann rein aus Gewohnheit erzeugt werden können, da von Geburt an Blinde nie jemanden haben gestikulieren sehen (ebd. S. 142 f.). „Gesture thus appears to be integral to the speaking process itself, and the mechanism by which gesture is produced must be tied in some way to this process“ (ebd. S. 144). Dadurch motivierte Studien zur Untersuchung des Effekts der Gesten für den Sprechenden selbst, konnten zeigen, dass der **kognitive Aufwand des Sprechenden geringer** ist, wenn er gestikulieren darf, als wenn er daran gehindert wird (ebd. S. 153). Bisher konnte jedoch keine Studie nachweisen, *wie* Gestik den kognitven Aufwand eines Sprechenden verringern kann, es gibt lediglich verschiedene Hypothesen (s. dazu ebd. S. 166). Goldin-Meadow geht trotzdem noch einen Schritt weiter: „The suggestion here is that gesture doesn't just reflect the incipient ideas that a learner has, but actually **helps the learner formulate and therefore develop these new ideas**. In other words, the course of cognitive change is different by virtue of the fact that the learner gestures“ (ebd. S. 167 f., Hervorhebung hinzugefügt). Nach der Darstellung einiger diesbezüglicher Studien kommt sie zu dem Schluss, dass die These über die bisherigen Indizien hinaus noch stärker empirisch belegt werden müsste (ebd. S. 188), führt aber noch verschiedene Argumente an, die auch aus theoretischer Sicht dafür sprechen, dass Gestik das Lernen besonders günstig beeinflussen könnte (ebd. S. 184 ff.). Davon erscheinen die folgenden Argumente für die vorliegende Studie wesentlich. Zum einen hebt Goldin-Meadow (2005, S. 184 f.) hervor, dass Gesten Informationen auf mehrere Weisen gleichzeitig repräsentieren – visuell-räumlich (für Sprecher und Zuhörer) und motorisch (nur für den Sprecher) – und dadurch die Darstellungs- und Wahrnehmungsmöglichkeiten für den Sprecher erweitern. Da sie darüber hinaus nicht linear aus Teilen zusammengesetzt werden, sondern ganzheitliche Bilder geben, und keinen konventionalisierten Formen unterliegen, erlauben sie Sprechern „to **convey thoughts that may not easily fit into the categorical system that their conventional language offers** (Goldin-Meadow and McNeill 1999)" (Goldin-Meadow 2005, S. 185, Hervorhebung hinzugefügt). Dies erscheint für Lernprozesse zuträglich zu sein. Zum anderen sieht Goldin-Meadow in Gesten einen möglichen Mittler zwischen Sprache und Handlung, der Lernprozesse ebenfalls positiv unterstützen könnte: „Gesture reflects knowledge that, in a sense, is **halfway between performing a procedure and describing that procedure using a conventional linguistic code**" (ebd., S. 187, Hervorhebung hinzugefügt). Sie stellt dies in den Kontext der Theorie der Embodied Cognition: „A growing group of researchers have come to believe that ... meaning derives from the biomechanical nature of bodies and perceptual systems and, in this sense, is embodied (Glenberg 1997). If so, gesture may be an overt depiction of the action-meaning embodied in speech, and a halfway point in this sense" (ebd.).

Bedeutung von Gestik beim Sprechen über Mathematik

Mittlerweile liegt eine Reihe von Untersuchungen vor, die speziell die Gestik beim Sprechen über Mathematik in den Blick nehmen. Eine kurze Zusammenschau einiger Forschungsergebnisse soll im Folgenden darlegen, welche Besonderheiten in der Gestik beim Sprechen über Mathematik sich bisher gezeigt haben und welche Bedeutung von Gestik sich in diesem Zusammenhang abzeichnet.

Edwards (2009) beobachtete in ihren Interviews mit Studierenden des Grundschullehramts, denen sie verschiedenartige Fragen zum Thema Bruchzahlen stellte (z. B. Erinnerungen an eigene Schulzeit, Bruchzahlen im Alltag, Vergleich von Bruchzahlen, Grundrechenarten mit Bruchzahlen, Definition einer Bruchzahl), einen erhöhten Anteil an metaphorischen und einen verminderten Anteil an ikonischen Gesten gegenüber den Häufigkeiten in den Nacherzählungen der Zeichentrickfilme aus McNeills Studien (McNeill 2005, S. 42). Sie schreibt dazu: „in the 'cartoon' narratives, 41% of the gestures were primarily iconic and only 2% primarily metaphoric, as compared with 23% and 26% respectively, for the fraction interviews“ (Edwards 2009, S. 131 f.). Edwards führt den hohen Anteil an metaphorischen Gesten auf den abstrakten Charakter der Mathematik zurück, der sich bereits in einem solch elementaren Thema wie Bruchzahlen offenbare (ebd. S. 139). Dies steht in Einklang mit den Überlegungen von Roth (2001), der metaphorischen Gesten für die Darstellung abstrakter Konzepte ein hohes Potential zuschreibt: „Metaphorical gestures literally allow the embodiment of theoretical entities never available to perception“ (ebd., S. 383). Damit bergen sie für eine Wissenschaft wie die der Mathematik, die sich rein gedanklichen Objekten verschrieben hat, viel versprechendes Potential.

Neben der bereits oben beschriebenen Ausdifferenzierung der ikonischen Gesten konnte Edwards (2009) des Weiteren außerdem noch beobachten, wie Anschauungsmaterialien, mit denen die Studierenden einmal gearbeitet haben müssen, in ihrer Gestik in den Interviews wieder Gestalt annahmen – häufig sehr detailgetreu hinsichtlich der ihnen innewohnenden Strukturen (ebd., S. 136). Dies weist für sie darauf hin, dass die Bedeutung dieser Gesten über „simple imagistic illustrations of students' experiences with hands-on materials in learning about fractions“ (Edwards 2009, S. 136) hinausgehe. Die Hervorhebung der den Materialien innewohnenden Strukturen ließe vielmehr vermuten, dass in den Gesten *material anchors* (Hutchins 2005, vgl. hier Kap. 2.2) wieder Gestalt annähmen.

Roth (2001) und Radford (2009) beschreiben verschiedene Stadien der Entwicklung von Handlungen und Gesten in Kommunikationssituationen zu mathematischen Themen. Radford (2009) beschreibt den Übergang von Handlungen zu Gesten („actions become shorter and gestures and language become more relevant“, S. 121) und deutet an, dass die Gestik in einer darauf folgenden Phase abnimmt und die sprachlichen Anteile wichtiger werden (ebd., S. 122). Roth (2001, S. 376) beschreibt mit Blick auf eine gemeinsame Arbeit mit einem Kollegen noch genauer, *wie* sich die Gesten verändern: „... gestures, which are initially similar to action sequences, substantially shorten and represent actions in metonymic form“.

Den bisher aufgeführten Studien ist die Frage gemeinsam, wie und in welchen Situationen Gesten in Gesprächen über mathematische Inhalte verwendet werden. Im letzten Absatz wird darüber hinaus noch ein weiterer Fokus bisheriger Forschungsprojekte deutlich: die Entwicklung von Gesten in Unterrichtssituationen im Zusammenspiel mit anderen Ausdrucksmodalitäten. Diesem Thema widmet sich auch der Aufsatz von Arzarello, Paola, Robutti und Sabena (2009), der speziell das Potential der Lehrperson für die Entwicklung der verschiedenen Ausdrucksmodalitäten in den Blick nimmt: Arzarello et al. (2009) beschreiben Prozesse in Lehr-Lern-Situationen, in welchen Lehrpersonen Gesten der Lernenden aufgreifen, ihre Äußerungen aber mittels mathematischer Fachsprache umformulieren, als *semiotic game* (s. z. B. S. 106). Dieses Spiel mit den verschiedenen Ausdrucksmodalitäten „supports the students towards a correct scientific meaning“ (ebd.).

Abschließend sollen nun noch Radfords Befunde (2003, 2010) speziell zur Gestik Lernender auf dem Weg zum algebraischen Denken aufgeführt werden. Er nähert sich sowohl der Rolle der Gestik in diesem Lernprozess wie auch der Entwicklung des Zusammenspiels von Gestik und anderen Ausdrucksmodalitäten. Radford (2010) berichtet, dass Gesten in der Kategorie des *Factual Algebraic Thinking*[7] sehr präsent seien (ebd., S. XL), während sie bereits im *Contextual Algebraic Thinking* von einer verfeinerten Sprache abgelöst würden („... rhythm and gestures have been replaced by key descriptive terms“, ebd., S. XLI) und im *Symbolic Algebraic Thinking* nicht mehr möglich seien („... previously, the students could resort to a range of semiotic resources, like pointing and iconic gestures, deictics, adverbs, etc. Those rich semiotic resources do not have a place in the alphanumeric based algebraic formulas“, ebd., S. XLI f.). Zur Funktion der Gestik in Fallbeispielen, die er dem *Factual Algebraic Thinking* zuordnet, schreibt Radford (2003, S. 49): „Rhythm and movement here play the role of the adverb always“, und an anderer Stelle (Radford 2010, S. XL): „The algebraic formula consists ... in a piece of embodied action. ... The grasping of the regularity and the imagining of the figures in the course of the generalization results from, and remains anchored in, a profound sensuous mediated process – showing

[7]Radfords Klassifikation algebraischen Denkens in die Formen *Factual Algebraic Thinking*, *Contextual Algebraic Thinking* und *Symbolic Algebraic Thinking* wurde bereits in Kapitel 1.2 vorgestellt.

thereby the multi-modal nature of algebraic thinking“. Die Gestik hilft den Lernenden in der Phase des *Factual Algebraic Thinking* also die Allgemeinheit auszudrücken.

Gesten bieten Lernenden der Mathematik also die Chance, Gedanken, die der Sprache noch nicht zugänglich sind, auszudrücken und wahrzunehmen. Aber auch für ausgebildete Mathematiker eröffnen metaphorische Gesten offenbar die Möglichkeit, gedanklichen, abstrakten Konzepten in gewisser Hinsicht Gestalt zu verleihen. Insgesamt erscheint vor dem Hintergrund der bisherigen Forschung also der Aspekt der Verankerung des Denkens in der äußeren Welt für die Mathematik zentral zu sein.

Die Rolle von Gesten als Anker des Denkens in der äußeren Welt soll in der vorliegenden Studie im Hinblick auf die hier gewählte Einführung in die Algebra noch näher untersucht werden. Neben einem Blick auf die Funktion der Gesten für die Kommunikation in der Gruppe und der Suche in der Gestik nach Aufschluss über Gedanken, die sprachlich nicht oder nicht vollständig von den Lernenden ausgedrückt werden, wird es insbesondere interessant sein zu analysieren, wie das zur Verfügung stehende Material in die Gesten einbezogen wird und in welchem Verhältnis Gesten und Handlungen am Material stehen.

Kapitel 3

Das Forschungsanliegen

In der Einleitung wurde folgende für die Studie zentrale Frage formuliert:

Wie entwickeln sich Vorläuferformen zum Variablenbegriff in einer Lernumgebung zur Einführung in die Algebra, die den Schülerinnen und Schülern Erfahrungen mit Zahlenbeziehungen in einem konkret-gegenständlichen Kontext ermöglicht?

Dabei wurden zwei Beobachtungsschwerpunkte herausgestellt: *Die Rolle des Materials und die in der Auseinandersetzung mit dem Material vorgenommenen Deutungs- und Umdeutungsprozesse* sowie *Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander*. Vor dem Hintergrund der ersten beiden Kapitel werden wir nun eine Konkretisierung dieses Forschungsanliegens vornehmen und das Ziel der vorliegenden Arbeit erläutern.

Zunächst werden konkrete Forschungsfragen hinsichtlich der beiden Beobachtungsschwerpunkte formuliert:

- ***Welche Rolle spielt das konkret-gegenständliche Material?***
  - *Wie wird das Material genutzt? Wie wird darauf Bezug genommen? Erscheint es in epistemologischen Analysen als zu deutendes Zeichensystem oder als Referenzkontext?*
  - *Welche Variablenrollen werden durch den Kontext angeregt? Nehmen Teile des Materials kontextspezifisch selbst stellvertretende*

  Funktionen im Sinne von Variablen wahr? Falls ja, welche Rollen können für diese Stellvertreter identifiziert werden?
  - *Welche Denkhandlungen und ways of thinking spielen eine Rolle?*
  - *Inwiefern wird das Material zum material anchor eines sich entwickelnden Variablenbegriffs?*
  - *Erfolgt eine Ablösung vom Konkreten? Wenn ja, wie?*

- ***Welchen Einfluss hat die Interaktion der Lernenden untereinander?***
  - *Inwiefern wird der Lösungsprozess durch die Gruppeninteraktion vorangetrieben?*
  - *Was trägt die Interaktion insbesondere zur Ablösung vom Konkreten bei, die für die Entwicklung des Variablenbegriffs entscheidend ist?*

Aus der Untersuchung des empirischen Materials im Hinblick auf die zentrale Frage mit ihren beiden Beobachtungsschwerpunkten hat sich im Laufe der Studie das folgende konkrete Forschungsziel für diese Arbeit ergeben:

Die Charakterisierung von Vorläuferformen algebraischen Denkens als flexible, epistemologische Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen (semiotischer Systeme)

- ***in Übergängen von konkreten Handlungen zu flexiblen, mathematischen Operationen bzw.***
- ***in Prozessen von Verallgemeinerung und Abstraktion***

unter Betrachtung ihrer Entwicklung in sozialer Interaktion.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe lösen sich die Schülerinnen und Schüler idealerweise irgendwann vom probierenden Handeln mit dem konkret-gegenständlichen Material und führen ihren Lösungsprozess auf Zahlenebene fort. In den Übergängen von konkreten Handlungen mit dem gegenständlichen Material zu flexiblen, mathematischen Operationen finden dann epistemologische Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen statt: die

Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es in der Aufgabe nicht um das konkret-gegenständliche Material, sondern um die damit dargestellte Struktur geht – sie können die Darstellung im semiotischen System der Boxen und Bohnen also als Sinnbild für eine mathematische Struktur deuten. Dazu müssen sie von der Konkretheit der Situation in mehrfacher Hinsicht absehen – z. B. in Boxen Stellvertreter für Bohnenanzahlen sehen, Bohnenanzahlen als Darstellungmittel für Zahlen betrachten, sich von der Forderung der Aufgabenstellung, die konkreten Boxen tatsächlich zu befüllen, lösen. Diese Umdeutungsprozesse verlaufen in Prozessen von Verallgemeinerung und Abstraktion und werden zum Teil durch die Konfrontation mit Deutungen der Mitschülerinnen und -schüler angestoßen oder müssen sich in der sozialen Interaktion bewähren. Durch die Umdeutungsprozesse können eine metaphorische Verwendung und Betrachtung der Boxen erreicht werden, die einen ersten Schritt in Richtung einer abstrakten Vorstellung von Variablen darstellen.

Die empirischen Analysen der vorliegenden Arbeit werden helfen, diese epistemologischen Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen zu charakterisieren: Wie gestalten sich die Übergänge von konkreten Handlungen zu flexiblen, mathematischen Operationen? Welche Prozesse von Verallgemeinerung und Abstraktion sind zu beobachten? Inwiefern begünstigen die Interaktionen der Lernenden untereinander die Umdeutungsprozesse?

Kapitel 4

Der methodische Zugriff

Man sollte die Dinge so nehmen wie sie kommen. Aber man sollte auch dafür sorgen, dass sie so kommen, wie man sie nehmen möchte.
Curt Goetz

4.1 Entscheidungen

Die vorliegende Studie will der Art und Weise der Entwicklung des algebraischen Denkens im Unterricht auf den Grund gehen. Sie stellt demnach ‚Wie-Fragen' und hat eine möglichst differenzierte Beschreibung des Vorgangs zum Ziel. Voigt (1996, S. 388) hat ausgeführt, dass sich für Studien dieser Ausrichtung des Erkenntnisinteresses ein interpretatives Vorgehen anböte, während Untersuchungen, die sich damit beschäftigten, *ob* im Vorfeld aufgestellte Hypothesen zuträfen, quantitative Test-Methoden wählen könnten. Nun werden Studien forschungsmethodisch häufig auch mit Hilfe der Begriffe ‚*qualitativ*' und ‚quantitativ' klassifiziert. Jungwirth (2003, S. 189) schreibt über das Verhältnis der Attribute ‚interpretativ' und ‚qualitativ': „‚Interpretativ' rekurriert stärker auf das Menschen- und Weltbild im Hintergrund, während sich ‚qualitativ' mehr auf die Methodologie und ihre Andersartigkeit im Vergleich zur quantitativen Forschung bezieht. ... Eine klare Trennung oder Hierarchisierung der Begriffe ist m.E. nicht möglich."

Jungwirth (2003, S. 189) hebt auch heraus, dass die Methode zwar aus der Fragestellung abgeleitet werden solle, diese jedoch ihrerseits auch nicht beliebig wählbar sei, sondern durch „die generelle Auffassung von der Welt und dem Menschen ... in bestimmte Bahnen“ (ebd.) gelenkt werde. Diese Feststellung findet man in modifizierter Form auch bei Voigt: er beschreibt eine „veränderte Grundauffassung von Mathematikunterricht ..., welche zur Bevorzugung interpretativer Methoden führt: Mathematikunterricht wird nicht als ein quasi naturwissenschaftlicher Prozeß betrachtet, sondern als ein Ort der Sinnherstellung, als ein Ort subjektiver Konstruktionen und sozialer Konstitutionen mathematischer Bedeutungen“ (Voigt 1996, S. 387). Mit der in Kapitel 2.1 dargestellten erweiterten epistemologisch interaktionistischen Sichtweise auf mathematische Lernprozesse nimmt die vorliegende Arbeit diese Grundauffassung für sich an.

Demnach ist die Entscheidung für interpretative Methoden in dieser Studie in zweierlei Hinsicht gerechtfertigt: sie lässt sich aus der Fragestellung ableiten und ergibt sich aber auch bereits aus der eingenommenen Perspektive auf mathematische Lernprozesse.

4.2 Gestaltung der Datenerhebung

Aus dem Forschungsanliegen und dessen beiden Beobachtungsschwerpunkten sowie der Entscheidung für die Arbeit im interpretativen Paradigma ergeben sich einige Konsequenzen für die Gestaltung der Datenerhebung.

- Die Erhebung des empirischen Materials sollte im Rahmen des Mathematikunterrichts stattfinden, wenn die Studie Aussagen über die Entwicklung des algebraischen Denkens in einer *Lern*umgebung treffen will. Eine Interview-Studie erschiene demnach beispielsweise wenig sinnvoll.

- Die speziellen Interessensschwerpunkte, unter welchen die Entwicklung des algebraischen Denkens im Unterricht erforscht werden soll, machen es erforderlich, dass der beobachtete Unterricht bestimmte Bedingungen erfüllt. Zum einen müssen die Lernenden in großem Umfang in Kleingruppen zusammenarbeiten, um den Einfluss der Interaktion der Lernenden untereinander auf die Entwicklung des algebraischen Denkens in den Blick nehmen zu können. Zum anderen muss ein konkret-gegenständlicher Zugang zur Algebra gewählt sein, um die Rolle konkreten Materials im Lernprozess erörtern zu können. Um beides sicherzustellen, wird nicht alltäglicher Algebra-Unterricht untersucht, sondern es wird eine entsprechende Unterrichtsreihe mit ihren Materialien vorgegeben, die dann von den Lehrpersonen in ihren Klassen durchgeführt wird.

- Im interpretativen Paradigma wird häufig mit Transkripten von Interaktionssituationen gearbeitet. Dies soll hier auch geschehen. Als Grundlage dafür erscheinen in der vorliegenden Studie Video-Aufzeichnungen passend, da sie neben den verbalen Äußerungen der Lernenden auch die Arbeit mit dem Material festhalten.

Diese Forderungen werden in der Studie wie folgt zu erfüllen versucht: eine den Interessen der Arbeit entsprechend gestaltete Unterrichtsreihe (s. Kap. 5) wird in drei siebten Klassen an Gymnasien durchgeführt. Ich beschränke mich auf Gymnasialklassen, um im oberen Bereich des Leistungsspektrums auszuloten, was im Bereich des Möglichen für den gewählten Zugang zur Algebra liegt. Die Termine werden nacheinander angesetzt, so dass dazwischen die Option für kleine Überarbeitungen der Unterrichtsreihe besteht. Die Lehrpersonen der Klassen führen den Unterricht nach Absprache mit mir durch. Ich gebe zwar auch methodische Hinweise zum Umgang mit den Aufgaben und dem Material (z. B. welche Aufgaben sollen in Gruppen, welche allein (als Hausaufgabe) bearbeitet werden), trotzdem ist aber natürlich zu erwarten, dass die Lehrerpersönlichkeiten Einfluss auf die Detailumsetzung der Unterrichtsreihe nehmen werden. Es stört jedoch nicht, dass auf diese Weise die empirischen Daten für die Studie in leicht unterschiedlichen Settings erhoben werden, solange die Grundideen der Unterrichtsreihe – ausgeprägte Gruppenarbeitsphasen und Bearbeitung der Aufgaben mit Hilfe von konkretem Material – tragend bleiben; dieses Zugeständnis muss außerhalb einer Laborsituation gemacht werden. Die Lehrpersonen stellen in ihren Klassen feste Vierergruppen zusammen, die über die ganze Unterrichtsreihe hinweg zusammen arbeiten werden. Die Gruppenbildung erfolgt in einer Weise, die erwarten lässt, dass die Gruppenmitglieder gut und problemlos zusammenarbeiten werden. In jeder Klasse werden zwei der Gruppen über die ganze Zeit hinweg gefilmt. Die kontinuierliche Beobachtung fester Gruppen während der gesamten Unterrichtsreihe scheint vor dem Leitgedanken *Lernen als individuelle und aktive Konstruktion von Wissen in sozialer Interaktion* geboten, um Veränderungen in den Lernprozessen ausmachen zu können.

4.3 Auswertungsmethoden

Es ist unmöglich, die durch die beschriebene Erhebung erhaltene Datenfülle im Rahmen der hier vorgestellten Studie in ihrer Gesamtheit zu analysieren. Die Aufzeichnung der Arbeit je zweier Schülergruppen in den drei Versuchsklassen über aller Stunden hinweg ist zunächst aber dennoch sinnvoll, um den Forschungsprozess so lange wie möglich offen zu gestalten. Die Auswahl der zu analysierenden Episoden der Schülerarbeit kann so im Nachhinein bei der Sichtung der Videos erfolgen. Für die ausgewählten Episoden werden Transkripte erstellt, mit welchen bei der Analyse gearbeitet wird. Die Bedeutung der in den Transkripten verwendeten Schreibweisen und Sonderzeichen kann im Anhang nachgeschlagen werden.

Die Auswahl der zu analysierenden Episoden, deren Transkription und die Interpretation der Transkripte laufen im Forschungsprozess nicht strikt sequenziell ab, sondern sind miteinander verschränkt. Die Arbeit beginnt mit der Auswahl einer ersten für das Forschungsinteresse vielversprechenden Stelle, deren Transkription und Interpretation. Diese erste Analyse und die dabei gewonnenen Erkenntnisse leiten explizit und implizit die Auswahl einer zweiten Episode. Der weitere Forschungsprozess folgt ebenfalls diesem Vorgehen. Man spricht dabei vom „Prinzip der komparativen Analyse“[1]. „Komparatives Analysieren stellt im Rahmen interpretativer Auswertungsverfahren eine zentrale Aktivität dar. ... GLASER & STRAUSS 1967 ...

[1]Titel des Aufsatzes Brandt und Krummheuer (2000)

sprechen von der 'Constant Comparative Method of Qualitative Analysis' (S. 101). Wie insbesondere auch in Strauss & Corbin 1990 deutlich wird, stellt dabei das Vergleichen von Interpretationen zu verschiedenen beobachteten Realitätsausschnitten eine Haupttätigkeit auf nahezu allen Ebenen der Analyse dar: von der ersten deutenden Annäherung an diese Ausschnitte bis zu späteren theoretischen Durchdringungen" (Brandt & Krummheuer 2000, S. 197 f.). Jungwirth (2003, S. 195) betont in diesem Zusammenhang insbesondere das „Ineinandergreifen von Datenerhebung (oder zumindest Datennutzung, wenn die Daten in einem Durchgang gesammelt wurden) und Datenauswertung ... Wesentlich in dem Prozess ist die systematische Suche nach Vergleichsgruppen ..., um die Struktur und Heterogenität des Gegenstandes angemessen zu rekonstruieren". Es lässt sich also feststellen: „*Komparation* bezeichnet weniger einen einzelnen analytischen Arbeitsschritt, als daß es für einen methodischen Ansatz steht, der den gesamten Forschungsprozeß bestimmt" (Krummheuer & Naujok 1999, S. 67).

Darüber hinaus ist anzumerken, dass auch die Erstellung der Transkripte grundsätzlich bereits selbst ein erster Interpretationsschritt ist. Zwar sollte man sich bei der Erstellung bemühen, „möglichst wenig Interpretationen einfließen zu lassen" (Krummheuer & Naujok 1999, S. 65), wird aber der Tatsache, dass es sich beim Transkript um eine Verschriftlichung eines realen kommunikativen Prozesses handelt, nicht entkommen können (vgl. Krummheuer & Naujok 1999, S. 66). Dies im Bewusstsein behaltend wird die vorliegende Studie sich mit der Interpretation der fertigen Transkripte befassen – wie in der interpretativen Unterrichtsforschung üblich (vgl. ebd.).

In diesem Zusammenhang scheint eine Bemerkung zur Transkription der Gesten angebracht: Dass der Fokus auf die Gestik der Lernenden ein sekundärer bleiben muss, da die Studie sich primär mit der Entwicklung des algebraischen Denkens beschäftigt, wird sich im Feinheitsgrad der Transkription der Gesten widerspiegeln müssen. Die Präzision in der Dokumentation, die man in Studien vorfindet, die sich primär mit der Gestik (in mathematischen Gesprächen) auseinander setzen, kann hier nicht gewährleistet werden, da andernfalls nicht die notwendige Vielfalt an Transkripten hinsichtlich der eigentlichen Forschungsfragen bearbeitet werden könnte. Huth (2009) verwendet z. B. in ihrer mathematikdidaktischen Arbeit zur Gestik in mathematischen Kindergesprächen eine Partiturschreibweise[2], in welcher „Äußerungen ... in Form einer gestischen (gs) und verbalen Zeile (vb) notiert und durch eine möglichst objektive Beschreibung der produzierten Gesten mit Verweis zu den Signifikanzpunkten der Geste ergänzt [werden]. Die Signifikanzpunkte der Gesten ergeben sich aus den angenommenen drei Phasen einer Geste nach Kendon (1980): *Anfangspunkt(°), Kern* der Geste mit einem oder mehreren kommunikativ bedeutungsvollen Signifikanzpunkt(en) (1, 2, ...) und *Endpunkt (°)* der Geste“ (ebd., S. 237). Das Zitat lässt erahnen, wie sich der Aufwand bei der Dokumentation und der inhaltliche Umfang eines so erstellten Transkriptes enorm gegenüber der ohnehin schon zeitintensiven und inhaltlich vielfältigen Transkriptarbeit erhöhen. Hier soll durch Begrenzung sowohl des Aufwands als auch des Umfangs die Konzentration auf die Forschungsfragen zur Entwicklung des algebraischen Denkens gewahrt werden. Mit der Devise „everyone can read gesture“ (Goldin-Meadow (2005, S. 95), s. auch bereits oben) wird davon ausgegangen, dass für die hier verfolgten Ziele durch einen bewussten Lese-Prozess bei der Video-Transkript-Arbeit eine sinnvolle Vorauswahl der inhaltlich besonders aufschlussreichen Gesten von der Forscherin getroffen werden kann. Es werden insbesondere diejenigen Gesten transkribiert, die sich auf das Material beziehen, das den Lernenden zur Verfügung steht. Rhythmische Gesten (beats) werden eher nicht dokumentiert, da sie keinen Inhalt transportieren. So wie auch die Handlungen der Lernenden im Transkript kursiv in Klammern aufgeführt werden, so sollen auch die ausgewählten Gesten dort beschreibend dokumentiert werden. Aufgrund des steten Vorhandenseins von Material muss bei der Erstellung der Beschreibungen besonders darauf geachtet werden, dass deutlich wird, ob eine Geste oder eine Handlung mit dem Material vorliegt.

Im Folgenden werden nun die einzelnen Analyse-Schritte bei der Interpretation der Transkripte erörtert. Ich gliedere die Darstellung der Methoden so, wie später im empirischen Teil die Auswertung erfolgen soll.

[2]Huth (2009) gibt als Referenz für diese Art der Gesten-Dokumentation Sager (2005) an.

Rekonstruktion des Lösungsprozesses

Zu Beginn der Beschäftigung mit einer ausgewählten Episode soll der Lösungsprozess bezüglich der behandelten Aufgabe genau nachgezeichnet werden. Dazu werde ich jede Episode einer **Interaktionsanalyse** unterziehen. „In der Interaktionsanalyse soll rekonstruiert werden, wie die Individuen in der Interaktion als gemeinsam geteilt geltende Deutungen hervorbringen und was sie dabei aushandeln. Sie zielt darauf, die Interpretationen der Beteiligten zu rekonstruieren, d. h., es geht um die Rekonstruktion der in der Situation für die Beteiligten sinnvollen Handlungen. ... Bei der Interpretation einer Äußerung fragen wir uns also, auf welche Weisen die an der Interaktion Beteiligten diese Äußerung interpretieren könnten“ (Krummheuer & Naujok 1999, S. 68). Krummheuer und Naujok (1999, S. 68 ff.) geben für die Interaktionsanalyse folgende Schritte vor, die aber auch in modifizierter Reihenfolge oder wiederholt durchlaufen werden können: Nach einer *Gliederung der Interaktionseinheit* – in unserem Fall nach fachinhaltlichen Kriterien – erfolgt eine *allgemeine Beschreibung*, die einen ersten Versuch darstellt, den Sinn der Episode zu erfassen. Anschließend soll eine *ausführliche Analyse der Einzeläußerungen* vorgenommen werden, wobei folgendes zu beachten ist: „(1) Die Äußerungen werden eine nach der anderen in der Reihenfolge ihres Vorkommens interpretiert, womit die Interpretationen nach vorne offen bleiben. (2) Plausibilisierungen dürfen und können nur rückwärts gewandt erfolgen. (3) Interpretationen müssen sich im Verlauf der Interaktion bewähren.“ (ebd., S. 69). Dabei werden für die Einzeläußerungen (Turns) Interpretationsalternativen rekonstruiert. In der folgenden sogenannten *Turn-by-Turn-Analyse* sollen durch Vergleich der entwickelten Alternativen für die aufeinanderfolgenden Turns die plausibelsten Deutungen für die Einzeläußerungen herausgearbeitet werden, d. h. die Turn-by-Turn-Analyse dient dem Ausschluss von Alternativen. „Indem man eine Beziehung zwischen den verschiedenen Redezügen herstellt bzw. indem man versucht, diese Beziehung zu rekonstruieren, rekonstruiert man die gemeinsame, Zug um Zug erfolgende Themenentwicklung in der Interaktion.“ (ebd., S. 70). Abschließend erfolgt eine *zusammenfassende Interpetation* der Episode.

Die Analysen der vorliegenden Studie folgen dieser Vorgabe, allerdings wird sich die vorgelegte Dokumentation im Wesentlichen auf die Darstellung der zusammenfassenden Interpretationen der ausgewählten Episoden beschränken, um Lesbarkeit zu gewährleisten. Dieser „ist es mitunter abträglich, die Analyse eines Transkriptes in allen Einzelschritten ... vorzuführen, weil in der Vielfalt der Interpretationsalternativen der Überblick verloren gehen kann“ (Krummheuer & Naujok 1999, S. 58). Es sollen hier nur insoweit Deutungsalternativen diskutiert werden, wie sie die Beantwortung der Forschungsfragen voranbringen.

Um möglichst genau darzustellen, was sich inhaltlich in der Episode vollzogen hat, werden Sprache, Handlungen und Gesten der Lernenden bei der *Rekonstruktion des Lösungsprozesses* mit einbezogen. Im Hinblick auf die Deutung der Gestik wird hier und in allen weiteren Analysen McNeills (1992) Hinweis beachtet, dass Gesten immer im Zusammenhang mit der sie begleitenden Sprache interpretiert werden müssen (S. 76), und sogar das Hinzuziehen von Vorwissen – in seinen Studien z. B. über die nacherzählte Szene (S. 79) – wichtig sein kann und auch legitim ist.

Die Rolle des Materials

In einem zweiten Analyseschritt liegt das Augenmerk speziell auf dem Umgang der Schülerinnen und Schüler mit dem konkreten Material. Es soll erörtert werden, wie sie es in ihre Überlegungen mit einbeziehen und welche Rolle es für den Lernprozess spielt. Dazu werden zunächst die sprachlichen und handelnden bzw. gestischen Verweise auf das Material näher analysiert. Im Hinblick auf die Gesten soll genauer herausgearbeitet werden, *wie* die Gesten die interpretativ erarbeitete Bedeutung zum Ausdruck bringen. Dabei wird es darum gehen, die Art der Gesten genauer zu bestimmen, denn: „The gesture categories, iconic, metaphoric, deictic, and beat, distinguish references to concrete events, to abstract concepts and relations, to orientations and reorientations ...“ (McNeill 1992, S. 76). Die Erarbeitung der durch die Gesten hergestellten Bezüge (references) verspricht demnach Aufschluss darüber zu geben, wie das Material in der Gestik aufgegriffen wird, und kann somit zur Untersuchung der Rolle des Materials für den Lösungsund Lernprozess beitragen. Die Bedeutung des Materials für den Lösungsprozess kann durch die Suche nach *mismatches* ergänzt werden, da in ihnen Ideen ausgedrückt werden können, die sprachlich noch nicht geäußert werden können (Goldin-Meadow 2005, S. 29, vgl. hier S. 86). Weitere Begriffe aus der theoretischen Erörterung (Kap. 1.1: Denkhandlungen (und ggf. ways of thinking), Sprachbilder, Variablenrollen; Kap. 2.2: material anchor) werden anschließend genutzt, um herauszuarbeiten, was Algebra-spezifisch bei der Arbeit mit den Material passiert. Darüber hinaus wird sich an einigen Stellen das *epistemologische Dreieck* (s. Kap. 2.1, S. 34) als hilfreich erweisen, um darzustellen, wie sich der Variablenbegriff entwickelt, ersichtlich z. B. daran, wie sich die Welt der Referenzkontexte im Lernprozess ändert. Um die zunächst eher subjektiv erscheinenden Annahmen bei der Analyse von Gesten – insbesondere von abstrakten Gesten – besser explizieren zu können, soll bei Bedarf auch auf das epistemologische Dreieck zurückgegriffen werden, da es die Wechselbeziehungen zwischen der Bedeutung eines Begriffs, des verwendeten Referenzkontexts und dem zugehörigen Zeichen darstellt, und Gesten als zu deutende Zeichen aufgefasst werden können.

Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander

Im Folgenden werden Begriffe vorgestellt, die dazu dienen sollen, in einem weiteren Analyseschritt genauer herauszuarbeiten, wie der Variablenbegriff im Spannungsfeld von lernenden Individuen und Interaktion entsteht. Dazu wird zunächst auf das interaktionistische Begriffsnetz aus *Situationsdefinition*, *Rahmung*, *Bedeutungsaushandlung* und *Arbeitskonsensus* zurückgegriffen. Zur Darstellung der Begrifflichkeiten werden wegen ihrer Prägnanz Erläuterungen aus der einschlägigen Literatur zum Thema übernommen (Hervorhebung der Begriffe durch Fett-Druck hinzugefügt):

- „Der Begriff der **Situationsdefinition** bezieht sich auf das Individuum und seine individuellen Deutungen einer Situation. Es besitzt einen eigenen Erfahrungsschatz oder ‚Wissensvorrat', der es ihm ermöglicht, eine erste Vorstellung von der Situation, in der es sich gerade befindet, entwickeln zu können. Es ‚definiert', was gerade ‚Sache ist', wie man die Situation zu verstehen und zu deuten hat" (Krummheuer

& Fetzer 2005, S. 17). „Eine Situationsdefinition ist prozeßhaft organisiert. Sie ist immer unabgeschlossen und vorläufig. Sie wird im Handlungsprozeß von einem Individuum erzeugt und ständig in der Auseinandersetzung mit den wahrgenommenen Situationsdefinitionen der anderen Beteiligten weiterentwickelt (vgl. hierzu auch Voigt 1984, S. 27-42)" (Krummheuer 1984, S. 286).

- „Die Beteiligten werden häufig die Situation mit Deutungsweisen interpretieren, die ihnen geläufig sind, und nicht notwendigerweise jedes Mal für sie neuartige Deutungen kreieren. ... Mit Bezug auf Goffman 1974 spreche ich hier dann von einer ‚**Rahmung**' (framing; Krummheuer 1992, 24 ff.)" (Krummheuer 2008, S. 13). Rahmungen „sind standardisierte und routinisierte Situationsdefinitionen, die (a) aufgrund identifizierter Signale in einer Situation von einem Individuum in stabilisierter Weise hergestellt werden können ... und (b) aufgrund ihrer Konventionalität eine hohe funktionale Passung zu den Deutungen anderer Interaktionsteilnehmer erwarten lassen ... " (Krummheuer 1992, S. 24 f.).
- „Im Miteinander wird permanent ein ... Abgleich der Situationsdefinitionen vorgenommen. Die individuellen Deutungen werden einander angeglichen, um hinreichend passungsgenaue Situationsdefinitionen hervorzubringen und eine als *geteilt geltende Deutung* zu erreichen. Nur auf der Basis dieser als geteilt geltenden Deutung dessen, was gerade ‚Sache ist' kann sich eine Interaktion weiterentwickeln. Misslingt dieser Abgleich der individuellen Deutungen, bricht die Interaktion auseinander oder ‚schläft ein'" (Krummheuer & Fetzer 2005, S. 18; Hervorhebung im Original). Diesen Prozess des Ab- und Angleichens bezeichnet man als **Bedeutungsaushandlung**. Er führt zu „Ergebnissen, die man der ‚Dynamik' der Interaktion und nicht mehr ausschließlich der Kompetenz der einzelnen Individuen zuzuschreiben hat (Voigt 1984; Cobb / Bauersfeld 1995; Wood et al. 1993)" (ebd.).
- „Erzielt wird auf diese Weise ein ‚**Arbeitskonsensus**', der Produkt der Interaktion ist und durch die ständigen Prozesse von Bedeutungsaushandlung erzeugt wird" (Krummheuer 1992, S. 18). Krummheuer

hat den Begriff des ‚Arbeitskonsensus' im Hinblick auf Unterrichtsprozesse ausgeschärft, um „die für unterrichtliche Lehr-Lern Prozesse konstitutive qualitative Differenz der Deutungskapazitäten von Lehrer und Schülern" zu berücksichtigen (ebd., S. 19). Er verwendet für Lehr-Lern-Situationen den Begriff des ‚Arbeits*interims*', der den provisorisch fragilen Charakter der als geteilt geltenden Deutung noch mehr betont (Krummheuer & Fetzer 2005, S. 19, 181 f.). Da in der vorliegenden Studie Gruppenarbeitsprozesse analysiert werden, wird zunächst von symmetrischen Interaktionssituationen ausgegangen und daher der Begriff des Arbeitskonsensus verwendet.

Außerdem sollen die Begriffe des Produktionsdesigns aus dem Partizipationsmodell nach Krummheuer und Brandt (2001) genutzt werden, das sie aufbauend auf Goffman (1981) für die schulische Interaktion entwickelt haben (Krummheuer & Brandt 2001, S. 42). Es soll helfen, die individuellen Verantwortlichkeiten für die Interaktion bzw. die Themenentwicklung herauszuarbeiten. Dadurch wird versucht, soweit möglich zu berücksichtigen, dass die *Gruppe* aus lernenden *Individuen* besteht (s. Kap. 2.1).

„Die Verantwortung oder Originalität, die man für das, was man sagt, übernimmt, bezieht sich im Wesentlichen auf zwei Komponenten einer Äußerung. Man kann Verantwortung oder Originalität beanspruchen für

- das syntaktische Gebilde mit einer bestimmten Wortwahl und Form (Formulierungsfunktion) und/oder für
- den inhaltsbezogenen (semantischen) Beitrag (Inhaltsfunktion)"

(Krummheuer & Fetzer 2005, S. 75).

Der Sprechende, der in einem Redebeitrag für beide Aspekte verantwortlich ist, wird bezüglich dieses Redebeitrags als **Kreator** bezeichnet. Am entgegengesetzten Ende des Verantwortungsspektrums steht der **Imitierer**, der in seinem Redebeitrag nur nachspricht, also weder für Inhalt noch Formulierung Originalität beanspruchen kann. Des Weiteren gibt es noch paraphrasierende und traduzierende Beiträge. Als **Paraphrasierer** wird ein Sprechender bezeichnet, welcher eine bereits anderweitig hervorgebrachte Idee in anderen Worten wiedergibt. Im Gegensatz dazu greift ein **Traduzierer** eine

Formulierung auf, drückt damit aber eine neue Idee aus (vgl. Krummheuer und Brandt (2001, S. 43 ff.), Brandt (2006, S. 25), Krummheuer und Fetzer (2005, S. 75f.)).

Sprechern, die für einen Redebeitrag nur eingeschränkt verantwortlich sind (Paraphrasierer, Traduzierer, Imitierer), stehen bildlich gesprochen andere Interaktionsteilnehmer zur Seite, die „aufgrund vorhergehender Beiträge (situative) Verantwortlichkeiten ... für den aktuellen Beitrag ... übernehmen“ (Krummheuer & Brandt 2001, S. 47). Folgende Tabelle (in Anlehnung an Brandt (2006, S. 26) und Krummheuer und Fetzer (2005, S. 76)) soll die verschiedenen Ausprägungen dieses stillen Parts des Produktionsdesigns (vgl. Krummheuer & Brandt 2001, S. 47) vorstellen und einen Überblick über die denkbaren Verantwortlichkeiten geben.

Sprechender des betrachteten Redebeitrags			stiller Part bzgl. des betrachteten Redebeitrags		
	Verantwortung für Idee	Verantwortung für Wortwahl		Verantwortung für Idee	Verantwortung für Wortwahl
Kreator	+	+	–	–	–
Paraphrasierer	–	+	Initiator	+	–
Traduzierer	+	–	Formulator	–	+
Imitierer	–	–	Inventor	+	+

Brandt und Höck (2011) beschäftigen sich mit mathematischen Problemlöseprozessen von Grundschülern in Partnerarbeit und weisen diesbezüglich auf einen „Modifikationsbedarf am bisher im Rahmen der Interpretativen Unterrichtsforschung entwickelten Partizipationsmodell“ (ebd., S. 246) hin, da dieses auf der Analyse von lehrerzentrierten Klassengesprächen basiere (ebd.). Sie illustrieren an Fallbeispielen, dass in besonders dichten Lösungsprozessen eine Zuweisung der Sprecherrollen unter Umständen nicht mehr möglich ist, da eine neue Idee von mehreren Sprechern gemeinsam vorgebracht werden kann. Sie nähern sich der Problematik in diesem Aufsatz dadurch, dass sie das Produktionsdesign nutzen, „um die Originalität der Äußerung in Hinblick auf die gemeinsame Ideenentfaltung zu erfassen“ (ebd.,

S. 260). Sollten in der vorliegenden Studie in den zu analysierenden Gruppenarbeitsprozessen solche kollektiven Ideenentfaltungen auftreten, werden wir darauf gesondert hinweisen, ansonsten aber zunächst versuchen über das Produktionsdesign die individuellen Verantwortlichkeiten zu erfassen.

Vergleich der Interpretationen

Oben wurde bereits dargestellt, dass das Prinzip der Komparation den gesamten Analyseprozess der vorliegenden Studie begleiten soll (s. S. 63). Nach der Interpretation aller ausgewählten Fallbeispiele soll ihr noch einmal explizit Raum gewährt werden, „wenn in einem abschließenden Auswertungsschritt die Interpretation einer Interaktionseinheit systematisch mit Interpretationen anderer Interaktionseinheiten verglichen wird“ (Krummheuer & Naujok 1999, S. 67). Dieser Vergleich soll entlang der Kategorien *Lösungswege*, *Die Rolle des Materials* und *Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander* vorgenommen werden.

Kapitel 5

Die Lernumgebung *Knack die Box*

Der Anfang ist die Hälfte des Ganzen.
Aristoteles

Im diesem Kapitel wird die erste Aufgabe der Lernumgebung *Knack die Box*, die im Zentrum der vorliegenden Arbeit steht, eingehend anhand der nun zur Verfügung stehenden Beschreibungsmittel analysiert. Vorab soll ein Einblick in die gesamte dem Projekt zu Grunde liegende Unterrichtsreihe gegeben werden. Dadurch wird die Einbettung der Lernumgebung in das Konzept geklärt. An der allerersten Aufgabe der Unterrichtsreihe werden die Bemühungen zur Grundlegung des Variablenbegriffs, die bereits im Vorfeld von *Knack die Box* stattgefunden haben, verdeutlicht.

5.1 Überblick über die gesamte Unterrichtsreihe

Bei der Konzeption der Unterrichtsreihe war zum einen der bereits in der Einleitung und in Kapitel 2.2 zitierte Hinweis zur Gestaltung eines Einstiegs in die elementare Algebra nach Hefendehl-Hebeker (2001, S. 92) leitend: Zuerst müssen den Lernenden Gelegenheiten geboten werden, Erfahrungen mit

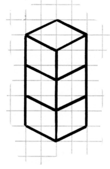
Zahlen zu sammeln, die dazu anregen, Muster und Strukturen zu erkennen und zu beschreiben (ebd.). Ein zweiter Schritt sollte diese „Erfahrungen behutsam reflektieren, ordnen, systematisieren, formalisieren und dabei in erforderlichem Maße neue gedankliche Objekte wie Variable konzipieren" (ebd.). Zum anderen sollten die theoretischen und empirischen Befunde aus Hutchins (2005) zum Potenzial konkret-gegenständlicher Kontexte bei der Auswahl von Aufgaben Beachtung finden (hier s. S. 42).

Als Sozialform wird überwiegend die Arbeit in Vierergruppen gewählt, die es den Lernenden ermöglicht, neue mathematische Ideen zunächst im Gespräch untereinander auszuhandeln, d. h. individuelle Zugänge zu finden und diese an den Ideen / Situationsdefinitionen der anderen zu erproben. In anschließenden Klassengesprächen soll die Lehrperson mit den Schülerinnen und Schülern aus diesen Ideen die konsolidierte Sichtweise auf die betrachteten Begriffe erarbeiten (vgl. Gallin und Ruf (1998)).

Die Unterrichtsreihe besteht aus drei aufeinander folgenden Teilen, die in unterschiedliche Aspekte der elementaren Algebra einführen. Im ersten Teil sollen die Schülerinnen und Schüler durch Erfahrungen mit geometrischen Mustern, die sich auf Zahlenebene beschreiben lassen, die Idee der Variablen als generalisierte Zahlen und veränderliche Größen selbstständig in Gebrauch nehmen. Sie sollen die algebraische Formelsprache als effizientes Darstellungsmittel zur Beschreibung des Unbestimmten erfahren. Die Lernumgebung *Knack die Box* (2. Teil) thematisiert das intuitive Lösen und Aufstellen von Gleichungen. Dort tritt besonders die Vorstellung von Variablen als gesuchte Unbekannte hervor. Im dritten Teil soll schließlich ein Transfer des Gelernten aus den begrenzten Settings der einführenden Aufgaben in vielfältige Sach-Situationen erfolgen. Hier werden verschiedene Textaufgaben gestellt.

Der erste Zugang zum Variablenbegriff wird gleich zu Beginn der Unterrichtsreihe geschaffen. Die Schülerinnen und Schüler erhalten zur Bearbeitung der Einstiegsaufgabe 20 Holzwürfel (Kantenlänge 2cm) pro Vierergruppe und es ist beabsichtigt, dass sie zunächst wirklich Türme bauen.

Die Idee der folgenden Aufgabe (*Stein auf Stein*) sowie einige Formulierungen stammen aus dem *mathbu.ch 7* (Affolter et al. 2003, S. 22 f.).



Stein auf Stein

Legt einen Würfel auf den Tisch. Es sind fünf quadratische Flächen sichtbar. Das untere Quadrat ist verdeckt.

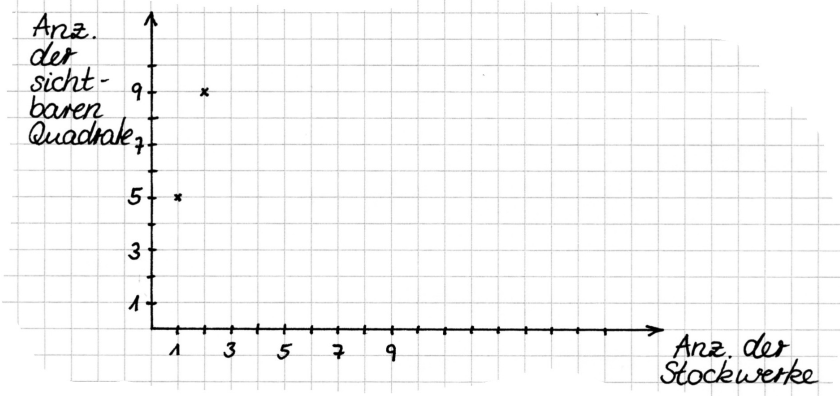
Kurz: 5 Quadrate sind sichtbar
1 Quadrat ist verdeckt

Baut einen Turm, indem Ihr zwei Würfel aufeinander legt. Nun sind ringsherum und oben insgesamt neun Quadrate sichtbar. Am Boden und im Innern sind drei verdeckt.

Kurz: 9 Quadrate sind sichtbar
3 Quadrate sind verdeckt

(1) Wie viele Quadrate sind sichtbar, wenn Ihr höhere Türme baut?
Tipp: Verschafft Euch Übersicht, indem Ihr eine Tabelle und / oder ein Diagramm der folgenden Art ausfüllt!

Anzahl der Stockwerke	Anzahl der sichtbaren Quadrate	
1	5	
2	9	
⋮	⋮	



Wie viele Quadrate sind sichtbar

- bei einem zehnstöckigen Turm?
- bei einem zwanzigstöckigen Turm?
- bei einem Turm aus allen Würfeln aller Gruppen Eurer Klasse?

Wie bestimmt Ihr die Anzahl, wenn die Türme zu wackelig und das Abzählen zu mühsam wird?

(2) Sucht eine Gesetzmäßigkeit für die Anzahl der verdeckten Quadrate. Versucht sie möglichst kurz und bündig aufzuschreiben. Was ergibt sich für die Anzahl der verdeckten Quadrate in dem Turm aus all Euren Würfeln?
Passt die Zahl zur Anzahl der sichtbaren Quadrate? Begründet!

Das konkrete Material lädt dazu ein, zunächst tatsächlich Türme zu bauen und die sichtbaren Quadrate zu zählen. Es ist zu erwarten, dass dies den Schülerinnen und Schülern aber irgendwann zu mühsam wird, sie das zu Grunde liegende Prinzip erkennen und generalisieren. Die Ablösung vom Zählen wird im Material dadurch verstärkt, dass später nach Türmen gefragt wird, die zu hoch sind, um sie tatsächlich zu bauen. Dies verfolgt die Idee, über große Zahlen, die nicht mehr „greifbar" sind, zu Variablen zu gelangen (vgl. Zazkis (2001)).

Die angebotenen Darstellungsarten sollen den Sachverhalt von verschiedenen Seiten aus beleuchten und unterschiedliche Herangehensweisen fördern. Es gibt verschiedene Argumentationsmöglichkeiten; z. B.

- unter Verwendung der Tabelle: Anhand der ersten Einträge lässt sich feststellen, dass immer vier sichtbare Quadrate dazukommen. Die gewünschte Anzahl lässt sich so durch Ausfüllen der Tabelle bis zur entsprechenden Zeile ermitteln.
- unter Verwendung des Diagramms: Man stellt fest, dass alle Punkte auf einer Geraden liegen. Die Gerade wird eingezeichnet und die gesuchte Anzahl für die gefragte Stockwerkzahl abgelesen.
- am Turm: (1) Oben bleibt immer ein Quadrat zu sehen. Pro Würfel, der aufgesetzt wird, kommen ringsherum vier Quadrate hinzu (rekursive Bestimmung der Anzahl). (2) Oben ist ein Quadrat zu sehen und pro Stockwerk ringsherum zusätzlich vier Quadrate. Insgesamt sieht

man also $4 \cdot (\textit{Anzahl der Stockwerke}) + 1$ Quadrate (explizite Bestimmung der Anzahl).

Die ersten beiden Lösungsvarianten sind rein beschreibend, sie liefern noch keine Begründung. Es ist aber durchaus zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler zuerst erkennen, wie sich die Zahlenfolge fortsetzt und sich erst anschließend klar machen, warum dies so ist.

Man kann davon ausgehen, dass bei der Betrachtung des zwanzigstöckigen Turms eine Verdopplungsstrategie auftreten wird, da die Lernenden vorab die Anzahl der sichtbaren Quadrate in einem Turm aus zehn Würfeln bestimmen sollen. Dadurch können in einer Gruppe Diskussionen über die Struktur in der Konfiguration der sichtbaren Quadrate am Turm angestoßen werden, wenn mindestens einem / einer Lernenden klar ist, dass man nicht einfach verdoppeln darf.

Mit der Aufgabe zu den verdeckten Quadraten wird ebenfalls versucht, strukturelle Einsichten anzustoßen. Insbesondere die Frage nach der Passung der Anzahl der verdeckten Quadrate zur Anzahl der sichtbaren Quadrate fordert dies ein. Auf Zahlenebene können die Lernenden feststellen, dass die Summe aus den beiden Anzahlen für den zwanzigstöckigen Turm 120 ergibt. Dies ist $6 \cdot 20$ und beschreibt bezogen auf die Würfel des Turmes die Anzahl aller Seiten der 20 Würfel. Die erneute Betrachtung der vorab gefundenen allgemeinen Beschreibungen für die Anzahlen der sichtbaren und verdeckten Quadrate ermöglicht grundsätzlich eine erste Idee zur Gleichheit von Termen. Es ist aber zu erwarten, dass diese Einsicht nur in seltenen Fällen zu beobachten sein wird, da sie den Lernenden ein hohes Maß an Abstraktions- und Verallgemeinerungsfähigkeit abverlangt.

Nach der Bearbeitung einer weiteren Aufgabe, in welcher eine geometrische Bilderfolge untersucht werden soll, sollen die Ergebnisse der Aufgaben verglichen und anhand der im Klassengespräch vorgestellten Schülerlösungen die Begriffe Variable und Term eingeführt werden. Es folgen Übungsaufgaben, die hauptsächlich ebenfalls die Untersuchung geometrischer Bilderfolgen zum Gegenstand haben, für welche aber nun das Darstellungsmittel der algebraischen Formelsprache zur Verfügung steht. Dieses soll bei der Erarbeitung der Übungsaufgaben erprobt und in Gebrauch genommen werden.

In zwei Aufgaben werden auch noch einmal Würfelbauwerke untersucht (eine dieser Aufgaben ist die Beispielaufgabe zum epistemologischen Dreieck aus Kapitel 2.1, s. S. 34).

5.2 A-priori-Analyse der ersten Aufgabe von *Knack die Box*

Knack die Box

Legt mit Bohnen und leeren Boxen die beiden folgenden Anordnungen:

Anordnung A	Anordnung B
■ ■ • • • • •	□ □ □ • • •

Nehmt Bohnen aus dem Bohnenvorrat und füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt).
2. In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen.

Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen?

Erfindet selbst solche Paare von Anordnungen! Versucht die Boxen so zu füllen, dass die beiden Bedingungen von oben erfüllt sind. Gibt es immer (mehrere) Möglichkeiten die Boxen entsprechend zu füllen?

Vielleicht helfen Euch Tabellen der folgenden Art beim übersichtlichen Aufschreiben Eurer Ergebnisse!

Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box						
Anz. der Bohnen in einer weißen Box						

Bei der Aufgabe handelt es sich um eine leicht modifizierte Version der ersten Aufgabe der Lernumgebung *Knack die Box* aus dem *mathbu.ch 7* (Affolter et al. 2003, S. 32 f.).

Im Zentrum einer jeden Einführung in die elementare Algebra steht von der Natur der Sache her implizit ein Wechsel des semiotischen Systems. Die Lernenden kennen das semiotische System der Arithmetik aus Zahlzeichen, Rechenzeichen und arithmetischen Gleichungen. Das Ziel der Einführung in die elementare Algebra ist es, dieses um Mittel zur Darstellung des Unbestimmten zu erweitern: Variable, Terme und algebraische Gleichungen. Im hier untersuchten Ansatz werden durch die konkreten Boxen und Bohnen und deren symbolische Darstellungen auf dem Arbeitsblatt zwei weitere semiotische Ebenen eingeschoben. Daraus ergeben sich mehrere Fragen:

Warum wird noch eine weitere Darstellungsebene eingeführt, obwohl schon die Erarbeitung der algebraischen Formelsprache genug Mühe macht? Die Box wird durch die Aufgabenstellung und die durch diese bestimmten Regeln des Gebrauchs zwar zunächst selbst zu einem zu deutenden Darstellungsmittel, später kann sie aber als Referenzkontext für die Deutung von Variablen dienen. Sie kann zur Metapher für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung der Variablen werden (vgl. Berlin, Fischer, Hefendehl-Hebeker und Melzig (2009, S. 291)). Zur Relevanz von Metaphern für das Lernen wurde bereits in Kapitel 1 festgestellt: „One of the principal results in cognitive science is that abstract concepts are typically understood, via metaphor, in terms of more concrete concepts“ (Lakoff & Núñez 2000, S. 39; hier s. S. 20). Die metaphorische Funktion der Boxen wird noch dadurch intensiviert, dass die Boxen in ihrer Gegenständlichkeit zum material anchor (Hutchins 2005) des Variablenbegriffs werden können. Die Grundlagen der hiermit a priori dargestellten Einschätzung, dass sich die Boxen tatsächlich als Referenzkontext / Metapher / material anchor eignen, werden anhand der weiteren Fragen behandelt.

Die Darstellungen der Boxen und Bohnen auf dem Arbeitsblatt dienen insbesondere dem Festhalten der Aufgabenstellung. Allerdings kann man sie auch als Abstraktion von den konkreten Boxen und Bohnen und damit als Zwischen-Darstellung auf dem Weg zur algebraischen Formelsprache ansehen. Ihnen fehlen einige charakteristische Eigenschaften der gegenständlichen Boxen (z. B. die Möglichkeit, sie zu öffnen), ihre Inskriptionen erwecken aber noch starke Erinnerungen an die tatsächlichen Boxen. Auf diese Weise ist die Darstellung auf dem Arbeitsblatt weniger konkret als durch das gegenständliche Boxenarrangement, aber noch wesentlich weniger abstrakt als eine Darstellung in der algebraischen Formelsprache.

Welche Charakteristika der algebraischen Formelsprache werden im semiotischen System der Boxen und Bohnen repräsentiert? Wie bereits festgestellt, spielt in dieser Aufgabe insbesondere der Variablenaspekt der gesuchten Unbekannten eine Rolle, da die Suche nach passenden Befüllungen im Zentrum steht.[1] Die schwarzen und weißen Boxen repräsentieren ihre gesuchten, unbekannten Befüllungen mit Bohnen und sind im gegebenen Kontext somit die Symbole für die Unbekannten. Mit der Formulierung „Die Boxen sind Stellvertreter für ihre gesuchten, unbekannten Befüllungen“ kann man versuchen, der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die Variable (samt der verschiedenen Rollen, die sie einnehmen kann) ein gedankliches Objekt ist, während die Boxen materielle Objekte sind. Die genannte Formulierung bringt das gedankliche Objekt der Variablen als gesuchte Unbekannte mit der materiellen Repräsentation der Gleichung durch Boxen in Verbindung. Der Begriff „Stellvertreter“ wurde in Anlehnung an die Ausführung nach Thiel (1996) (hier s. S. 16) gewählt, der davon spricht, dass Variable dem Zweck der Stellvertretung dienen. Dieses Stellvetreter-Sein ist demnach auch das entscheidende Charakteristikum, das das semiotische System der Boxen mit dem algebraischen der Variablen eint.

Der Hauptunterschied ist oben bereits angeklungen: die Boxen sind *materielle* Objekte, während Variable rein *gedankliche* Objekte sind. Die Box als Gegenstand weist demnach zum einen unzählige Charakteristika auf, die nichts mit Variablen zu tun haben (z. B. Form, Material, ...), und ist zum anderen gegenüber dem Variablenbegriff beschränkt: ‚echte‘ Boxen haben nur positive Befüllungen, eine Variable kann hingegen auch für eine negative Zahl stehen.

Welche Handlungen sind möglich? Die Gegenständlichkeit eröffnet auch einen größeren Handlungsspielraum: man kann die Boxen befüllen,

[1]Dass die Suche auch wirklich erfahren werden kann, wird dadurch unterstützt, dass die Gleichung *zwei* Unbekannte hat. Bei linearen Gleichung mit einer Unbekannten ist nämlich immer wieder zu beobachten, dass Schülerinnen und Schüler die Lösung sofort ‚sehen‘.

hineinschauen, die eingefüllten Bohnen abzählen usw. Diese Handlungen können den Zugang zur Problemstellung zunächst erleichtern, von ihnen müssen sich Lernende aber auch wieder lösen, um eine abstrakte Vorstellung von Variablen ausbilden zu können. Die Ablösung von den Handlungen am konkreten Material kann mit der Erkenntnis einhergehen, dass es in der Aufgabe nicht um das konkret-gegenständliche Material, sondern um die damit dargestellte Struktur geht. So wie das konkrete Material aber auch nach dieser Erkenntnis noch als Gedankenstütze dient, können auch die Handlungen daran noch nachwirken. Die angenommene Wirkungsweise des konkreten Materials als Referenzkontext / Metapher / material anchor beruht also nicht allein auf dem Material selbst, sondern fußt auch in den konkreten Handlungen mit dem Material (vgl. Kap. 2.2).

Der durch die Gegenständlichkeit eröffnete Handlungsspielraum kann sich auch in den Lösungswegen widerspiegeln. Vorstellbar wäre beispielsweise ein sukzessives Befüllen der Boxen unter Beachtung der in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen. Für die aufgebaute Boxensituation mit leeren Boxen stellen wir fest, dass sich in Anordnung B zwei einzelne Bohnen weniger befinden als in Anordnung A. Daher müssen zunächst in Anordnung B zwei Bohnen ergänzt werden – in zwei der drei weißen Boxen je eine Bohne. Damit die zweite Bedingung zur Befüllung der Boxen nicht verletzt wird, muss nun auch in die dritte weiße Box eine Bohne gelegt werden. Dann befindet sich aber in Anordnung A eine Bohne weniger und es muss aufgefüllt werden usw. Die folgende Tabelle zeigt die sukzessive Befüllung bis zur ersten Lösung (2 | 2):

Anordnung A	Anordnung B	
■ ■ • • • • •	□ □ □ • • • 1 1	Gleichheit herstellen
■ ■ • • • • •	□ □ □ • • • 1 1 1	2. Bedingung erfüllen
■ ■ • • • • • 1	□ □ □ • • • 1 1 1	Gleichheit herstellen
■ ■ • • • • • 1 1	□ □ □ • • • 1 1 1	2. Bedingung erfüllen

(Weiter auf nächster Seite!)

Anordnung A	Anordnung B	
■ ■ • • • • • 1 1	□ □ □ • • • 2 1 1	Gleichheit herstellen
■ ■ • • • • • 1 1	□ □ □ • • • 2 2 2	2. Bedingung erfüllen
■ ■ • • • • • 2 2	□ □ □ • • • 2 2 2	Gleichheit herstellen; Feststellung: Beide Aufgabenbedingungen zugleich erfüllt!

Grundsätzlich sind an den Boxen und Bohnen in gewissem Umfang auch Handlungen möglich, die bezogen auf algebraische Gleichungen als Äquivalenzumformungen bezeichnet würden. In der in der Aufgabe gegebenen Boxensituation könnte man beispielsweise in beiden Anordnungen je drei Bohnen entfernen, ohne etwas an den Lösungen dieser Situation zu verändern. Dies lässt sich an der Boxensituation wie folgt begründen: durch die Befüllung der Boxen soll eine Gleichheit der Bohnenanzahlen für die beiden Anordnungen erzeugt werden. Unter der Annahme, dass diese bereits erreicht wurde, ändert das Entfernen von je drei Bohnen in den beiden Anordnungen zwar die Gesamt-Bohnenanzahlen in den Anordnungen, aber nicht die Tatsache, dass gleich viele Bohnen in beiden Anordnungen sind – eben nur drei weniger. Für diese spezielle Boxensituation ist das Repertoire damit aber auch schon erschöpft. Betrachtet man aber beispielsweise die folgende Situation, so könnte man zunächst in beiden Anordnungen je drei Bohnen wegnehmen und anschließend von jeder Art der Objekte in jeder Anordnung die Hälfte entfernen, ohne etwas an den Lösungen zu verändern.

Anordnung A	Anordnung B
■■• • • • •	□□□• • •

	Anordnung A	Anordnung B
Boxensituation	■ ■ • • • • •	□□□□• • •
1. Umformung	■ ■ • •	□□□□
2. Umformung	■ •	□□

Diese Umformungen liefern auch auf der Ebene der Boxen und Bohnen Einsicht in die Struktur der Lösungen, so wie es Äquivalenzumformungen bei algebraischen Gleichungen auch tun. Da in der letzten Zeile in Anordnung B zwei weiße Boxen vorhanden sind, wird die Gesamt-Bohnenanzahl in dieser

Anordnung immer gerade sein. Dies bedeutet, dass in der schwarzen Box in Anordnung A immer eine ungerade Anzahl an Bohnen liegen muss, damit sich zusammen mit der einzelnen Bohne in Anordnung A wiederum eine gerade Anzahl ergibt. Mit dieser Erkenntnis ließen sich die Lösungen für die Boxensituation leicht angeben. Ob Schülerinnen und Schüler beim Einstieg in die elementare Algebra aber tatsächlich bereits solche strukturellen Überlegungen anstellen (können), erscheint fraglich. Die Ausführungen zeigen aber, dass das Material noch ein Stück über intuitive Herangehensweisen hinaus tragfähig bleibt.

Welche konkreten Anforderungen erwachsen für die Schülerinnen und Schüler aus dem zusätzlichen Darstellungssystem? Zunächst stellt die Ingebrauchnahme der Boxen und Bohnen eine eigene Deutungsleistung dar: die schwarzen und weißen Kästchen und die Punkte auf dem Arbeitsblatt müssen als Boxen und Bohnen gedeutet werden. Die Aufgabenstellung, die sich verbal mit den Boxen und Bohnen auseinandersetzt – streng genommen also noch eine weitere semiotische Ebene darstellt –, muss nachvollzogen werden. Erst dann kann der eigentliche Lösungsprozess beginnen. Wir nehmen an, dass das Material in diesem Stadium dann aber mehr Hilfe als Anspruch ist.

Ob die Box für die Lernenden letztendlich aber zu einem Referenzkontext / einer Metapher / einem material anchor für die Variable werden kann, hängt von der Fähigkeit der Lernenden ab zu abstrahieren: sie müssen die entscheidenden Charakteristika der Box und des Umgangs mit ihr herausheben und von den anderen absehen. Im Hinblick auf die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen ist dies letztlich also die zentrale Anforderung, die die Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit den Boxen und Bohnen bewältigen müssen.

Kapitel 6

Das erste Fallbeispiel: Gruppe N

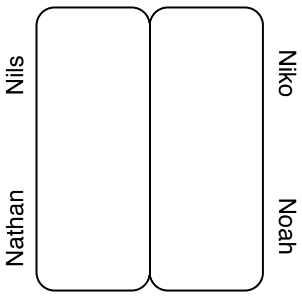
Im Folgenden soll das erste Fallbeispiel analysiert werden. Es wurde eine Episode ausgewählt, in welcher die Gruppe N ihre selbsterdachte Boxensituation aus der Einstiegsaufgabe zu *Knack die Box* (s. S. 78) löst.

Anhand dieser Fallstudie soll die Relevanz der Gestik für die vorliegende Arbeit noch einmal besonders aufgezeigt werden, indem wir uns ihr in zwei Etappen nähern. Bei der Rekonstruktion des Lösungsprozesses (6.1) sowie der Analyse der Rolle des Materials (6.2) wird zunächst lediglich auf eine intuitive Vorstellung und Beschreibung von Gestik zurückgegriffen. Im dritten Unterkapitel wird daraufhin erörtert, inwiefern die theoretischen Beschreibungsmittel zur Gestik (s. Kap. 2.3) eine weitere Ausschärfung der Analysen ermöglichen.

6.1 Rekonstruktion des Lösungsprozesses

Zur Bearbeitung der ersten Aufgabe von *Knack die Box* haben die Schüler einige ganz weiße und einige mit einem schwarzen Punkt beklebte Streichholzschachteln sowie einen Vorrat an getrockneten weißen Bohnen bekommen, so dass sie die Boxensituationen konkret-gegenständlich (nach-)bauen konnten.

Die folgende Abbildung zeigt, wie die Schüler der hier betrachteten Gruppe an ihrem Tisch zusammensitzen.



An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Namen aller an dieser Studie beteiligten Schülerinnen und Schüler geändert wurden.

Was bisher geschah . . .

Zu Beginn der Gruppenarbeitsphase haben die Schüler zunächst diskutiert, was in der Aufgabe zu tun ist. Zur Klärung hat maßgeblich der Schüler Noah beigetragen. Darauf sei hier explizit hingewiesen, da Noah in der im Folgenden betrachteten Episode keine inhaltlichen Beiträge liefert. Die Schüler haben dann zunächst nur eine Lösung der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation bestimmt (2 | 2). Erst auf Nachfrage des Lehrers, ob es keine weiteren Möglichkeiten gäbe, die Boxen zu befüllen, haben sie noch weitere Lösungen gesucht und gefunden. Dabei haben sie die folgende Strategie verwendet: Sie legten zunächst die Anzahl der Bohnen in einer weißen Box fest, bestimmten die Gesamtzahl der Bohnen in der Anordnung mit den weißen Boxen, subtrahierten dann die Anzahl der einzelnen Bohnen aus der anderen Anordnung und überprüften schließlich, ob die verbleibende Anzahl durch die Anzahl der schwarzen Boxen teilbar ist, um die Anzahl der in die schwarzen Boxen zu füllenden Bohnen zu ermitteln.

Zur Erinnerung: die in der Aufgabe vorgegebene Boxensituation:

Anordnung A	Anordnung B
■■·····	□□□···

Nils hatte zwar schon während der Ermittlung der ersten Lösung vorgeschlagen, die Bohnen lieber auf die Boxen als hinein zu legen (<32> im Transkript „Ermittlung der ersten Lösung zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation“, s. Anhang B.1, S. 264), dies wurde aber erst bei der Vervollständigung der Ergebnisse umgesetzt. Bei der Ermittlung der ersten Lösung befüllten die Schüler die Boxen noch kontextgetreu und gemäß ihrem Lösungsverfahren: sie legten zuerst je zwei Bohnen in die weißen Boxen, berechneten anschließend, dass dann auch in die schwarzen Boxen je zwei

Bohnen müssen, und nahmen diese Befüllung dann auch tatsächlich vor. Bei der Vervollständigung der Ergebnisse wurden nur noch die weißen Boxen belegt, die daraus für die schwarzen Boxen ermittelten Bohnenanzahlen nur noch in der Tabelle festgehalten. Am Schluss der Vervollständigung der Ergebnisse legten die Schüler dann sogar gar keine Bohnen mehr aus (also auch nicht mehr auf die weißen Boxen) und gingen zu einem antizipierenden Zählen über.

Es war wohl auch kein Zufall, dass die Schüler bei der Bearbeitung mit den weißen Boxen begonnen haben:

> **Nils (Beitrag <11> des Transkriptes zur „Ermittlung der ersten Lösung zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation“, s. Anhang B.1, S. 264)**
>
> Ach so, dann müssen jetzt hier *(legt beide Hände an die schwarzen Boxen)* zum Beispiel <u>keine</u> *(tippt mit der rechten Hand auf die schwarzen Boxen)* Bohne, *(führt die rechte Hand zu den weißen Boxen)* ach nee, hier müssen auf jeden Fall drei Bohnen drin sein *(tippt mehrmals mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger auf die drei weißen Boxen)*, oder? In diesen, also in jedem eine *(tippt mit dem Zeigefinger der rechten Hand nacheinander auf alle drei weißen Boxen)*, ne?

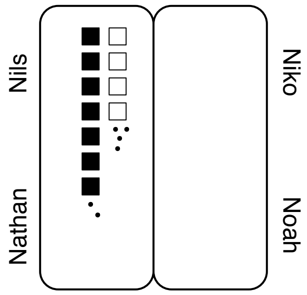
Nils will zunächst zwar ausprobieren („zum Beispiel“). Als er sich aber den weißen Boxen zuwendet, meint er, dass in jeder weißen Box zumindest eine Bohne liegen müsse. Dies ließe sich natürlich auch als bloßes Ausprobieren verbuchen, sein „ach nee“ ist aber ein Indiz dafür, dass er in der Boxensituation irgendetwas entdeckt hat, was die Befüllung jeder weißen Box mit einer Bohne sinnvoll erscheinen lässt. Es könnte die Überlegung dahinter stecken, dass in Anordnung A schon mehr Bohnen als in Anordnung B liegen (jeweils die einzelnen Bohnen; die Boxen sind noch leer) und in jeder weißen Box daher mindestens eine Bohne liegen muss.

Zur Erinnerung: die in der Aufgabe vorgegebene Boxensituation:

Anordnung A	Anordnung B
■■•••••	□□□•••

Die hier beschriebene Grundstrategie kommt auch im Folgenden bei der Lösungssuche zu einer selbst erdachten Boxensituation zum Tragen. Da sie dabei aber noch verfeinert wird, wurde diese Episode als Fallbeispiel ausgewählt.

Die folgende Abbildung zeigt, wie die Schüler die beiden Anordnungen ihrer selbsterdachten Boxensituation in je einer Zeile vor Nils auf dem Tisch aufgebaut haben. Die Abbildung wird zur Verbesserung der Lesbarkeit der Analysen am Ende jedes Transkriptausschnitts wiederholt.



Als sie gerade anfangen wollen, nach Lösungen für diese Boxensituation zu suchen, teilt der Lehrer ihnen mit, dass er gleich die Arbeitsphase beenden wird.

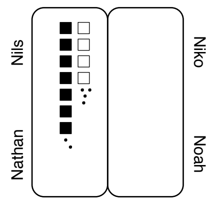
Szene 1: Eine Bohne auf jeder (schwarzen) Box[1]

Noah steht (<1>–<6>). Es ist nicht zu erkennen, ob er beobachtet, was die anderen machen, oder ob er auf die Blätter der anderen schaut. Kurz vor Beginn der Szene wollte er wissen, ob sie die Lösung ihrer eigenen Boxensituation nun auch in einer Tabelle aufschreiben sollen. Während der Vervollständigung der Ergebnisse zu der gegebenen Boxensituation hatte er mit einem Lineal und sehr viel Akribie eine Tabelle in sein Heft gezeichnet, während die anderen die Lösungen gesucht und diese dann in die vorgegebene Tabelle auf ihren Arbeitsblättern eingetragen hatten.

1	Nils	Lass' mal versuchen mit jeweils einem oben drauf *(# beginnt, auf jede schwarze Box eine Bohne zu legen).*
2	Nathan	*# beginnt, auf jede weiße Box eine Bohne zu legen*
3	Nils	Nee, da nicht, da nicht, da nicht *(# nimmt die Bohnen, die Nathan auf die weißen Boxen gelegt hat, wieder herunter und legt dann weiter Bohnen auf die schwarzen Boxen).*
4	Nathan	*# nimmt ebenfalls eine Bohne von einer weißen Box und legt sie stattdessen auf eine noch nicht besetzte schwarze*

[1]Transkriptionslegende im Anhang (s. S. 262)

5	Niko	*(in nachäffendem Tonfall)* Pack mal jeweils eine Bohne oben drauf.
6	Nils	Ok, das wär'n dann zwei *(zeigt auf die beiden einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun *(zeigt während des Zählens nacheinander auf die Bohnen auf den schwarzen Boxen – oder auf die Boxen selbst(?))*. # Neun, vier *(umschließt mit den Fingern die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen; in dieser Position verharrt er)*
7	Nathan	# Zehn, elf, zwölf, 13 *(zeigt während des Zählens nacheinander auf die weißen Boxen)*
8	Noah	# *setzt sich und fegt Radiergummi-Krümel vom Tisch.*
9	Nils	Ja *(lässt dabei die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen los)*. Genau.
10	Nathan	*legt eine Bohne auf eine weiße Box*



Zu Beginn dieser Szene schlägt Nils vor, es mit je einer Bohne auf den Boxen zu probieren, und beginnt, auf jede schwarze Box eine Bohne zu legen (<1>). Er legt die Bohnen nicht *in*, sondern *auf* die Boxen – so wie sie es bei der Vervollständigung der Ergebnisse zwischenzeitlich auch gemacht haben, bevor sie ganz zum antizipierenden Zählen übergingen. Diese Handhabung der Bohnen offenbart eine erste Lösung vom Kontext. Nathan greift Nils' Vorschlag auf, indem er anfängt, auf jede weiße Box eine Bohne zu legen (<2>). Dies erweist sich jedoch nicht in Nils' Sinne: Nils unterbricht Nathan (<3>) und nimmt die Bohnen wieder von den weißen Boxen herunter. Nathan folgt Nils' Anweisung und legt sogar ebenfalls eine Bohne von einer weißen auf eine schwarze Box um (<4>), obwohl seine Handlung eigentlich zu Nils' ursprünglicher Äußerung passt. Allerdings ist seine Handlung nicht in Einklang mit der Strategie, die sie zur Lösung der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation verwendet haben. Vermutlich sieht Nils in Nathans Handlung also eine Störung ihres Vorgehens, die er in <3> zu verhindern versucht. Es bleibt hier aber die Frage, warum Nathan Nils' ungenaue Anweisungen nicht hinterfragt: nimmt er einfach hin, dass Nils mit seiner Angabe „mit jeweils einem oben drauf" offenbar etwas anderes gemeint hat, als er selbst zunächst verstanden hat, ist Nils die nicht zu hinterfragende Autorität bei dieser Aufgabe, oder fällt Nathan nach Nils'

Anweisung, keine Bohnen mehr auf die weißen Boxen zu legen, wieder ein, dass sie bisher anders vorgegangen sind? An wen sich Nikos Äußerung in <5> richtet, ist unklar, und es sind auch viele Gründe für seinen Beitrag denkbar: Langeweile, ein Außen-vor-dem-Geschehen-Stehen oder auch eine Ablehnung von Nils' Verhalten gegenüber Nathan.

Nils beginnt bei der Bearbeitung der nun betrachteten Boxensituation mit den schwarzen Boxen, d. h. er legt zunächst die Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box fest, während er bei der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation mit den weißen Boxen begonnen hat. Es lässt sich vermuten, dass Nils folgende Strategie anwendet, die zum Wechsel der Reihenfolge führt: Beginne mit den Boxen derjenigen Anordnung, in welcher weniger einzelne Bohnen neben den Boxen liegen, um zunächst den Bohnenrückstand gegenüber der anderen Anordnung auszugleichen (zu Beginn geben die Anzahlen der einzelnen Bohnen ja die Gesamt-Bohnenanzahlen in den Anordnungen an, da die Boxen noch leer sind). Dies ist in der ursprünglichen Boxensituation die Anordnung mit den weißen Boxen, in der nun betrachteten die Anordnung mit den schwarzen Boxen. Diese Hypothese lässt sich durch Beitrag <11> des Transkriptes zur „Ermittlung der ersten Lösung zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation“ (s. o.) stützen.

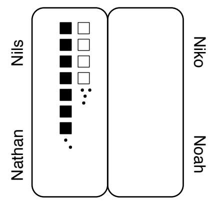
Noah nimmt an dieser Szene nicht aktiv teil. Ob er die anderen beobachtet, oder ob er auf die Blätter der anderen schaut, ist nicht erkennbar. Es fällt auf, dass in den Beiträgen <1> bis <5> viel Handlung wenigen sprachlichen Äußerungen gegenübersteht, und Nils das Geschehen auf beiden dieser Ebenen dominiert.

Nachdem sie auf alle sieben schwarzen Boxen je eine Bohne gelegt haben, zählt Nils die Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen ab und erhält neun. Nathan zählt anschließend, nacheinander auf die weißen Boxen in der anderen Anordnung zeigend, bis 13 weiter (<7>), während Nils mit den Fingern die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen umschließt, ihre Anzahl ohne abzuzählen direkt benennt und in dieser Position verharrt (<6>). Das Umschließen der einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen zeigt wohl, dass Nils hier eigentlich die ursprüngliche Strategie weiterverfolgen möchte. Demnach müsste die Anzahl der umschlossenen Bohnen nun von der Gesamtanzahl der Bohnen in der anderen Anordnung abgezogen werden. Nathans Weiterzählen ist möglicherweise planvoll, wenn er sich beispielsweise überlegt hätte, dass man bei neun Bohnen in der einen Anordnung beim Durchzählen der Bohnen in beiden Anordnungen auf insgesamt 18 kommen müsste. Dann ist zu bemerken, dass Nathan die noch auf die weißen Boxen zu legenden Bohnen abzählt, ohne sie vorher auszulegen. Die weißen Boxen werden dabei – zunächst in einem ganz materiellen Sinne – zu Platzhaltern für die eigentlich zu zählenden Bohnen. Bei dieser Interpretation stellt sich die Frage, ob Nathan meint, den gleichen Plan zu verfolgen wie Nils. Andererseits ist es auch denkbar, dass Nathan Nils' Zählprozess einfach fortsetzt, ohne damit ein konkretes Ziel zu verfolgen. Auch im weiteren Verlauf des Geschehens ist nicht klar erkennbar, inwieweit sich die Handlungen und Äußerungen der beiden Schüler aufeinander beziehen: Reagiert Nils in <9> auf Nathan oder spricht er zu sich selbst? Beginnt Nathan wieder Bohnen auf die weißen Boxen zu legen, weil er Nils Äußerung in <9> als Bestätigung aufgefasst hat und die vermeintlich gefundene Lösung nun doch wieder durch Bohnen konkretisieren will, oder einfach um besser zählen zu können? Oder ist es gar ein Aufbegehren gegen Nils, der ihn vorher ja daran gehindert hatte, Bohnen auf die weißen Boxen zu legen. Im Falle des Zutreffens der letzten Deutung, kann dieses Aufbegehren aber als nicht sehr nachdrücklich eingestuft werden, da Nils bereits im nächsten Wortbeitrag die von Nathan aufgelegte Bohne wieder entfernt (s. nächste Szene) und dafür sogar von Nathan Unterstützung erntet (<12>). Dabei ist es denkbar, dass Nathan sich allem, was Nils sagt und macht, fügt und es nachahmt. Dies würde auch erhellen, warum Nathan die Missverständlichkeit von Nils' Anweisungen vom Anfang (<1> und <3>) nicht herausgestellt hat.

Szene 2: Ergänzung zu je zwei Bohnen auf jeder schwarzen Box

11	Nils	Nein, passt nicht *(nimmt Nathans Bohne wieder von der weißen Box weg)*
12	Nathan	Passt nicht. Dann müssen wir, nehmen wir, dann nehmen wir eben andere Zahlen.

13	Nils	Nee, das geht nicht, # mit eins geht nicht. Tu mal zu jedem
14	Niko	# Nee.
15	Beob.	*legt Heftstreifen auf den Tisch*
16	Nathan	*(an Beobachterin gerichtet)* Wofür ist das?
17	Beob.	Wird gleich erklärt.
18	Nils	# Tu mal zu jedem zwei hin *(beginnt, auf jede schwarze Box eine zweite Bohne zu legen)*
19	Noah	# *wendet sich seiner Mappe zu, nimmt Bleistift und Lineal zur Hand, legt beides wieder weg, nimmt seinen Füller, schiebt das Lineal hin und her; schaut dabei immer wieder auf sein Arbeitsblatt; ist damit bis zum Ende dieser Szene beschäftigt*
20	Nathan	*(nimmt sich einen Heftstreifen)* Ich möchte einen roten.
21	Niko	# *hilft Nils beim Auffüllen der Bohnen auf den Boxen.*
22	Nils	# Gib noch mal ein paar her *(guckt, ob Nathan noch Bohnen bei sich liegen hat; dort sind aber keine)* Ma, Nathan! # *(nimmt sich stattdessen Bohnen aus dem Vorrat, der vor Niko liegt).*
23	Nathan	# *(legt den Heftstreifen zurück)* Für mich ist der rote reserviert.



Obwohl Nathan bisher nur auf eine weiße Box eine Bohne gelegt hat, erkennt Nils in <11> bereits, dass die Belegung jeder weißen Box mit einer Bohne keine Lösung liefern wird. Er äußert seine Feststellung und entfernt die Bohne wieder von der weißen Box. Nathan stimmt ihm daraufhin zu und schlägt vor, andere Zahlen zu nehmen (<12>). Dabei wird nicht deutlich, ob er nur auf die weißen Boxen eine andere Anzahl von Bohnen legen möchte, oder ob er erkannt hat, dass es keine Lösung mit einer Bohne auf jeder schwarzen Box gibt, und somit einen ganz neuen Lösungsversuch beginnen möchte. Zieht man in Betracht, dass der bisherige Interaktionsverlauf daraufhin deutete, dass Nathan sich stark an Nils orientiert, wäre hier auch denkbar, dass Nathan gar nicht erkennt, dass es nicht passt, sondern es Nils nur nachspricht. Sein Vorschlag, andere Zahlen zu nehmen, wäre dann unter Umständen nur ein schlichtes „Wenn das nicht geht, muss es anders gehen.“

Nils’ Folgeäußerung ist für sich betrachtet ebenfalls nicht eindeutig: er könnte ausdrücken wollen, dass es mit je einer Bohne auf jeder schwarzen *und* jeder weißen Box nicht geht, oder, dass es gar keine Lösung mit einer

Bohne auf jeder schwarzen Box gibt. Da er die Belegung der weißen Boxen mit je einer Bohne aber schon in <11> als nicht passend eingestuft hat und in <13> nun wiederum äußert, dass es nicht passe, liegt die Vermutung nahe, dass er Nathans Äußerung als Vorschlag versteht, nur die Belegung der weißen Boxen zu variieren, und diesen hier ablehnt. Seine Anweisung „Tu mal zu jedem zwei hin“, die er in <13> abbricht, in <18> dann aber in der Wiederholung vollständig ausspricht, und das folgende Ergänzen der Bohnen auf den schwarzen Boxen zu je zwei weisen ebenfalls daraufhin, dass ihm bewusst ist, dass es keine Lösung mit je einer Bohne auf jeder schwarzen Box gibt.

Während Nathan sich ab <16> durch die auf den Tisch gelegten Heftstreifen ablenken lässt, gelingt es Niko, dessen Platz als Nils' Interaktionspartner einzunehmen (<21>). Vorab ließ sich lediglich durch sein Nachäffen von Nils (<5>) und das zustimmende „Nee“ in <14> Nikos Teilhabe am Lösungsverlauf feststellen. Nun hilft er Nils bei der Ergänzung der Bohnen auf den schwarzen Boxen zu je zwei. Sein Aktiv-Werden an dieser Stelle ist nicht nur durch Nathans Ablenkung ermöglicht, sondern wird auch dadurch begünstigt, dass bei ihm Bohnen liegen.

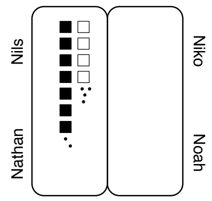
In den Beiträgen <22> und <23> manifestiert sich noch einmal Nathans Orientierung an Nils. Nachdem Nils in <22> seinen Unmut gegenüber Nathans Abschweifen von der Aufgabe geäußert hat, legt Nathan in <23> den ausgewählten roten Heftstreifen wieder zurück, formuliert zwar noch einen Anspruch auf diesen Heftstreifen, scheint diese Nebenbeschäftigung damit aber abzuschließen. Dies bestätigt sich in der folgenden Szene, in welcher er wieder konstruktiv in die Interaktion eintritt.

Noah möchte ab <19> wohl etwas aufschreiben, scheint aber noch unsicher über das wie, wo und/oder was zu sein.

Szene 3: Ermittlung einer ersten Lösung (2 | 3)

23.1	Noah	*beginnt, etwas in seine Mappe zu schreiben, und ist damit bis zum Ende der nächsten Szene beschäftigt; schaut zwischendurch immer wieder auf (auf sein Arbeitsblatt oder die aufgebaute Boxensituation?)*

24	Nils	Ok, wieviel sind das *(macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung)*, zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, 14 *(zeigt entlang der schwarzen Boxen; legt eine Bohne, die offenbar auf die Nachbarbox gekullert ist, wieder zurück, so dass auf allen schwarzen Boxen je zwei Bohnen liegen)*, 16 *(zeigt auf die Anordnung mit den schwarzen Boxen)* minus vier *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)* 12 #, dann muss hier drei ## *(zeigt auf eine weiße Box)*. Zwei, drei.
25	Nathan	# Sind 12.
26	Niko	## *nimmt Bohnen aus dem Vorrat. Er schaut dann zu Nils und Nathan, die sich ihren Blättern zuwenden, um die Lösung aufzuschreiben, und legt die Bohnen wieder weg.*
27	Nathan	Zwei, drei?
28	Nils	Zwei, drei. *(nickt)*
29	Nathan	Sauber, Nils. *(Nils und Nathan schreiben das Ergebnis auf.)*



Der Kern dieser Szene ist Nils' erste Äußerung, in welcher er direkt die Lösung (2 | 3) ermittelt. Das verwendete Verfahren kann nur erschlossen werden, wenn sein Umgang mit dem Material und seine verbalen Äußerungen in der Interpretation miteinander in Verbindung gebracht werden. Die verbalen Artikulationen, die seine intensiven Überlegungen begleiten, sind nämlich bruchstückhaft. Er liefert – wie es für solche Phasen der Lösungsfindung typisch zu sein scheint – keine zusammenhängende Erläuterung, sondern deutet nur Teilschritte seines Verfahrens an („Ok, wieviel sind das", „minus vier"). Nils verbale Äußerungen, seine Gestik und sein Hantieren mit den Bohnen werden im Zusammenhang hier wie folgt interpretiert: als erstes möchte er ermitteln, wie viele Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen liegen („Ok, wieviel sind das *(macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung)*"). Dazu zeigt er zunächst auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen und benennt ihre Anzahl („zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*"), nennt dann die Anzahl der Bohnen auf den schwarzen Boxen und verdeutlicht durch Gestik und Handlung, was er meint („14 *(zeigt entlang der schwarzen Boxen; legt eine Bohne, die offenbar auf die Nachbarbox* *gekullert ist, wieder zurück, so dass auf allen schwarzen Boxen je zwei Bohnen liegen)*"). Anschließend berechnet er die Summe der Bohnenanzahlen $2 + 14$, nennt aber wieder nur das Ergebnis 16 und zeigt auf die entsprechende Anordnung. Den nächsten Rechenschritt gibt er verbal an („minus vier") und erläutert durch Gestik, auf welche Bohnen sich der Subtrahend seiner Rechnung bezieht. Die Subtraktion wird von ihm selbst, aber auch von Nathan ausgeführt, der ihm bei der Nennung des Ergebnisses ins Wort fällt. Am Ende seines Beitrags kommt Nils zu dem Schluss, dass man jede weiße Box mit drei Bohnen belegen kann. Er sagt „dann muss hier drei" und expliziert das „hier" durch Zeigen auf eine weiße Box. Er beendet seine Ausführungen durch die Nennung der gefundenen Lösung („Zwei, drei")[2]. Nach Nils' Feststellung „dann muss hier drei" nimmt Niko Bohnen aus dem Vorrat. Vermutlich möchte er die weißen Boxen der gefundenen Lösung entsprechend befüllen bzw. belegen. Da er dann aber sieht, dass die anderen sich ihren Blättern zuwenden, legt er die Bohnen wieder weg. Bevor Nathan die Lösung in seine Tabelle einträgt, vergewissert er sich noch einmal bei Nils. Nach dessen Wiederholung der Lösung schließt Nathan die Szene mit „Sauber, Nils" ab.

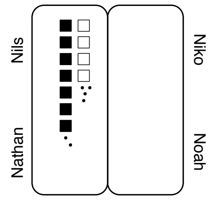
Noah schreibt während dieser und der nächsten Szene nun tatsächlich etwas auf. Bei einem Abgleich des Videos mit den Schülerdokumenten lässt sich feststellen, das er kenntlich macht, dass die kurz vorher von ihm erstellte Tabelle zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation gehört.

Szene 4: (Gedachte) drei Bohnen auf jeder schwarzen Box

30	Nils	Jetzt versuchen wir das mal mit dre *(beginnt je eine dritte Bohne auf die schwarzen Boxen zu legen)*
31	Niko	*# schreibt etwas in seine Tabelle*

[2]Bemerkung: Beim Notieren der Lösungen zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation hat wohl diese Art der Lösungsnennung dazu beigetragen, dass die Schüler einige ihrer Lösungspaare in der falschen Reihenfolge in ihre Tabellen eingetragen haben. Sie nannten nämlich zuerst die festgelegte Bohnenanzahl (pro weißer Box) und dann die ermittelte (pro schwarzer Box) und trugen sie in dieser Reihenfolge in ihre Tabellen ein, die aber die Reihenfolge (1) Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box, (2) Anzahl der Bohnen pro weißer Box vorsahen. Bei der selbsterdachten Boxensituation entsteht dieses Problem nicht, da sie zuerst die Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box festlegen.

32	Nathan	# Mit dre. Ok, dre, drei, sechs, neun, zwölf, 15 ##, 18, ### 21 *(zeigt nacheinander auf die schwarzen Boxen)* minus zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)* sind
33	Nils	## *hat nun auf vier schwarze Boxen Bohnen gelegt. Er bricht das Auffüllen der Bohnen ab und schaut Nathan beim Zählen zu.*
34	Niko	### 21.
35	Niko	Sind 17 *(zeigt auf die Anordnung mit den weißen Boxen).*
36	Nathan	Sieb-, 16



Durch seinen Ansatz am Ende der dritten Szene, die gefundene Lösung (2 | 3) durch Bohnen zu konkretisieren, aufgehalten, schreibt Niko vermutlich erst in <31> die Lösung in seine Tabelle. Dies hält ihn aber nicht davon ab, Nathans Ausführungen in <32> zu folgen und Zwischenergebnisse beizutragen (auch wenn der in <35> genannte Wert nicht zu Nathans Rechnung passt).

Nils schlägt zu Beginn dieser Szene vor, es nun mit drei Bohnen auf jeder schwarzen Box zu probieren. Auch hier deutet er seinen Plan aber wieder nur durch Indikatoren an: sprachlich macht er nicht explizit, ob je drei Bohnen in jede schwarze, in jede weiße oder in alle Boxen gelegt werden sollen. Da er aber wiederum damit beginnt, Bohnen auf die schwarzen Boxen zu legen, liegt die Vermutung nahe, dass er beim bisher angewendeten Verfahren bleiben will, zunächst die Bohnenanzahl für die schwarzen Boxen festzulegen, um dann zu ermitteln, ob es eine Lösung für die weißen Boxen gibt. Nathan hilft diesmal nicht beim Auffüllen der Bohnen, sondern greift Nils' Vorschlag anders auf <32>: er löst sich vom konkreten Auslegen und Abzählen der Bohnen und berechnet wie viele Bohnen insgesamt auf den Boxen liegen *würden*, wenn man auf jede Box drei Bohnen legen *würde*. Dabei zeigt er auf die schwarzen Boxen, so als lägen dort Bohnen. Während Nathan so additiv abzählend die antizipierte Anzahl der Bohnen auf den schwarzen Boxen ermittelt, bricht Nils das Auffüllen der Bohnen auf den Boxen ab und schaut Nathan beim Zählen zu.

Man könnte Nathans Vorgehen an dieser Stelle als Wiederaufgreifen seines Vorgehens aus <7> (Szene 1, S. 88) auffassen: In <7> lag auf jeder schwarzen Box bereits je eine Bohne und Nathan hat dann auf die weißen Boxen zeigend weitergezählt, ohne vorher auf die weißen Boxen Bohnen auszulegen. Eine mögliche Deutung war, dass er dabei die weißen Boxen – in einem zunächst ganz materiellen Sinne – zu Platzhaltern für die noch auszulegenden Bohnen gemacht hat. Hier legt er nun gar keine Bohnen mehr auf die Boxen aus – also auch nicht mehr auf die schwarzen – sondern arbeitet komplett antizipierend, so wie sie es, wie bereits erwähnt wurde (s. S. 86), auch schon bei der Vervollständigung ihrer Ergebnisse zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation gemacht haben.

Die vollständige Durchführung des Verfahrens gelingt Nathan an dieser Stelle allerdings nicht. Sein Vorschlag „minus zwei“ (am Ende von <32>) könnte zwar eine Verkürzung der nacheinander auszuführenden Schritte $+2$ und -4 darstellen, im Zusammenhang mit seiner Gestik (er zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen) ist diese Deutung aber eher nicht plausibel, da er im Falle des Zutreffens eher auf zwei der vier einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen zeigen müsste. Dies zeigt schön die manchmal zu beobachtende Flüchtigkeit des scheinbar Verstandenen: noch bei der Vervollständigung der Ergebnisse zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation hatte Nathan nach anfänglichen Schwierigkeiten die Abfolge der Verfahrensschritte mit Nils geklärt (insbesondere die Tatsache, dass die Anzahl der einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen in der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation subtrahiert werden muss; s. Transkript im Anhang B.2, S. 269) und dann weitere Lösungen berechnet (z. T. zwar mit Rechenfehlern, aber mit dem richtigen Verfahren). Es ist denkbar, dass die „Entdeckung“ der durchzuführenden Subtraktion bei der Ergänzung der Ergebnisse zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation hier nun alles andere überdeckt, so dass Nathan nur noch subtrahiert, also auch die Anzahl der einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen (2), die in diesem Fall eigentlich addiert werden müsste. Eine etwas andere Erklärung für Nathans Vorschlag wäre, dass er die Notwendigkeit der Durchführung der Subtraktion fälschlicherweise an den Verfahrensschritt knüpft, in welchem die schwarzen Boxen behandelt werden, und nicht allgemein an den

Schritt, der die Anordnung mit der größeren Anzahl an einzelnen Bohnen bearbeitet (welches in der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation die Anordnung mit den schwarzen Boxen und in der hier betrachteten Situation die Anordnung mit den weißen Boxen ist).

Niko hält sich in <35> offenbar nicht an den von Nathan angegebenen Rechenschritt „minus zwei", sondern subtrahiert vier und erhält 17. Die Subtraktion von vier ist im verwendeten Verfahren zwar ein Zwischenschritt, bisher wurde allerdings zunächst stets die Summe aus zwei und der Gesamt-Anzahl an Bohnen auf den schwarzen Boxen gebildet, und dann vier subtrahiert. Es ist möglich, dass er die beiden Schritte umdrehen möchte, dass er den Schritt „plus zwei" vergessen hat, oder dass er davon ausgeht, dass die zwei einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen in den 21 schon mitgezählt sind.[3]

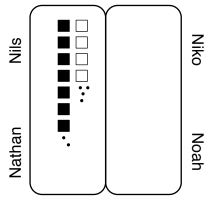
Die bei Nathan (und Niko?) zu beobachtenden Unsicherheiten im Hinblick auf die durchzuführenden Verfahrensschritte deuten daraufhin, dass sie das Verfahren noch nicht ganz verstanden haben, insbesondere nicht, welche Additionen/Subtraktionen warum durchgeführt werden müssen.

Szene 5: Ausschließen einer Lösung mit drei Bohnen auf jeder schwarzen Box und Entfernung aller Bohnen aus der ausliegenden Boxensituation

37	Nils	[Wieso mit minus?] Das sind 23 *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)* minus vier *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)*
38	Niko	Sind 19.
38.1	Noah	*beginnt mit Bleistift und Lineal ein zweite Tabelle in seine Mappe zu zeichnen und ist damit bis zum Ende der ganzen Episode beschäftigt*
39	Nils	Nee, passt nichts, # passt nichts. Aber mit vier würd, passt wieder *(fängt an die Bohnen von den schwarzen Boxen einzusammeln)*. Müsste, nee, mit vier, warte mal
40	Nathan	# Passt nicht.

[3] In <6> und <24> hatte Nils nämlich zuerst die Anzahl der einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen benannt und anschließend die Gesamt-Anzahl in der Anordnung mit den schwarzen Boxen bestimmt.

41	Nathan	Doch mit vier könnte das aber passen.
42	Nils	Ja, mit vier passt das vielleicht, vielleicht. *(hat nun alle Bohnen von den schwarzen Boxen eingesammelt, und nimmt nun auch noch die einzelnen Bohnen aus den beiden Anordnungen weg)* Vier ist



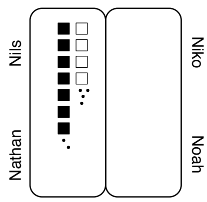
Nils kommt Niko und Nathan nun zu Hilfe. Es ist im Videoband nicht einwandfrei zu verstehen, aber er scheint zunächst zu fragen „Wieso mit minus?“, um im Anschluss direkt die Addition von zwei vorzunehmen (die Anzahl der einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen). Er nennt dabei nur das Ergebnis 23 und zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen. Weder seine verbale Äußerung noch seine Gestik machen explizit, dass zunächst zwei addiert werden soll, noch nicht einmal, dass überhaupt addiert werden soll. Dies lässt sich lediglich aus dem Zusammenhang erschließen. Wie schon bei der Ermittlung des ersten Ergebnisses (<24>), benennt er den nächsten Schritt nun wieder explizit („minus vier“) und verdeutlicht ihn durch Zeigen auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen. Niko führt den Rechenschritt daraufhin aus und erhält 19. Anzumerken ist hier, dass er nun genau den Schritt ausführt, den er vorher auch schon (an verfrühter Stelle) angebracht hat (<35>).

Nils stellt daraufhin fest, dass es keine Lösung mit drei Bohnen in/auf jeder schwarzen Box gibt. Die Wortwahl „passt nichts“ ist markant, aber vermutlich eine Objektifizierung der Feststellung, dass es keine Befüllung der weißen Boxen gibt, die passt. Nathan wiederholt Nils’ Feststellung in leicht abgewandelter Form: „Passt nicht.“ Nils beginnt anschließend direkt zu überlegen, ob vier Bohnen auf jeder schwarzen Box eine zielführende Wahl wären. Währenddessen sammelt er die Bohnen von den schwarzen Boxen ein. Dadurch greift er Nathans Vorstoß aus Szene 4, wieder ohne Bohnen zu arbeiten, aktiv auf. Die Bohnen werden nicht mehr benötigt, die Aufgabe ist auch ohne sie lösbar. Allerdings nimmt Nils zum Schluss auch noch die einzelnen Bohnen aus den Anordnungen weg, die die Situation maßgeblich mitbestimmen. Ob dies unbewusst passiert oder ein Motiv hat, wird nicht deutlich. In Anbetracht der bisherigen starken Nutzung der aufgebauten Boxensituation mit den ausliegenden Bohnen zur gestikbasierten Erläuterung der vorgebrachten Ideen, ist an dieser Stelle zu befürchten, dass diese Aktion den weiteren Verlauf des Lösungsprozesses stören wird.

Noah beschäftigt sich weiterhin mit seiner Mappe: bis zum Ende der gesamten Episode erstellt er nun wieder mit Lineal, Bleistift und sehr viel Sorgfalt eine Tabelle.

Szene 6: Ausschließen einer Lösung mit vier Bohnen auf jeder schwarzen Box und Ermittlung einer zweiten Lösung (6 | 10)

43	Niko	Zwölf, # 16 *(zeigt zweimal auf die schwarzen Boxen)*
44	Nils	# Achtundzw, sind 30. 30 minus vier sind 26 *(deutet mit der Hand zuerst auf die Stelle, an der bis soeben die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen lagen, dann auf die weißen Boxen selbst)*, passt auch nicht. Mit sechs,
45	Nathan	Sechs,
46	Nils	Mal sieben *(zeigt entlang der schwarzen Boxen)* sind 42 *(setzt die Finger der rechten Hand zusammengelegt an der Stelle auf, an der vorher die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen lagen)*
47	Nathan	Minus sechs
48	Nils	Nee, wieso minus sechs?
49	Niko	*(energisch)* Minus vier!
50	Nathan	Ach, minus # vier
51	Nils	# 42 plus zwei *(setzt die Finger der rechten Hand erneut zusammengelegt an der Stelle auf, an der vorher die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen lagen)* erstmal *(hält inne)*
52	Niko	Sind 44, # minus vier sind 40, sind
53	Nils	# Ja, zehn, zehn *(zeigt entlang der weißen Boxen)*.
54	Niko	Ja, ja, zehn.
55	Nils	Sechs und zehn *(Nils, Niko und Nathan schreiben das Ergebnis auf)*



Niko eröffnet die Überprüfung auf Lösbarkeit mit vier Bohnen in jeder schwarzen Box (<43>), indem er beginnt, von zwölf an laut additiv zu zählen. Dabei zeigt er mit jeder Nennung einer Zahl erneut auf die schwarzen Boxen. Er verwendet die Boxen nun also ebenfalls als Platzhalter für die antizipierten vier Bohnen – so wie es Nathan in Szene 4 für drei Bohnen vorgemacht hat (<32>). Nils unterbricht Nikos Ansatz durch Nennung der Gesamt-Bohnenanzahl in den schwarzen Boxen (28). Wie er diese tatsächlich ermittelt hat, ist nicht sicher zu festzustellen. Allerdings legen seine Ausführungen bezüglich des nächsten Lösungsversuchs in <46> nahe, dass er auch in <44> schon die Gesamt-Bohnenanzahl in den schwarzen Boxen durch Multiplikation der Bohnenanzahl pro schwarzer Box mit der Anzahl der schwarzen Boxen ermittelt hat.

Nach der Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahl in den schwarzen Boxen addiert Nils sofort zwei (die zwei einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen), ohne diese Operation aber verbal oder gestisch irgendwie auszuweisen. Er nennt lediglich das Ergebnis (30). Die Subtraktion von vier wird wiederum – wie bei den bisherigen Lösungsversuchen auch – sowohl gestisch als auch verbal angezeigt. Da die einzelnen vier Bohnen neben den weißen Boxen kurz vorher aber entfernt wurden, bleibt als Referenz der Zeigegeste nur noch die Stelle, an der die Bohnen vorher lagen. Nils benennt die Differenz und deutet anschließend mit der Hand auf die weißen Boxen. Da daraufhin sofort die Feststellung folgt, dass dies auch keine Lösung liefert, kann diese Geste als Referenz für das notwendige Aufteilen der verbliebenen Bohnen auf die weißen Boxen angesehen werden. Nils schlägt vor, es mit sechs zu probieren. Hier fällt auf, dass kein Lösungsversuch für fünf Bohnen auf jeder schwarzen Box unternommen wird. Nils erläutert nicht, warum er diese Möglichkeit überspringt, und die anderen fordern weder die Überprüfung noch eine Erläuterung des Überspringens ein. Es ist denkbar, dass nach Überprüfung und notwendiger Verwerfung der Möglichkeit, drei Bohnen auf jede schwarze Box zu legen, die Annahme entstanden ist, dass nur gerade Befüllungen in Betracht kommen.[4]

Wie bereits oben angedeutet, ermittelt Nils in <46> durch Multiplikation der Bohnenanzahl pro schwarzer Box (6) und der Anzahl der schwarzen Boxen (7) die Gesamtzahl der antizipierten Bohnen auf den schwarzen Boxen (42). Seine Rechnung wird weiterhin durch passende Zeigegesten un-

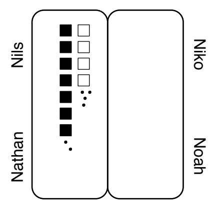
[4]Bei der Ergänzung der Ergebnisse zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation hatte Nils explizit geäußert, dass nur gerade Befüllungen der weißen Boxen funktionieren, es aber auch nicht begründet.

terstützt. Diesmal deutet er mit der Hand anschließend auch auf die Stelle, an welcher zu Beginn die zwei einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen lagen – vermutlich um die Addition dieser zwei zu verdeutlichen. Zur Benennung und Durchführung der Addition kommt es aber erst einige Wortbeiträge später (<51> und <52>), da Nathan zunächst vorschlägt, „Minus sechs“ zu rechnen. Dies könnte eine Zusammenfassung der Lösungsschritte -2 und -4 sein. Die Subtraktion von zwei ist in dem bisher verwendeten Verfahren zwar kein korrekter Lösungsschritt, wurde von Nathan in <32> aber vorgeschlagen, so dass es möglich ist, dass er ihn hier wieder aufgreift. Eine andere Deutungsmöglichkeit liefert die Tatsache, dass Nils die sechs einzelnen Bohnen aus der Boxensituation entfernt hat: da die Subtraktion häufig mit *wegnehmen* assoziiert wird, könnte Nathan sich auch von Nils’ Handlung zu dieser Äußerung verleitet lassen haben. Auf Nils’ ablehnend formulierte Nachfrage „Nee, wieso minus sechs?“ bringt Niko wieder vor, dass vier subtrahiert werden müsse, worauf sich Nathan auch sofort einlassen will (<50>). Diese Passage bestärkt den am Ende der Interpretation zu Szene 4 formulierten Eindruck, dass Niko und Nathan beide noch nicht ganz verstanden haben, welche Additionen/Subtraktionen im verwendeten Verfahren wann und warum durchgeführt werden müssen. Nathan scheint nicht klar zu sein, dass einmal addiert und einmal subtrahiert werden muss, und Niko überspringt auch hier wieder die Addition von zwei (wie bereits in <35>, Szene 4, S. 95).

Nils greift erneut ordnend ein (vgl. <37>, Szene 5, S. 97), indem er feststellt: „42 plus zwei *(setzt die Finger der rechten Hand erneut zusammengelegt an der Stelle auf, an der vorher die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen lagen)* erstmal“ (<51>). Er führt das Verfahren nicht weiter aus, sondern hält inne. Dies könnte ein Zeichen dafür sein, dass ihm etwas auffällt, oder dass er nun auch verunsichert ist. Nach diesem Anstoß führt nun aber Niko sowohl die Addition aus als auch das Verfahren fort: „Sind 44, minus vier sind 40, sind“. Nach der Addition von zwei kann er nun *seinen* Verfahrensschritt „minus vier“ erfolgreich anbringen. Das „sind“ am Ende seiner Äußerung deutet darauf hin, dass er das Verfahren auch noch zu Ende führen möchte. Zu diesem Zeitpunkt hat Nils die Anzahl der Bohnen pro weißer Box aber schon ermittelt. Er erläutert seine Äußerung durch ein Zeigen entlang der weißen Boxen. Niko bestätigt diese Lösung (<54>), Nils nennt abschließend die vollständige Lösung (Anzahl der Bohnen pro schwarzer und pro weißer Box), und die Schüler notieren sie auf ihren Arbeitsblättern.

Szene 7: Ausschließen einer Lösung mit acht Bohnen auf jeder schwarzen Box und Abkürzung des Verfahrens

56	Niko	*(singt, richtet sich an Noah)* Kommst Du nicht weiter, brauchst Du Hilfe?
57	Nathan	Und mit acht? Acht mal # sieben sind 56
58	Noah	# *(zu Niko)* Von Dir? *(lacht)* Nein, Scherz. *(wendet sich wieder seiner Mappe zu)*
59	Nils	Plus, nee, minus zwei einfach nur *(räumt währenddessen die Bohnen in die Schachtel zurück)*, eh, sind 54, durch vier # (.) passt nicht
60	Niko	# *dreht sich vom Tisch weg*



Niko wendet sich in <56> an Noah und fragt ihn, ob er Hilfe benötigen würde. Allerdings deutet sein Tonfall (singend) darauf hin, dass er Noah eher ärgern möchte, als dass er ihm tatsächlich seine Unterstützung anbietet. Noah weist Niko in seine Schranken („Von Dir?“, s. <58>), stellt die Zurechtweisung dann aber durch Lachen und eine entsprechende Äußerung als Scherz dar und wendet sich wieder seiner Mappe zu.

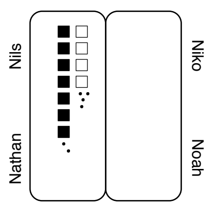
Währenddessen (<57>) stellt Nathan die Belegung der schwarzen Boxen mit je acht Bohnen zur Diskussion und ermittelt direkt die resultierende Gesamtzahl der Bohnen auf den schwarzen Boxen durch Multiplikation mit sieben. In seiner Äußerung wird weder verbal noch gestisch angezeigt, wofür er die acht verwenden will und warum acht mal sieben zu rechnen ist. Dies lässt sich lediglich aus dem Zusammenhang erschließen. Wie Nils in der vorangegangenen Szene, begründet auch Nathan hier nicht, warum er eine Lösungsmöglichkeit (sieben Bohnen auf jeder schwarzen Box) überspringt. Das Ausbleiben von Nachfragen seitens der anderen Schüler deutet an, dass zwischen ihnen Konsens über das Vorgehen besteht. Dafür spricht auch, dass es hier nun Nathan ist, der die nächste Lösungsmöglichkeit vorschlägt und das Verfahren durch Multiplikation der Bohnenanzahl pro Box mit der Boxenanzahl beginnt. Dadurch wird deutlich, dass zumindest er Nils' bisheriges Vorgehen aufgenommen und nicht nur hingenommen hat.

Nils führt den Lösungsprozess fort, wobei er – wie Nathan – ebenfalls keine Gestik mehr verwendet. Er nimmt eine Verkürzung des Verfahrens vor: die bisher nacheinander auszuführenden Operationen $+2$ und -4 werden durch deren Zusammenfassung zu -2 ersetzt (<59>: „Plus, nee, minus zwei einfach nur"). Nils erhält 54 und stellt fest, dass 54 nicht durch vier teilbar ist und dieser Ansatz somit keine Lösung ergibt. Während der Durchführung des verkürzten Verfahrens räumt er die Bohnen in die Vorratsbox zurück. Nils erläutert nicht, warum die Verkürzung des Verfahrens legitim ist, und die anderen Schüler fragen auch nicht nach. Im weiteren Verlauf dieser Episode wird offen bleiben, ob die anderen diesem Schritt Sinn verleihen können oder nicht, da die dritte und letzte ermittelte Lösung von Nils alleine bestimmt werden wird (Szene 8).

Durch das Zurückräumen der Bohnen in die Schachtel manifestiert Nils ebenfalls noch einmal den Abschluss mit der konkreten Beschäftigung mit den Bohnen.

Szene 8: Ermittlung einer dritten Lösung (10 | 17) mit Hilfe des verkürzten Verfahrens

61	Nathan	Mit zehn,
62	Nils	Eh, mit zehn,
63	Nathan	Mit zehn müsste passen
64	Nils	70 *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* minus zwei sind <u>68</u> #, 68 (.) passt,
65	Niko	# *wendet sich wieder dem Tisch zu.*
66	Nathan	Passt *(will das Ergebnis aufschreiben)*
67	Niko	<u>Äh</u>,
68	Nils	Warte mal, sind zehn und 17 *(Nathan, Nils und Niko schreiben nun das Ergebnis auf)*



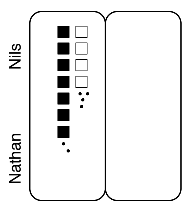
Es ist wieder Nathan, der den nächsten Lösungsversuch anstößt (<61>):

„Mit zehn,“, womit wieder eine Aussage über die anzunehmende Belegung jeder schwarzen Box getroffen wird, was aber erneut nur aus dem Zusammenhang zu erschließen ist. Nachdem Nils den Vorschlag wiederholt hat, vermutet Nathan bereits, dass es mit zehn passen müsste (<63>). Ihm könnte der Viererschritt bei der Befüllung der schwarzen Boxen zwischen den beiden gefundenen Lösungen bewusst geworden sein, es ist aber auch möglich, dass seine Aussage rein intuitiv ist. Anschließend ermittelt Nils durch Multiplikation die Gesamtzahl der Bohnen auf den schwarzen Boxen, was er durch Zeigen auf die schwarzen Boxen andeutet. Die verkürzte Weiterführung des Verfahrens äußert er wiederum nur verbal auf einer rechnerisch-formalen Ebene („minus zwei sind 68“). Nach der Ermittlung der 68 stellt er zunächst fest, dass damit eine weitere Lösungsmöglichkeit gefunden ist, ohne bereits die daraus resultierende Anzahl Bohnen pro weißer Box anzugeben. Sein „Warte mal,“ in <68> bevor er dann die 17 als Quotienten angibt, unterstützt die Vermutung, dass ihm die Teilbarkeit von 68 durch vier vor Ausführung der zugehörigen Division klar ist, da man es als Aufforderung verstehen könnte, abzuwarten, bis er die Division durchgeführt hat. Ob dies für Nathan, der in <66> ebenfalls feststellt, dass es passe, ebenso zutrifft, oder ob er Nils’ Urteil vertraut und dessen Aussage nur wiederholt, bleibt unklar.

Niko scheint in <67> abgehängt worden zu sein. Dies ist vermutlich auf sein Wegwenden vom Tisch am Ende der letzten Szene zurückzuführen. In <68> schreibt er dann aber schon wieder gemeinsam mit den anderen die gefundene Lösung auf.

Szene 9: Abschluss der Aufgabe

69	Nathan	Das reicht, oder?
70	Nils	Ja. Das reicht. *(lehnt sich zurück)*
71	Nathan	*(zu Nils)* Wie sollen wir das denn gleich erklären, warte, wie sollen wir das gleich erklären?
72	Niko	Einfach vorrechnen, würde ich sagen.



Nathan äußert in <69> die Meinung, dass sie genügend Lösungen gefunden hätten. Er schwächt seine Aussage etwas ab, indem er ein fragendes „oder?“ anhängt. Nils stimmt ihm zu und unterstreicht den Abschluss der Arbeit an der Aufgabe, indem er sich zurücklehnt. Nathans folgende Äußerung macht deutlich, dass er zwar keine weiteren Lösungen mehr suchen möchte, die Arbeit für ihn aber auch noch nicht ganz abgeschlossen ist. Er fragt Nils: „Wie sollen wir das denn gleich erklären, warte, wie sollen wir das gleich erklären?“. Was er genau mit „das“ meint, lässt sich nur vermuten: wahrscheinlich geht es ihm darum, darzustellen, wie sie vorgegangen sind. Denkbar wäre allerdings auch, dass er wissen möchte, warum die Lösungen die ermittelte Gestalt haben. Interessant ist auch sein „warte“, welches darauf hindeutet, dass er Nils' Zurücklehnen als Zeichen des endgültigen Abschließens der Aufgabe interpretiert. Nathan erhält schließlich von Niko eine Antwort auf seine Frage. Dieser schlägt vor, dass sie „einfach vorrechnen“ könnten. Damit deutet Niko Nathans Frage wohl als Frage nach der Erklärung des Verfahrens. Ein Befolgen des Vorschlags würde den tatsächlichen Lösungsprozess der Gruppe zwar recht gut wiedergeben, da sie eigentlich auch nur gerechnet haben; zu einem „Erklären“ würden aber noch Informationen z. B. zur Zielgerichtetheit des Vorgehens und zur Verkürzung des Verfahrens fehlen. Nikos Vorschlag zeigt demnach, dass noch gelernt werden muss, was „Erklären“ im strengen mathematischen Sinne bedeutet. Erläutern, wie man vorgegangen ist, ist vermutlich ein Verständnis des Begriffs, das zur Altersstufe passt. Da Nathan auf diesen Vorschlag nicht mehr antwortet, bleibt unklar, was er mit „erklären“ gemeint hat.

Im Anschluss an diese Szene beendet der Lehrer die Gruppenarbeitsphase. In Nils' Heft ist folgende Tabelle als Lösung der Boxensituation zu finden:

schwarzeBox	2	6	10		
weißeBox	3	10	17		

Auf die Frage des Lehrers während des anschließenden Klassengesprächs, wie sie auf ihre Lösung gekommen seien, meint Noah, dass sie die Boxensituation nachgebaut und dann ausprobiert hätten, „was da geht, und was nicht geht“. Der Lehrer fragt nach, wie er sich das Ausprobieren vorstellen könne. Daraufhin wiederholt Noah noch einmal, dass sie die Boxensituation „mit den Kästchen und so“ nachgebaut hätten. Der Lehrer ergänzt: „und dann habt Ihr immer die Bohnen einfach verteilt und geguckt, ob das passt, oder *(so als wollte er noch weitersprechen)*?“, was von Noah bestätigt wird. Damit wird er ihrem Verfahren jedoch nicht gerecht, da dies auch zutreffen würde, wenn man unsystematisch verschiedene Befüllungen ausprobieren würde.

Zusammenfassende Beschreibung des Lösungsverfahrens

Um einen besseren Überblick zu gewährleisten, soll das verwendete Lösungsverfahren hier zusammenfassend aus der bisherigen Analyse der Episode herausgearbeitet werden.

Die Schüler verwenden ein systematisches Verfahren zur Ermittlung der Lösungen, das sich durch die nachstehende Schrittfolge beschreiben lässt:

1. Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box festlegen

   allgemein: Anzahl der Bohnen pro Box in der Anordnung mit der kleineren Anzahl an einzelnen Bohnen festlegen; diese sei hier als Anordnung K bezeichnet;

2. Gesamtzahl der Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen bestimmen

   allgemein: Gesamtzahl der Bohnen in der Anordnung K bestimmen;

3. die vier einzelnen Bohnen aus der Anordnung mit den weißen Boxen von dieser Gesamtzahl abziehen

   allgemein: die Anzahl der einzelnen Bohnen aus der Anordnung mit der größeren Anzahl an einzelnen Bohnen von dieser Gesamtzahl abziehen; die Anordnung mit der größeren Anzahl an einzelnen Bohnen sei hier als Anordnung G bezeichnet;

4. überprüfen, ob sich die verbliebene Anzahl Bohnen glatt auf die vier weißen Boxen aufteilen lässt, und ggf. das Ergebnis der Aufteilung ermitteln

allgemein: überprüfen, ob sich die verbliebene Anzahl Bohnen glatt auf die Anzahl der Boxen in der Anordnung G aufteilen lässt, und ggf. das Ergebnis der Aufteilung ermitteln.

Zu Beginn der Episode setzen sie die Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box (Schritt 1) noch konkret durch Legen der entsprechenden Anzahlen von Bohnen auf die schwarzen Boxen fest, später entfällt diese Konkretisierung dann. Außerdem weicht das Abzählen der (antizipierten) Bohnen auf den schwarzen Boxen immer mehr einer multiplikativen Ermittlung der gewünschten Anzahlen. Die ermittelten Lösungen für die Befüllungen der weißen Boxen werden nicht durch Auslegen von Bohnen konkretisiert.

Nils verkürzt im Laufe des Lösungsprozesses die abzuarbeitende Schrittfolge, indem er die Schritte (2) und (3) zusammenfasst: ihm fällt auf, dass man von der Anzahl der Bohnen in allen schwarzen Boxen zusammen direkt zwei subtrahieren kann und nicht erst zwei addieren und anschließend vier subtrahieren muss.

6.2 Die Rolle des Materials

Bei der Rekonstruktion des Lösungsprozesses ist bereits sehr deutlich geworden, dass das konkrete Material stark in den Lösungsprozess mit eingebunden wurde. Hantieren mit und Zeigen auf Boxen und Bohnen begleitete die einzelnen Schritte der Lösungsfindung. Man konnte auch verfolgen, wie sich die Schüler in der Episode allmählich vom Hantieren mit den Bohnen lösten und ihre Äußerungen nur noch durch Zeigen auf die Boxen und Antizipation der Bohnen unterstützten. Aufbauend auf der Rekonstruktion des Lösungsprozesses soll im Folgenden detaillierter herausgearbeitet werden, wie das konkrete Material genutzt wurde und welche Rolle ihm im Lösungsprozess zukam.

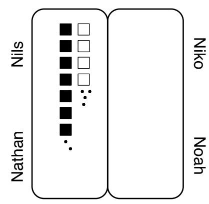
Bei der Deutung des Beitrags <24> (Nils, S. 93) wurde in 6.1 bereits darauf hingewiesen, dass er nur durch gleichzeitige Interpretation der verbalen Äußerung und des Umgangs mit dem Material erfasst werden kann. Um den

Informationsgehalt von Nils' Gestik noch einmal deutlich herausstellen zu können, wird neben die transkribierte Fassung eine Variante seines Beitrags gestellt, die nur seine sprachliche Äußerung wiedergibt.

Nils, <24>

Ok, wieviel sind das, zwei, 14, 16, minus vier, 12, dann muss hier drei. Zwei, drei.

Ok, wieviel sind das *(macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung)*, zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, 14 *(zeigt entlang der schwarzen Boxen; legt eine Bohne, die offenbar auf die Nachbarbox gekullert ist, wieder zurück, so dass auf allen schwarzen Boxen je zwei Bohnen liegen)*, 16 *(zeigt auf die Anordnung mit den schwarzen Boxen)* minus vier *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)* 12, dann muss hier drei *(zeigt auf eine weiße Box)*. Zwei, drei.



Betrachtet man nur den verbalen Anteil seiner Äußerung, so bleibt vieles unklar. Man erfährt zwar, dass Nils eine Anzahl ermitteln will („wieviel sind das"), aber nicht welche. Nils nennt Zwischenergebnisse, gibt aber nur einen einzigen Rechenschritt an („minus vier") und bringt diesen sprachlich auch nicht mit der Boxensituation in Verbindung.

Nils' auf das konkrete Material bezogene Gestik schließt die Informationslücken. Sie verrät, welche Anzahl er ermitteln möchte („*macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung*") und deutet an, worauf sich die genannten Zwischenergebnisse, der angeführte Rechenschritt und das „hier" bei Nennung des Ergebnisses beziehen (*Zeigen auf die jeweiligen Bohnen bzw. Boxen*).

Ein erneutes aufmerksames Lesen des gesamten Transkriptes und der bisherigen Analyse im Hinblick auf die Relevanz der Gestik bzw. der Handlungen am Material für das Verständnis der Äußerungen zeigt, dass sich das beschriebene Phänomen durch das ganze Transkript hindurch zieht. In der Regel wird die Bedeutung einer Äußerung in diesem Transkript nur durch die Betrachtung von Sprache *und* Handlung bzw. Gestik bezogen auf das Material klar. Man stellt sogar fest, dass die Schüler gar nicht explizit über die Boxen und Bohnen sprechen. Sprachlich wird nur durch Indefinitpronomen (<1>: „mit jeweils *einem*“, <18>: „zu *jedem*“), ortsbestimmende Adverbien (<1>: „mit jeweils einem *oben drauf*“, <3>: „*da* nicht“, <24>: „dann muss *hier*“) und Demonstrativpronomen (<6>: „*das* wär'n dann“, <24>: „wieviel sind *das*“, <37>: „*Das* sind 23“) indirekt auf das Material Bezug genommen. Dies begründet vermutlich die Schwierigkeiten bei der alleinigen Interpretation der verbalen Anteile der Äußerungen.

Die Gestik in Beiträgen, in welchen die Schüler rechnerisch Bohnenanzahlen ermitteln (z. B. <24>, s. o.), unterscheidet sich von derjenigen in Situationen, in denen die gewünschten Anzahlen durch Abzählen bestimmt werden (z. B. <6>, Nils, S. 88). In <6> erfasst Nils die einzelnen Bohnen in beiden Anordnungen simultan und benennt direkt ihre Anzahlen ohne abzuzählen. Die auf den schwarzen Boxen liegenden Bohnen (eine Bohne auf jeder Box) zählt er jedoch ab und zeigt dabei einzeln nacheinander auf jede Bohne oder jede schwarze Box – dies ist im Video nicht genauer zu erkennen. Er ermittelt so die Gesamtzahl an Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen, da er bei drei zu zählen beginnt, die zwei einzelnen Bohnen in dieser Anordnung so also schon in seine Zählung miteinbezieht. Im oben zitierten Beitrag <24> hat Nils vermutlich durch Multiplikation die Anzahl der Bohnen auf den schwarzen Boxen ermittelt. Bei Nennung des Ergebnisses zeigt er entlang der schwarzen Boxen – anders als in <6> ohne Zwischenstops bei jeder auf den Boxen liegenden Bohnenportion – und zeigt dadurch an, dass sich die genannte Anzahl auf alle schwarzen Boxen bezieht.

Die Nutzung des Materials ändert sich in <32>, als Nathan nicht abwartet, bis je drei Bohnen auf den schwarzen Boxen liegen, sondern die Bohnen antizipierend und auf die Boxen zeigend additiv abzählt, wie viele Bohnen auf den schwarzen Boxen liegen *würden*, wenn man auf jede Box drei Bohnen legen *würde*. Er verzichtet auf das konkrete Operieren mit den Bohnen und stellt sich diese nur noch vor. Damit vollzieht er einen Abstraktionsschritt.

Die auf die Boxen bezogene Gestik bleibt für die Interpretation seines Beitrags aber auch hier relevant. Betrachtet man die Art seiner Gestik in diesem Zählprozess, so stimmt sie mit Nils' Zähl-Gestik aus <6> überein, wo die Konkretisierung des Lösungsansatzes durch Bohnen noch vorgenommen wurde. Während Nils in <6> vermutlich auf die auf den Boxen liegenden Bohnen deutete, zeigt Nathan beim Zählen nun aber ohne Zweifel auf die Boxen, die dadurch zu Platzhaltern für die antizipierten Bohnenanzahlen werden. Im weiteren Verlauf der Episode weicht das Zählen wieder einem Berechnen der gesuchten Bohnenanzahlen. Die dabei zu beobachtende Gestik ähnelt zum Teil derjenigen aus der vorhergegangenen Rechen-Phase, in der die zu untersuchende Situation noch durch Auslegen von Bohnen konkretisiert wurde (z. B. <45> u. <46>: Nathan: „Sechs,“, Nils: „Mal sieben *(zeigt entlang der schwarzen Boxen)* sind 42 ...“), tritt aber auch in reduzierter Form auf (z. B. <63> u. <64>: Nathan: „Mit zehn müsste passen“, Nils: „70 *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* ...“). Vorübergehend verschwindet sie sogar ganz:

57	Nathan	Und mit acht? Acht mal sieben sind 56
59	Nils	Plus, nee, minus zwei einfach nur *(räumt währenddessen die Bohnen in die Schachtel zurück)*, eh, sind 54, durch vier (.) passt nicht

Die Schüler nehmen hier nicht mehr explizit auf den gegenständlichen Kontext Bezug und kehren so die Struktur des Problems hervor. Für diese Wahrnehmung der Aufgabe gibt es auch schon an früheren Stellen im Transkript Anzeichen: mit „dann nehmen wir eben andere Zahlen“ macht Nathan in <12> (S. 90) deutlich, dass es eigentlich gar nicht um Bohnen, sondern um Zahlen geht, obwohl sie die ganze Zeit mit Bohnen hantieren. Dies deutet darauf hin, dass er die gelegten Bohnen als Lösung der Situation auch auf einer abstrakteren Ebene erfasst. In Nils' Wegnehmen aller Bohnen aus den Anordnungen (<42>, S. 98) könnte man einen nonverbalen Hinweis auf diese Erkenntnis sehen. Es bleibt zwar unklar, ob diese Aktion bewusst oder unbewusst abläuft, in beiden Fällen manifestiert sich aber die Überflüssigkeit der konkreten Bohnen in seiner richtigen Weiterführung des Lösungsprozesses. Das Zeigen auf den Ort, an dem die Bohnen vorher lagen, ersetzt das Zeigen auf die konkreten Bohnen. Die Stelle wird hier also in gewisser Weise nun zu einem Platzhalter für die feste Anzahl der einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen bzw. zu einem Symbol für die auszuführende Subtraktion von vier.

Mit dem Verschwinden der Gestik tritt eine Präzisierung der Sprache ein: in den oben zitierten Beiträgen <57> und <59> werden alle ausgeführten Rechenschritte benannt, während sonst häufig nur Zwischenergebnisse angeführt wurden. Besonders auffällig ist dies für die auszuführende Division durch vier. Sie wird in dieser Episode hier erstmalig versprachlicht.[5] Bisher wurde sie entweder schlicht ausgeführt und der Quotient benannt, oder es wurde festgestellt, dass es nicht gehe, falls die Division durch vier kein ganzzahliges Ergebnis lieferte. Die sprachliche Darstellung wird aber auch hier wiederum nicht so explizit, dass das Verfahren eindeutig beschrieben und das Ziel des Prozesses ganz klar wäre. Um „Und mit acht?“ als neuen Lösungsversuch zu deuten und – dabei ist es noch deutlicher – um bei „sind 54, durch vier (.) passt nicht“ zu wissen, dass es darauf ankommt, ob vier ein Teiler von 54 ist, und es nicht z. B. darum geht, dass bei dieser Division ein noch anderweitig bestimmter Wert herauskommt, ist Vorwissen nötig.

Wie in 6.1 dargestellt, verkürzt Nils in <59> das bis dahin verwendete Verfahren. In diesem Zusammenhang wird ein Vorteil der gestenfreien und inhaltsungebundenen Ausführung des Verfahrens deutlich: Die gestische Darstellung der verkürzten Vorgehensweise wäre schwierig, insbesondere da die einzelnen Bohnen – auf die sich die Verkürzung ja bezieht – vorab aus den Anordnungen entfernt wurden. Wollte man die vorgenommene Verkürzung konkret an der Situation erläutern, so wäre nämlich eine mögliche Herangehensweise, die gegebene Boxensituation (mit ausliegenden einzelnen Bohnen!) zu manipulieren: die zwei einzelnen Bohnen, die in beiden Anordnungen ausliegen, könnten entfernt werden. Ein solcher Rückbezug zur konkreten Situation findet in dieser Szene nicht statt. Nils gibt

[5] Bei der Suche nach weiteren Lösungen zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation ist die Division auch schon versprachlicht worden, z. B. bei Nils' Erläuterung der zweiten Hälfte seines Verfahrens für Nathan (s. Transkript im Anhang B.2, S. 269). Für seine Erläuterung nutzte Nils dort Sprache und Gestik.

die mögliche Verkürzung auf einer formal-rechnerischen Ebene an – inhaltsungebunden – und es ist auch denkbar, dass ihm diese Idee auf dieser Ebene überhaupt erst gekommen ist.

In 6.1 wurde angemerkt, dass sich die Schüler bei der Lösungssuche zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation schon vom tatsächlichen Hantieren mit den Bohnen gelöst hatten und das Auslegen der Bohnen nur noch gedanklich vollzogen wurde (s. z. B. S. 96). In der hier betrachteten Episode kommt es interessanterweise also zunächst zu einem tatsächlichen und angedeuteten „wieder-konkreter-werden“: Zu Beginn der Episode (Szenen 1-3) wird die Festlegung der Anzahl der Bohnen pro Box in der Anordnung mit weniger einzelnen Bohnen (hier die Anordnung mit den schwarzen Boxen) wieder durch Auflegen von Bohnen auf die Boxen konkretisiert. Erst beim dritten Lösungsversuch (Szene 4) beginnen die Schüler, wieder ohne Bohnen zu arbeiten. Niko möchte wohl sogar die erste gefundene Lösung konkretisieren (Ende Szene 3, s. S. 93). Hier bleibt es aber nur bei dieser Andeutung des Vorhabens, da er doch davon Abstand nimmt, als er sieht, dass die anderen die Lösung gleich aufschreiben. Da es sich bei der selbst erdachten Boxensituation erst um die zweite zu bearbeitende Boxensituation handelt, ist gut vorstellbar, dass die Schüler durch das Auslegen von Bohnen zunächst eine gewisse Vertrautheit mit dem Problem erlangen müssen, bevor sie es allein durch Vorstellen der Bohnen bearbeiten können. Die Handhabung der Bohnen beginnt dabei allerdings auf einer fortgeschrittenen Stufe, da die Schüler die Bohnen sofort *auf* und nicht mehr *in* die Boxen legen und von Anfang an keine Lösung mehr konkretisieren. Die vollständige Loslösung vom Hantieren mit den Bohnen wird dann ein zweites Mal vollzogen.

In Kapitel 5 wurde erörtert, dass Variable in der einführenden Aufgabenstellung zu *Knack die Box* insbesondere als gesuchte Unbekannte auftreten. Die schwarzen und weißen Boxen repräsentieren ihre gesuchten, unbekannten Befüllungen mit Bohnen und sind somit die Symbole für die Unbekannten im gegebenen Kontext. Die Konkretisierung der Gleichungen durch Boxen und Bohnen lenkt die Lösungssuche darüber hinaus auf positive, ganzzahlige Werte. Während sich die Schüler in der diskutierten Episode also wie erwartet auf Lösungen im natürlichen Zahlbereich beschränken, sehen sie in den Boxen jedoch nicht nur Stellvertreter für deren gesuchte, unbekannte Befüllungen[6], sondern verwenden sie, wie die bisherigen Analysen schon angedeutet haben, in gleichem Maße auch als Platzhalter – zunächst in einem durchaus ganz materiellen Sinne.[7] Insbesondere die schwarzen Boxen erhalten Platzhalter-Charakter, wenn für sie zu Beginn des Lösungsprozesses zunächst eine Belegung festgesetzt wird. Dies ist dann besonders ausgeprägt, wenn die Bohnen nur noch antizipiert und nicht mehr ausgelegt werden. Die Schüler verweisen in den Lösungsprozessen dann nämlich durch Zeigen auf die (leeren) Boxen auf die antizipierten Bohnenanzahlen. Die passende Befüllung der weißen Boxen ist gesucht, so dass sie in dieser Episode vornehmlich als Stellvertreter für ihre gesuchte, unbekannte Befüllung auftreten. Da die Schüler nur natürliche Zahlen in Betracht ziehen, tritt bei der Ermittlung der gesuchten, unbekannten Befüllung der weißen Boxen ein Kontrollschritt auf. Ergibt sich ein nicht-ganzzahliger Wert am Ende des Lösungsverfahrens, so wird die gewählte Befüllung der schwarzen Boxen als Lösungsansatz ausgeschlossen. Hier scheint das Phänomen abhängiger und unabhängiger Variable in spezieller Weise auf. Die Befüllung der schwarzen Boxen wird zunächst frei gewählt, die Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box tritt als unabhängige Variable auf. Die Befüllung der weißen Boxen wird systematisch durch Ausnutzen der Abhängigkeit von der Befüllung der schwarzen Boxen bestimmt. Die Anzahl der Bohnen pro weißer Box erscheint im Lösungsprozess klar als abhängige Variable. Die Beschränkung der Lösungssuche auf den natürlichen Zahlbereich und der dazu erforderliche Kontrollschritt im Lösungsprozess machen schließlich aber die *wechselseitige* Abhängigkeit der beiden Variablen voneinander deutlich, welche

[6]Zur Verwendung des Ausdrucks „Stellvertreter für die gesuchten, unbekannten Befüllungen der Boxen“ s. Kap. 5.

[7]Hier wird trotz des materiellen Kontexts die Bezeichnung „Platzhalter“ (eine Variablenrolle nach Drijvers (2003); hier s. S.18) ohne Umschreibung verwendet – im Gegensatz zur Verwendung des Begriffs „gesuchte Unbekannte“. Der Begriff „Platzhalter“ hat nämlich auch in einem materiellen Kontext eine mit der so bezeichneten Variablenrolle korrespondierende Bedeutung. Dies wird z. B. auch daran sichtbar, dass man ohne eine Sinn-ändernde Bedeutungsverschiebung oben auch von „Platzhaltern für die gesuchten, unbekannten Befüllungen der Boxen“ sprechen könnte.

durch die mittels der Boxensituation dargestellten Gleichung ausgedrückt wird. Ob die Wahl einer Befüllung für die schwarzen Boxen Bestand hat, wird nun nämlich abhängig davon, ob sich mit dieser Wahl für die weißen Boxen eine ganzzahlige Befüllung ergibt. Die Schüler sprechen in diesem Zusammenhang von *nicht passen* bzw. *passen* (z. B. <11> oder <64>).

Bei der Durchführung ihres Verfahrens müssen die Schüler flexibel zwischen der Betrachtung der Boxen als Stellvertreter für ihre gesuchten, unbekannten Befüllungen und als Platzhalter hin und her wechseln. Um diese unterschiedlichen Sichtweisen auf die Boxen einnehmen zu können, müssen sie Prozesse des Deutens und Umdeutens vornehmen. In den konkreten Boxen nämlich z. B. einen Platzhalter für eine bestimmte Bohnenanzahl zu sehen, ist schon Ergebnis eines Deutungsprozesses, der im Fallbeispiel vermutlich nicht bewusst abläuft. Sind die Boxen der einen Farbe nun aber als Platzhalter gedeutet, so bedarf es einer gewissen Umdeutung, um in den Boxen der anderen Farbe Stellvertreter für deren gesuchte, unbekannte Befüllungen zu sehen, sind es doch eigentlich gleichartige Objekte. Dass dies durchaus eine Anforderung ist, die es zunächst zu bewältigen gilt, zeigen vielleicht Nathans Beiträge <2> und <7> (S. 87, 88) zu Beginn der Episode, in denen er Nils' Aufforderung „Lass' mal versuchen mit jeweils einem oben drauf" wiederholt auf die schwarzen *und* weißen Boxen bezieht, und nicht – wie von Nils intendiert – nur auf die schwarzen. Nathan will in <2> zunächst Bohnen auf die weißen Boxen legen, woran er von Nils gehindert wird, welcher dadurch seine Aufforderung präzisiert. Nachdem dann aber auf allen schwarzen Boxen Bohnen liegen und Nils die Anzahl an Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen bestimmt hat, zählt Nathan wiederum auf die weißen Boxen zeigend weiter – so als ob dort auch Bohnen lägen. Er behandelt im Grunde also alle Boxen gleich: wenn die schwarzen Boxen Platzhalter für je eine Bohne sind, mit welchen sie folglich auch konkret belegt wurden, so müssen auch die weißen Boxen Platzhalter für je eine Bohne sein, welche man sich zunächst aber auch nur vorstellen kann.

Das Festsetzen der Bohnenanzahl pro schwarzer Box zu Beginn eines jeden Lösungsversuchs muss auch noch in anderer Hinsicht diskutiert werden. Sehen die Schüler wie oben dargestellt in den schwarzen Boxen im Lösungsprozess nämlich Platzhalter für feste, antizpierte Bohnenanzahlen, so arbeiten sie hypothetisch, da sie noch nicht wissen können, ob diese Festlegung zu einer Lösung führen wird bzw. ob die schwarzen Boxen tatsächlich Platzhalter für die gewählte Anzahl an Bohnen sein können. Diese Arbeitsweise passt zu dem von Harel beschriebenen *algebraic representation approach* (s. S. 11), in seiner Terminologie ein *way of thinking*. Das Vorgehen der Schüler ist nah mit folgendem Verfahren auf der formal algebraischen Ebene verwandt: stellt man die gegebene Situation durch eine Gleichung dar (z. B. $4y + 4 = 7x + 2$, mit x: Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box und y: Anzahl der Bohnen pro weißer Box), so kann man annehmen, man wüsste bereits, welchen Wert x annehmen kann, um ein Lösungspaar $(x \mid y)$ natürlicher Zahlen zu erhalten, und kann sich dann überlegen, dass man aus dem bekannten x das y wie folgt bestimmen kann:

$$y = \frac{7x + 2 - 4}{4} = \frac{7x - 2}{4}$$

Der Term ganz rechts in der Gleichungskette beschreibt nichts anderes als die verkürzte Rechnung der Schüler zur Ermittlung der Bohnenanzahl pro weißer Box. Aus der formal algebraischen Darstellung lässt sich folgern, wie x aus $\mathbb{N}$ gewählt sein muss, damit sich für y ebenfalls ein Wert in $\mathbb{N}$ ergibt: x muss gerade sein, aber kein Vielfaches von 4. Die Schüler haben nicht mit einer unbestimmten Zahl x gearbeitet und allgemein die Struktur anaylisiert, sondern die Variable auf einen Wert festgelegt und für diesen überprüft, ob sich ein y in $\mathbb{N}$ ergibt. Dass ihnen dabei aber tatsächlich bewusst war, dass diese Festlegung zunächst hypothetisch ist und sich noch bewähren muss, obwohl man zunächst einfach mit ihr arbeitet, wird an einigen Stellen durch ihre Wortwahl sehr deutlich: sie „versuchen“ es mit einer und drei Bohnen pro schwarzer Box (<1>, Nils, S. 87; <30>, Nils, S. 94), mit vier „könnte das aber passen“ (<41>, Nathan, S. 98), „passt das vielleicht, vielleicht“ (<42>, Nils, S. 98) und „Mit zehn müsste passen“ (<63>, Nathan, S. 103). Nils verwendet in <6> den Konjunktiv sogar beim Zählen der Bohnen auf den schwarzen Boxen („das wär’n dann“, S. 88), obwohl sie tatsächlich dort liegen und ihre Anzahl somit auch im Indikativ beschreibar wäre – an anderen Stellen wird dabei auch der Indikativ benutzt (z. B. in <24>). Der Konjunktiv unterstreicht hier aber besonders, dass die Belegung der schwarzen Boxen mit je einer Bohne zunächst nur eine Hypothese ist. Nach Durchführung ihres Verfahrens stellen sie immer wieder fest: „passt nicht" (<11>, <40>, <44>, <59>), und einmal ebenfalls in diesem Duktus: „passt" (<64>). Für den Vergleich der Vorgehensweise der Schüler mit der oben beschriebenen Lösung mittels der formal algebraisch aufgeschriebenen und umgeformten Gleichung ist die Unterscheidung der Deutung von Termen nach Vollrath und Weigand (2007, S. 83f.) hilfreich: Term als *Rechenschema* und Term als *Bauplan*. Die Schüler haben in dieser Episode das passende Rechenschema für die Boxensituation gefunden. Sie dringen jedoch noch nicht zu einer Auffassung als Bauplan vor, aus dessen Analyse sich folgern lässt, welche Belegungszahlen für die schwarzen Boxen gewählt werden dürfen, so dass es auch bei den weißen Boxen „passt".

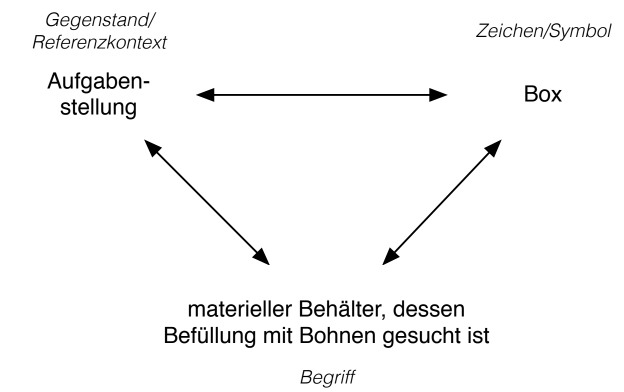
Des Weiteren spielt die Denkhandlung des Strukturierens in dieser Episode in mehrfacher Hinsicht eine Rolle. Die Schüler nutzen die durch die Bündelung auf den Boxen erzeugte Struktur für eine operative Verkürzung, wenn sie die Bohnenanzahl nicht mehr durch Abzählen ermitteln, sondern durch Multiplikation der Anzahl der Bohnen auf den Boxen mit der Anzahl der Boxen berechnen. Außerdem erfordert die Entwicklung bzw. das Verständnis des Lösungsverfahrens die Erfassung der Struktur der Boxensituation. Während Nils das Verfahren entwickelt hat und damit die erforderliche Strukturierung vorgenommen haben muss, fällt sie Nathan und Niko offenbar noch schwer: wie in 6.1 dargestellt scheint beiden lange Zeit nicht klar zu sein, welche Additionen/Subraktionen wann und warum durchgeführt werden müssen. Schließlich müsste das Wahrnehmen der Struktur der gefundenen Ergebnisse noch einen Einfluss auf die Ermittlung weiterer Lösungen haben. Dies wird in der Episode allerdings gar nicht thematisiert, man beobachtet lediglich, dass die Schüler „ab vier" nur noch gerade Zahlen für die Belegung der schwarzen Boxen probieren.

Abschließend soll festgehalten werden, dass die Schüler das Lösungsverfahren so konstruieren, dass es den Bedingungen der Aufgabenstellung Genüge tut. Damit tritt die Denkhandlung des Konstruierens hier in ihrer

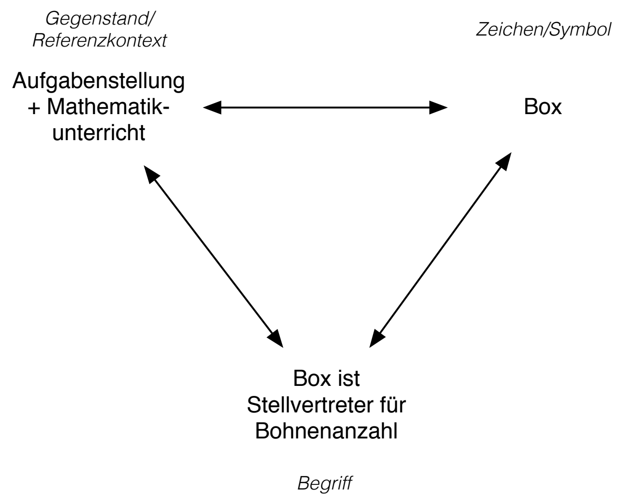
Algebra-spezifischen Ausprägung auf.

Bei der Erörterung der Variablenrollen wurde darauf geachtet, durch eine entsprechende Wortwahl die Kontextgebundenheit der Lösungssuche zu berücksichtigen. Es lässt sich jedoch auch beobachten, dass in dieser Episode die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen als gesuchte Unbekannte und Platzhalter angestoßen wird. Im Folgenden wird anhand von epistemologischen Dreiecken (s. S. 34) der Wandel der Referenzkontexte für das konkrete Material in dieser Episode abgebildet, welcher in einer metaphorischen Betrachtung der Boxensituation mündet und so erste Schritte in Richtung einer abstrakten Vorstellung von Variablen ermöglicht.

(1)

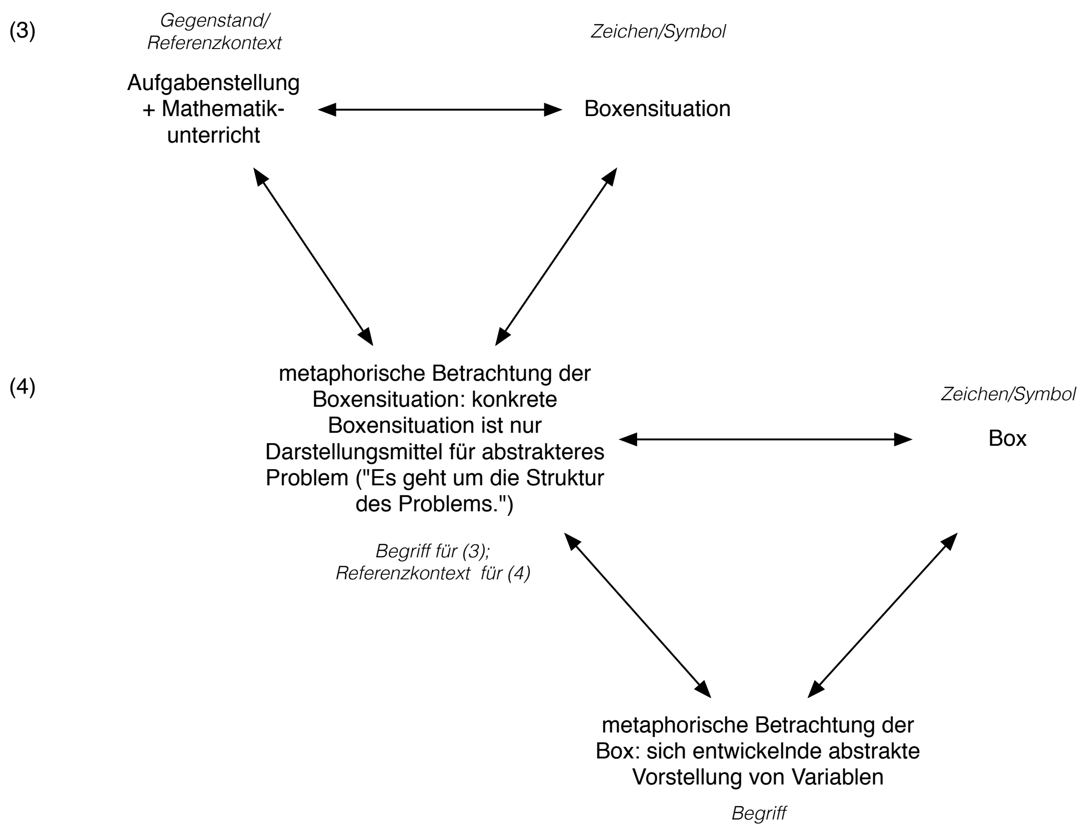


(2)



Während die Schüler zu Beginn die schwarzen Boxen noch mit Bohnen *bele-*

gen, behandeln sie die Boxen fast im wörtlichen Sinne der Aufgabenstellung, die verlangt, die Boxen mit Bohnen zu *befüllen*. Damit könnten die Boxen für die Schüler hier zunächst schlicht das sein, was sie sind: materielle Behälter, deren Befüllung mit Bohnen gesucht ist (s. erstes epistemologisches Dreieck). Da aber die ermittelte Befüllung der weißen Boxen auch zu Beginn schon nicht mehr durch Bohnen konkretisiert wird, lässt sich vermuten, dass die Perspektive des Mathematikunterrichts „Es geht um Zahlen." in dieser Episode von Beginn an präsent ist, und die Boxen vor diesem Referenzkontext für die Schüler Stellvertreter für die Bohnenanzahlen darstellen (s. zweites epistemologisches Dreieck).



Vor dem Referenzkontext „Aufgabenstellung und Mathematikunterricht" wird auch deutlich, dass die konkrete Boxensituation nur Darstellungsmittel für ein abstrakteres Problem ist, die Schüler kehren die Struktur der Boxensituation hervor (s. drittes epistemologisches Dreieck). Diese metaphorische

Betrachtung der Boxensituation dient dann schließlich als Referenzkontext für eine neue Deutung der Boxen, wenn die Schüler sich vom konkreten Auslegen der Bohnen lösen und rein antizipierend arbeiten (Szene 4/5). Die Boxen werden zu Metaphern für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen als gesuchte Unbekannte und Platzhalter (s. viertes epistemologische Dreieck; vgl. auch Berlin et al. (2009, S. 291)).

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Schüler das Material in großem Umfang als Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe nutzen, ihnen aber auch schnell klar wird, dass es letztlich nicht um die konkreten Boxen und Bohnen geht, sondern um die durch sie dargestellte Struktur. Mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks wurde erörtert, dass die Schüler durch diese Erkenntnis schließlich zu einer metaphorischen Betrachtung der Boxen(-Situation) gelangen und so erste Schritte in Richtung einer abstrakten Vorstellung von Variablen als Platzhalter und Unbekannte machen.

6.3 Besondere Betrachtung der Gesten

Im Folgenden sollen die theoretischen Beschreibungsmittel zur Gestik aus Kap. 2.3 an diesem Fallbeispiel erprobt werden. Es wird sich zeigen, inwiefern sie eine weitere Ausschärfung der Analyse ermöglichen oder nur prägnantere Beschreibungen zulassen – was weiteren Analysen aber natürlich auch dienlich wäre.

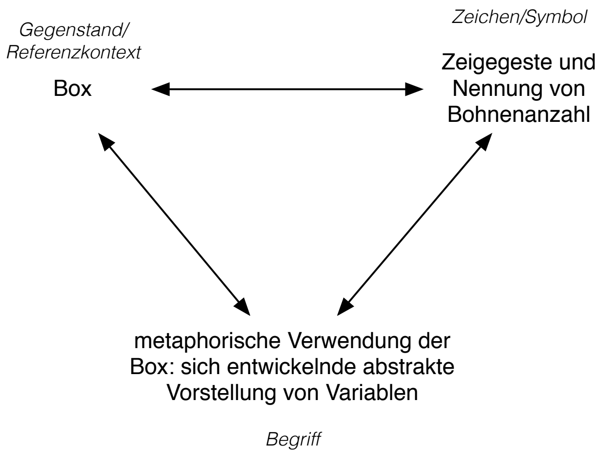
Die bisherige Analyse des ersten Fallbeispiels hat bereits sehr deutlich gemacht, dass das Zeigen auf Bohnen und Boxen für die Schüler im Lösungsprozess sehr wichtig war. In der Phase des Lösungsprozesses, in der die Schüler noch konkret mit den Bohnen gearbeitet haben, unterstützten sie durch Zeigegesten das Zählen von Bohnen und ihre Rechnungen. Hierbei dienten als Referenzkontext der Zeigegesten insbesondere die Bohnen. Später verzichteten die Schüler auf das konkrete Operieren mit den Bohnen und stellten sie sich nur noch vor. Die Zeigegesten produzierten sie allerdings nach wie vor (vgl. S. 109 f.). Als Referenzkontext der Zeigegesten blieben die Boxen (und später auch die Stellen, an welchen vorher die einzelnen

Bohnen lagen). Hier ist nun diskutabel, wie diese Gesten einzuordnen sind. Fasst man sie als „normale“ Zeigegesten auf, so meinen die Schüler mit ihrem Zeigen die Boxen selbst und man könnte die Zeigegesten im Sinne von „hier [in diese Box] sollen so und so viele Bohnen hinein“ deuten. Man könnte sie auch als eine besondere Form einer abstrakten Zeigegeste auffassen: die Schüler zeigen auf die Boxen, sind gedanklich und sprachlich aber bei den den Boxen zugedachten Bohnen. Bei einer abstrakten Zeigegeste nach McNeill wird einem Ort im Raum durch Deuten eine nicht-räumliche Bedeutung zugeordnet (vgl. McNeill (2005, S. 40); hier s. S. 49), so dass später auf diesen Ort gezeigt werden kann, wenn auf das gedankliche Objekt verwiesen wird. Dies ist hier so nicht gegeben, da die Schüler auf die Boxen zeigen und nicht in den leeren Raum. Allerdings ist dieses Zeigen in der hier betrachteten zweiten Deutung abstrakter als eine „normale“ Zeigegeste. Es wird zwar nicht in den leeren Raum gezeigt, aber es wird durchaus einem gedachten Objekt ein Ort zugewiesen – es wird nicht auf das Objekt gezeigt, von dem gesprochen wird. Ich werde die zweite Deutungsvariante verfolgen, da die Boxen als Gedankenstütze zum Lösen der Aufgabe fungieren, darüber hinaus aber nicht mehr verwendet werden, die gefundenen Lösungen werden z. B. nicht mehr konkret hergestellt. Vor diesem Hintergrund ist es plausibler, dass die Gesten in ihrer ursprünglichen Bedeutung einfach weiterverwendet werden, nur keine konkreten Bohnen mehr auf den Boxen liegen. Bei der ersten Deutung wäre zwar die Gestenart dieselbe, die Bedeutung der Geste würde sich jedoch wandeln. Um dem Unterschied zu McNeills abstrakter Zeigegeste Rechnung zu tragen, spreche ich im Folgenden bei diesen Gesten von **am Material verankerte**n **abstrakte**n **Zeigegesten**.

Die Wahl der Bezeichnung „am Material verankerte abstrakte Zeigegesten“ erscheint in zweifacher Hinsicht passend: einerseits, da die üblicherweise in den leeren Raum deutenden abstrakten Zeigegesten als Referenz die Boxen haben, also an ihnen verankert werden, und sich andererseits hier auch beobachten lässt, wie sich mit dem sich entwickelnden Variablenbegriff ein material anchor (s. S. 42) mitentwickelt. Die Schüler lösen sich von der Arbeit mit den Bohnen, kehren die Struktur des Problems hervor, beziehen die Boxen aber weiterhin gestisch mit ein – als Gedankenstütze. Wie Hutchins

(2005, S. 1562; hier s. S. 42) schreibt, kommt es auf die Verwendung des Objektes an: die Box ist kein material anchor per se, sondern weil die Schüler sie als Referenz für ihre abstrakten Zeigegesten verwenden. Beim Verschwinden der Gestik tritt somit eine weitere Ablösung vom Konkreten auf (<57> und <59>, s. S. 110). Die Boxen liegen zwar noch auf dem Tisch, die Schüler nehmen aber nicht mehr explizit darauf Bezug, es ist jedoch plausibel, dass ihnen die Darstellung der mathematischen Struktur als Boxensituation so vertraut geworden ist, dass sie weiterhin in Boxen denken, und der Anker damit gesetzt bleibt.

In der Analyse wurde bereits herausgearbeitet, dass die Boxen bei der Loslösung von den Bohnen zu Metaphern für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen als Platzhalter und gesuchte Unbekannte wurden (s. S. 119), und wie sich diese Entwicklung epistemologisch nachzeichnen lässt. Die genauere Betrachtung der Gestik ermöglicht es nun, herauszuarbeiten, wie sich diese Entwicklung in den Schülerbeiträgen manifestiert. Dazu betrachten wir in einem epistemologischen Dreieck die Zeigegeste mit der Nennung der Bohnenanzahl als Zeichen und die Box, auf welche gezeigt wird (und die als Metapher fungiert), als Referenzkontext.



Durch die gestischen Verweise können die Boxen als Metaphern verwendet werden. Hier wird die Geste also zum Bindeglied zwischen der epistemologischen und kommunikativen Dimension des Konstruktionsprozesses der

Variablen (vgl. Steinbring (1999, S. 515); hier S. 33), und damit ist auch sie selbst in diesem Prozess als metaphorisch anzusehen. Dadurch, dass sie nämlich nicht auf das Bezeichnete (die Bohnenanzahl) verweist, sondern auf die Box, die bildlich verwendet wird für die sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen, kann sie selbst auch nur in einem übertragenen Sinne verstanden werden. Dies steht im Einklang mit McNeills Feststellung, dass abstrakte Zeigegesten – und um eine Sonderform einer solchen handelt es sich hier – eine Form von metaphorischen Gesten sind (McNeill 2005, S. 40; hier s. S. 49). Die Denkfigur der Metapher ist hier also entscheidend. Sie bestimmt die epistemologische und kommunikative Dimension des beobachteten Konstruktionsprozesses.

Es wurde die Studie von Edwards zitiert (s. S. 53), die gezeigt hat, dass beim Sprechen über Mathematik metaphorische Gesten stärker vertreten sind als bei Nacherzählungen (im Gegensatz zu ikonischen Gesten). Dies trifft hier zwar auch zu, da es keine einzige ikonische Geste in dieser Episode gibt und schon gezeigt wurde, dass es eine Häufung von (metaphorischen) am Material verankerten abstrakten Zeigegesten gibt, allerdings findet sich auch nur eine klassisch metaphorische Geste – nämlich bei Nils in Beitrag <24>: „Ok, wieviel sind das *(macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung)* …“. Nils erzeugt durch seine Geste auf einer ikonischen Ebene das Bild eines Kreises. Der Kreis steht allerdings metaphorisch für eine Menge: die Menge der Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen, deren Anzahl zu bestimmen ist.

Neben dieser einen klassisch metaphorischen Geste und der Häufung der ebenfalls metaphorischen am Material verankerten abstrakten Zeigegesten findet man unter den abstrakten Zeigegesten darüber hinaus auch noch Gesten, deren Funktion dem Sprachbild der Metonymie (s. S. 21) entsprechen (s. Fettdruck in den folgenden beiden Beiträgen):

Nils, <44>
Achtundzw, sind 30. 30 minus vier sind 26 *(deutet mit der Hand zuerst auf die Stelle, an der bis soeben die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen lagen,* ***dann auf die weißen Boxen selbst)***, passt auch nicht. Mit sechs,

Nils, <24>
Ok, wieviel sind das *(macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung)*, zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, 14 *(zeigt entlang der schwarzen Boxen; legt eine Bohne, die offenbar auf die Nachbarbox gekullert ist, wieder zurück, so dass auf allen schwarzen Boxen je zwei Bohnen liegen)*, 16 *(zeigt auf die Anordnung mit den schwarzen Boxen)* minus vier *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)* 12, dann muss hier drei ***(zeigt auf eine weiße Box)***. Zwei, drei.

Bei der Rekonstruktion des Lösungsprozesses wurde festgestellt, dass die markierte am Material verankerte abstrakte Zeigegeste in <44> nicht als Referenz zu den Boxen selbst angesehen werden sollte, sondern als Referenz zum Aufteilen der verbliebenen Bohnen auf die weißen Boxen (s. S. 100). Das Zeigen hat keine Ähnlichkeitsbeziehung zum Aufteilen (welche auf sprachlicher Ebene eine Metapher anzeigen würde), sondern eine Beziehung der realen sachlichen Zusammengehörigkeit, da die Bohnen auf die Boxen aufgeteilt werden sollen. Ein Sprachbild, das diese Beziehungsform nutzt, ist die Metonymie. Daher soll hier von einer **metonymische**n **am Material verankerte**n **abstrakte**n **Zeigegeste** gesprochen werden. In der theoretischen Erörterung zur Gestik wurde Roth (2001, S. 376) zitiert (s. S. 54): „... gestures, which are initially similar to action sequences, substantially shorten and represent actions in metonymic form“. Die hier beobachtete metonymische Geste könnte ebenfalls als eine solche metonymische Verkürzung einer Handlung angesehen werden, nämlich des Verteilens der Bohnen auf die Boxen.

Während die Geste in <44> den eigentlichen Versuch begleitet, die verbliebenen Bohnen auf die Boxen aufzuteilen, betrachten wir in <24> nun diejenige Geste, die bei der Nennung der ermittelten Bohnenzahl pro Box produziert wird. Die Geste wurde bei der Rekonstruktion des Lösungprozesses als Erklärung des „hier“ bei der Nennung der ermittelten Bohnenanzahl pro Box gedeutet. Betrachtet man dies genauer, so müsste Nils eigentlich sagen „hier, hier, hier und hier *(zeigt nacheinander auf die vier weißen Boxen)* müssen jeweils drei Bohnen hinein“, da nicht nur in die Box, auf die er verweist, drei Bohnen gelegt werden müssen. Die eine Box, auf die Nils zeigt, steht für alle weißen Boxen (pars pro toto). Auch diese Geste lässt sich als metonymische Verkürzung in Roths Sinne deuten.

Eine weitere Geste, die die Nennung der ermittelten Bohnenzahl pro Box unterstützt, findet sich in <53>:

> **Nils, <53>**
> Ja, zehn, zehn *(zeigt entlang der weißen Boxen)*.

Nils benennt die ermittelte Bohnenanzahl zweimal, zeigt aber entlang aller vier Boxen. Diese Geste kann man als einfache Zeigegeste einstufen (i. S. von „in diese Boxen kommen jeweils zehn Bohnen"), man kann sie jedoch auch wieder im Rothschen Sinne als metonymische Verkürzung des Befüllens/Belegens der Boxen mit Bohnen ansehen.

In der theoretischen Erörterung der Gestik wurde die Unterscheidung von gesture-speech-matches und -mismatches als eine weitere Charakterisierung der Auftretensformen von Gestik vorgestellt (s. S. 50). In Beitrag <37> ist ein mismatch zu finden:

> **Nils, <37>**
> [Wieso mit minus?] Das sind 23 *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)* minus vier *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)*

Man beobachtet eine Zeigegeste auf die zwei einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen. Diese Geste begleitet allerdings die Nennung der Zahl 23. Folglich hält die Geste eine Information bereit, die die verbale Äußerung nicht beinhaltet: hier sind noch zwei Bohnen, die die Gesamtzahl an Bohnen auf 23 anwachsen lassen.

Betrachtet man noch einmal alle Gesten dieser Episode im Hinblick auf mismatches, so findet man keinen weiteren so klaren Fall. Allerdings kann man sich die Frage stellen, ob nicht alle (abstrakten) Zeigegesten Fälle von mismatches sind. Die Schüler sprechen nämlich stets auf einer Zahlenebene, es ist nicht von Bohnen und/oder Boxen die Rede, sie zeigen jedoch ständig darauf. Die Gesten halten also Informationen bereit, die über die

Sprache hinausgehen. Zu Beginn von Kap. 6.2 wurde dies ja auch bereits in Bezug auf Beitrag <24> festgestellt. Die hier zu beobachtende Häufung von mismatches würde zu Goldin-Meadows Auffassung passen, dass Gesten das Eingangstor zu neuen Inhalten darstellen, indem sie Lernenden Ausdrucksmöglichkeiten für Sachverhalte bieten, die sprachlich noch nicht dargestellt werden können (Goldin-Meadow 2005, S.57; hier s. S. 51).

Die Ausführungen zeigen, dass der Exkurs in die Theorie der Gestik nun durchaus neue Einblicke in die Sachlage ermöglicht.

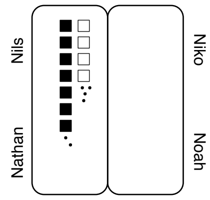
6.4 Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander

In der betrachteten Episode finden sich immer wieder Stellen, an welchen die Schüler offenbar unterschiedliche Vorstellungen über das aktuelle Geschehen bzw. die Ausführung des Lösungsverfahrens – in der Sprache der interpretativen Unterrichtsforschung also verschiedene Situationsdefinitionen (s. S. 68) – haben. Dies scheinen Momente zu sein, in welchen die Interaktion eine besondere Rolle spielt. Es soll diskutiert werden, inwiefern die Konfrontation der Situationsdefinitionen den kollektiven Lösungsprozess vorantreibt, und inwiefern sie das Verständnis des Lösungsprozesses einzelner Schüler fördert.

In 6.2 wurde bereits Nathans Beitrag <2> im Hinblick auf die Anforderungen eines flexiblen Wechsels zwischen verschiedenen Variablenvorstellungen diskutiert (s. S. 114, zugehöriges Transkript s. S. 87). Daran anknüpfend soll diese Stelle hier nun unter dem Gesichtspunkt der variierenden Situationsdefinitionen von Nils und Nathan analysiert werden. Dazu wird sie zunächst noch einmal wiedergegeben:

1	Nils	Lass' mal versuchen mit jeweils einem oben drauf *(# beginnt, auf jede schwarze Box eine Bohne zu legen).*
2	Nathan	# *beginnt, auf jede weiße Box eine Bohne zu legen*

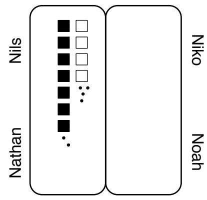
3	Nils	Nee, da nicht, da nicht, da nicht *(# nimmt die Bohnen, die Nathan auf die weißen Boxen gelegt hat, wieder herunter und legt dann weiter Bohnen auf die schwarzen Boxen).*
4	Nathan	*# nimmt ebenfalls eine Bohne von einer weißen Box und legt sie stattdessen auf eine noch nicht besetzte schwarze*



Wie oben schon erörtert, möchte Nils in <1> ausdrücken, dass alle schwarzen Boxen mit je einer Bohne belegt werden sollen, Nathan bezieht seine Äußerung jedoch auf alle Boxen. Hierin zeigen sich die unterschiedlichen Situationsdefinitionen der Schüler hinsichtlich des gerade begonnenen Lösungsprozesses. Nils möchte die aktuelle Boxensituation in der gleichen Weise bearbeiten wie die in der Aufgabe vorgegebene Situation: die Anzahl der Bohnen pro Box der Farbe mit weniger einzelnen Bohnen festlegen und ermitteln, ob es eine passende Befüllung für die Boxen der anderen Farbe gibt. Allerdings nutzt er wieder die Bohnen, um den Lösungsansatz zu konkretisieren. Davon hatten sie sich bei der Vervollständigung der Lösungen zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation schon gelöst. Nathans Vorstoß deutet hingegen ein rein probierendes Vorgehen an – auch unter Zuhilfenahme der Bohnen. Ob er sich nicht mehr an ihr vorheriges Vorgehen erinnert, oder schlicht Nils' Beitrag <1> wörtlich nimmt und befolgt, ist auch aus dem weiteren Verlauf nicht zu erkennen. In <3> versucht Nils jedenfalls seine Sicht der Dinge, seinen Plan, sowohl auf verbaler Ebene als auch auf der Handlungsebene klar zu machen, und Nathan fügt sich dem in <4>. Die kollektive Arbeitsweise wird aufrecht erhalten, der Prozess gewinnt durch Nathans ‚andere' Herangehensweise jedoch nicht. Auch ob Nathan selbst aus dieser Konfrontation mit Nils' Situationsdefinition klüger hervorgeht, lässt sich hier noch nicht sagen.

Nimmt man jedoch die folgende Stelle hinzu, so kann man durchaus annehmen, dass Nathan von der Auseinandersetzung mit Nils' Vorgehen in den eben zitierten Beiträgen sowie bei der anschließenden Ermittlung der ersten Lösung profitiert – auch wenn sich im letzteren Fall in der Interaktion keine Konfrontation der Situationsdefinitionen der beiden zeigt (s. Szene 3, S. 92 f.). Nathan überführt an der folgenden Stelle Nils' Vorgehen nämlich in die antizipierende Variante, die sie bereits bei der Vervollständigung der Lösungen zu der vorgegebenen Boxensituation genutzt hatten. Dies setzt die Aufnahme der Idee voraus.

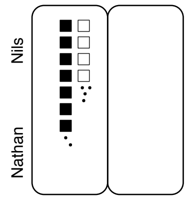
30	Nils	Jetzt versuchen wir das mal mit dre *(beginnt je eine dritte Bohne auf die schwarzen Boxen zu legen)*
32	Nathan	Mit dre. Ok, dre, drei, sechs, neun, zwölf, 15 #, 18, 21 *(zeigt nacheinander auf die schwarzen Boxen)* minus zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)* sind
33	Nils	# *hat nun auf vier schwarze Boxen Bohnen gelegt. Er bricht das Auffüllen der Bohnen ab und schaut Nathan beim Zählen zu.*



Auch wenn Nathan – wie bereits diskutiert wurde (s. S. 96) – die Durchführung des Verfahrens nicht komplett gelingt, konfrontiert er Nils, der in <30> beginnt, wie bei den ersten beiden Lösungsversuchen zu dieser Boxensituation die für die schwarzen Boxen festgelegte Anzahl an Bohnen durch Auflegen der Bohnen auf die Boxen zu konkretisieren, hier mit der die Bohnen antizipierenden Variante dessen Vorgehens. Profiteur dieser Stelle ist zunächst Nils, da dieser daraufhin aufhört, Bohnen zu verteilen, und im Folgenden das antizipierende Vorgehen aufgreift und sogar die Bohnen einsammelt (s. Szene 5, S. 97 ff.). Da die Schüler im Anschluss an diese Beiträge bei der antizipierenden Version bleiben, ist als Konsequenz der beobachteten Konfrontation der Situationsdefinitionen auch für den kollektiven Lösungsprozess die Wiederholung des Ablösungsschrittes vom konkreten Auslegen der Bohnen festzustellen. Dies liegt vermutlich an Nils' dominierender Rolle für den kollektiven Lösungsprozess. Darauf soll an späterer Stelle noch näher eingegangen werden.

Eine in gewisser Weise ähnliche Stelle findet sich in <43> und <44>. Hier ist es nun Nils, der den Ablöseprozess vorantreibt:

43	Niko	Zwölf, # 16 *(zeigt zweimal auf die schwarzen Boxen)*
44	Nils	# Achtundzw, sind 30. 30 minus vier sind 26 *(deutet mit der Hand zuerst auf die Stelle, an der bis soeben die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen lagen, dann auf die weißen Boxen selbst)*, passt auch nicht. Mit sechs,



Nils unterbricht Niko in seinem Lösungsansatz und konfrontiert ihn mit der Nennung der aktuell anzunehmenden Gesamt-Bohnenanzahl auf den schwarzen Boxen, die er vermutlich durch Multiplikation ermittelt hat – wie in der Rekonstruktion des Lösungsprozesses erörtert wurde (s. S. 100). Die Stelle ähnelt der vorherigen insofern, als dass ebenfalls ein begonnener Lösungsprozess durch einen anderen Schüler abgekürzt wird. Die Stellen unterscheiden sich jedoch in der Aufnahme der neuen Strategie durch den unterbrochenen Schüler. Oben hat Nils Nathans antizipierendes Vorgehen sofort aufgegriffen, so dass deutlich wurde, dass bzw. wie er die Konfrontation mit der Situationsdefinition von Nathan verarbeitet hat. Niko lässt sich hier jedoch einfach unterbrechen, ohne bei der nächsten multiplikativen Ermittlung wieder einzusteigen. Anhand der Äußerungen lässt sich nicht beurteilen, inwieweit Niko Nils' Vorgehen Sinn verleihen kann. Der kollektive Lösungsprozess, der hier wiederum von Nils getragen wird, macht aber einen weiteren Entwicklungsschritt, indem die Gesamtzahl der Bohnen auf den schwarzen Boxen fortan nur noch durch Multiplikation ermittelt wird. Der Entwicklungsschritt ist jedoch Nils' Beitrag und nicht der Konfrontation der Situationsdefinitionen von Nils und Niko zuzuschreiben. Nathan greift diese neue Art der Bestimmung der Gesamt-Bohnenanzahl in/auf den schwarzen Boxen in <57> (S. 102) auf.

In <26> (s. S. 93) beobachtet man Nikos Reaktion auf die Konfrontation mit den Situationsdefinitionen von Nils und Nathan bezüglich des Umgangs mit einer gefundenen Lösung:

> **Niko, <26>**
> *nimmt Bohnen aus dem Vorrat. Er schaut dann zu Nils und Nathan, die sich ihren Blättern zuwenden, um die Lösung aufzuschreiben, und legt die Bohnen wieder weg.*

Wie in der Rekonstruktion des Lösungsprozesses erörtert, möchte Niko die vorab ermittelte Befüllung bzw. Belegung der Boxen vermutlich tatsächlich herstellen. Er wird jedoch damit konfrontiert, dass Nils und Nathan sich gar nicht mehr um das konkrete Material kümmern, sondern sich ihren Heften zuwenden. Dass er die Bohnen daraufhin wieder weglegt und in <31> (s.

S. 94) ebenfalls etwas in seine Tabelle schreibt, deutet darauf hin, dass diese Konfrontation – die für die anderen völlig unbemerkt verläuft – für Niko zur Klärung des Vorgehens beiträgt und ihn bei der Ablösung vom Konkreten unterstützt. Da sie ab der Ermittlung der zweiten Lösung zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation bereits auch so vorgegangen waren, kommt ihm außerdem vielleicht auch seine Erinnerung zu Hilfe.

Wie bei der Rekonstruktion des Lösungsprozesses erörtert wurde, haben Niko und Nathan Schwierigkeiten, die ‚richtigen' Additionen/Subtraktionen an der ‚richtigen' Stelle im Verfahren auszuführen (s. S. 96 f., 101). Es ist interessant zu sehen, wie sich Nils' Reaktionen auf diese Schwierigkeiten insbesondere auf Nikos Agieren auswirken:

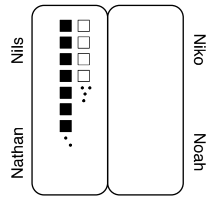
Ausschnitt aus den Szenen 4 und 5 (s. S. 95 ff.)

32	Nathan	Mit dre. Ok, dre, drei, sechs, neun, zwölf, 15 ##, 18, ### 21 *(zeigt nacheinander auf die schwarzen Boxen)* minus zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)* sind
33	Nils	## *hat nun auf vier schwarze Boxen Bohnen gelegt. Er bricht das Auffüllen der Bohnen ab und schaut Nathan beim Zählen zu.*
34	Niko	### 21.
35	Niko	Sind 17 *(zeigt auf die Anordnung mit den weißen Boxen).*
36	Nathan	Sieb-, 16
37	Nils	[Wieso mit minus?] Das sind 23 *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)* minus vier *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)*
38	Niko	Sind 19.

Ausschnitt aus Szene 6 (s. S. 99)

45	Nathan	Sechs,
46	Nils	Mal sieben *(zeigt entlang der schwarzen Boxen)* sind 42 *(setzt die Finger der rechten Hand zusammengelegt an der Stelle auf, an der vorher die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen lagen)*
47	Nathan	Minus sechs

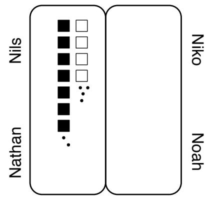
48	Nils	Nee, wieso minus sechs?
49	Niko	*(energisch)* Minus vier!
50	Nathan	Ach, minus # vier
51	Nils	# 42 plus zwei *(setzt die Finger der rechten Hand erneut zusammengelegt an der Stelle auf, an der vorher die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen lagen)* erstmal *(hält inne)*
52	Niko	Sind 44, # minus vier sind 40, sind
53	Nils	# Ja, zehn, zehn *(zeigt entlang der weißen Boxen).*
54	Niko	Ja, ja, zehn.
55	Nils	Sechs und zehn *(Nils, Niko und Nathan schreiben das Ergebnis auf)*



Die Interaktion mit Nils scheint es Niko zu ermöglichen, ‚seinen' Schritt ‚minus 4', den er wiederholt in den Beiträgen <35>, <38> und <49> anbringt bzw. ausführt, in <52> schließlich an die ‚richtige' Stelle des Verfahrens zu schieben. Niko tritt in allen diesen Beiträgen nach der Terminologie von Krummheuer und Brandt (2001) (s. S. 71) also zwar als Kreator auf, ist im Hinblick auf die korrekte Durchführung des Verfahrens aber auf Nils' Hilfe angewiesen. In <37> führt Nils erst die fehlende Addition durch und gibt dann Nikos Subtraktion vor (Kreator), die dieser dann nur noch ausführen muss (<38>, Kreator). In <51> expliziert er, dass erstmal plus zwei gerechnet werden muss (Kreator). Daraufhin führt Niko diese Addition aus und kann nun selbständig ‚seine' Subtraktion anfügen (Kreator). Es wird deutlich, dass Niko hier nur lokal (re)agiert – wenn auch als Kreator, ohne wirklich neue innovative Ideen. Man könnte ihn vielleicht als **assistierenden Kreator** bezeichnen, da er sich lediglich um die Durchführung eines einzelnen Verfahrensschrittes bemüht, eine Teilrechnung übernehmen will.

In <43> beginnt Niko einen neuen Lösungsversuch, strebt also scheinbar die selbständige Durchführung des Verfahrens an:

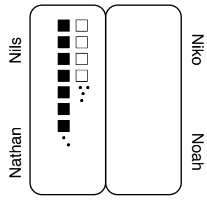
43	Niko	Zwölf, # 16 *(zeigt zweimal auf die schwarzen Boxen)*
44	Nils	# Achtundzw, sind 30. 30 minus vier sind 26 *(deutet mit der Hand zuerst auf die Stelle, an der bis soeben die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen lagen, dann auf die weißen Boxen selbst)*, passt auch nicht. Mit sechs,



Da er jedoch sofort von Nils unterbrochen wird, ist nicht klar, ob er das Verfahren überhaupt vollständig durchführen könnte (sein Agieren in den Folgebeiträgen (s. o.) lässt dazu Zweifel aufkommen, wenn sie es auch nicht ganz ausschließen). Außerdem versucht er sich auch nur an der Anwendung der gerade aktuellen Version des Verfahrens, was einerseits sicherlich ein weiterreichender Interaktionsbeitrag wäre als die bloße Berechnung eines Wertes oder Durchführung eines einzelnen Verfahrensschrittes, andererseits aber natürlich auf der numerischen Ebene verbleibt und sich nicht mit substanziellen Beiträgen zur Entwicklung des Verfahrens messen kann. In <72> antwortet Niko auf Nathans Frage „Wie sollen wir das denn gleich erklären …“ (<71>): „Einfach vorrechnen, würde ich sagen“. Dies bestärkt noch einmal den Eindruck, dass Nikos Fokus auf den konkreten Rechnungen liegt, das Lösungsverfahren an sich kein Objekt seiner Gedanken ist. Offen bleibt, inwieweit er zum Schluss zur selbständigen Anwendung des Verfahrens in der Lage wäre.

Betrachtet man die eben wiedergegebenen Ausschnitte der Epidode im Zusammenhang mit den Beiträgen <57> und <59> (s. u.), lässt sich außerdem vermuten, dass nicht nur Niko von der Interaktion mit Nils profitiert, sondern andersherum Nils' Erkenntnisgewinn und damit der kollektive Lösungsprozess auch von den Schwierigkeiten von Nathan und Niko, die ‚richtigen' Additionen/Subtraktionen an der ‚richtigen' Stelle im Verfahren auszuführen, profitieren. Nils' Innehalten in <51> (s. o.) kann nämlich als Indiz dafür gewertet werden, dass er die Idee der Zusammenfassung von $+2-4$ zu -2 aufgrund der Konfrontation mit den Schwierigkeiten der Mitschüler generiert:

57	Nathan	Und mit acht? Acht mal sieben sind 56
59	Nils	Plus, nee, minus zwei einfach nur *(räumt währenddessen die Bohnen in die Schachtel zurück)*, eh, sind 54, durch vier # (.) passt nicht



An beiden oben wiedergegebenen Episodenstellen haben Nathan und Niko nach der Ermittlung der Gesamtzahl der Bohnen auf den schwarzen Boxen eine Subtraktion als nächsten Schritt vorgeschlagen bzw. ausgeführt. In

<47> (s. o.) führt Nathan eine Zusammenfassung von den zwei im Raum stehenden Subtraktionen durch: $-2-4=-6$. Da -2 kein korrekter Verfahrensschritt ist, ist die Subtraktion von sechs keine (gültige) Verkürzung des bisherigen Verfahrens und sie wird auch nicht als solche kenntlich gemacht. Da aber die Zahlen 2 und 4 im Raum standen, liegt die Auffassung der Zahl 6 als additive Zusammenfassung von 2 und 4 sehr nahe. So könnte Nils auf die Idee einer Verkürzung des Verfahrens gestoßen worden sein (Aha-Erlebnis beim Innehalten in <51>), und diese dann für die richtigen Verfahrensschritte ausgeführt haben. In diesem Sinne wäre Nils in <59> also zwar Kreator (der Verkürzung des Verfahrens), es gäbe in gewisser Weise aber trotzdem[8] einen sogenannten stillen Part bezüglich dieses Beitrags (vgl. Tabelle auf S.71), da es plausibel erscheint, dass Nils aufgrund der Beiträge von Nathan und Niko zur Subtraktion (insbesondere Nathans Beitrag <47>) auf diese Verkürzung gestoßen wurde. Nathan wäre mit <47> zwar nicht als Initiator (im Sinne von Krummheuer und Brandt (2001)) anzusehen, da er letztendlich doch nicht die Verantwortung für die Idee der Verkürzung trägt, aber man könnte ihn vielleicht als **Impulsgeber** bezeichnen (zur Abgrenzung von der anders definierten Rolle des Initiators). Nathans und Nikos fehlerhafte Versuche, die Aufgabe zu lösen, haben folglich zu einer Weiterentwicklung des Lösungsverfahrens durch Nils beigetragen, die er in Einzelarbeit womöglich nicht erreicht hätte.

Geht man noch einmal systematisch alle Beiträge von Nils in dieser Episode durch, stellt man fest, dass er fast durchgehend als Kreator auftritt. Außerdem bestätigt sich der bisher gewonnene Eindruck, dass er das kollektive Lösungsverfahren trägt: er bestimmt, wohin Bohnen gelegt werden und wohin nicht (<3>, s. S. 87), er entscheidet, ob etwas passt oder nicht (z. B. <11>, s. S. 90), meist führt er das Lösungsverfahren durch (z. B. <24> (S. 93) oder <44> (S. 99)), er bringt Nikos und Nathans Versuche daran teilzuhaben, auf Kurs (s. o.), er verkürzt das Verfahren (<59>, s. S. 102) und ist zum Schluss auch derjenige, der entscheidet, dass sie genug Lösungen gefunden haben (<70>, s. S. 104).

[8]Dem Kreator steht eigentlich kein anderer Interaktionsteilnehmer zur Seite, der Mitverantwortung für seinen Beitrag übernimmt (vgl. Tabelle auf S. 71).

Abschließend vergleichen wir Nathans und Nikos Teilhabe am Lösungsprozess. Beide Schüler sind bisher als Nebendarsteller im Lösungsprozess erschienen. Profitieren sie gleichermaßen von der Interaktion mit den anderen, ähneln sich ihre Beiträge zum kollektiven Lösungsprozess oder finden sich Unterschiede? Niko wurde oben schon als assistierender Kreator eingestuft. Betrachten wir also Nathans Beiträge noch einmal näher. Zunächst ist festzustellen, dass Nathan ungefähr doppelt so viele Beiträge zur Interaktion liefert wie Niko. Seine Beiträge haben imitierende (z. B. <32> (S. 95), <66> (S. 103)), traduzierende (<27>, S. 93) und paraphrasierende Anteile (<41>, S. 98), die z. T. eine starke Orientierung an Nils offenbaren, er tritt aber auch immer wieder als Kreator auf. Seine Kreatorbeiträge bringen neue Ideen ein (er rechnet nicht hauptsächlich, wie wir es bei Niko beobachtet hatten (s. o.)), man gewinnt aber den Eindruck, dass er mit diesen Beiträgen Testballons steigen lässt, da er seine Ideen wenig nachdrücklich verfolgt. Er hat Ideen, lässt sie aber insbesondere von Nils als brauchbar oder nicht einstufen. Dadurch tastet er sich an das Lösungsverfahren heran. Nathans substanzieller Beitrag zum Lösungsprozess ist die Ablösung von den Bohnen (<32>, S. 95). Dadurch zeigt sich, dass Nathan bei der Durchführung des Verfahrens zwar noch Schwierigkeiten hat – insbesondere mit der Verrechnung der einzelnen Bohnen neben den Boxen –, er die im Kap. 6.2 beschriebene und für die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen entscheidende metaphorische Betrachtung der Boxen aber annimmt. Sieht man noch einmal die Videosequenz zu den Beiträgen <30> – <32> an, um die genaue zeitliche Abfolge von ‚Bohnen auslegen‘ (Nils in <30>) und ‚ohne Bohnen weiterrechnen‘ (Nathan in <32>) zu erfassen, kann man vermuten, dass Nathan bei der Ablösung vom konkreten Auslegen der Bohnen dadurch unterstützt wird, dass er zunächst sieht, wie Nils auf die ersten Boxen je eine Bohne hinzuzufügt, bevor er Beitrag <32> beginnt. Auch Niko übernimmt im oben bereits erwähnten Beitrag <43> (S. 99) Nathans die Bohnen antizipierendes Vorgehen: er beginnt nämlich die Durchführung des Verfahrens, indem er auf die schwarzen Boxen zeigend additiv zählt. Insofern verändert dieser Versuch bzw. Beginn, das Verfahren durchzuführen, die Einschätzung von Niko doch (vgl. S. 131). Wir können darüber nämlich auch für ihn den Beginn einer Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen feststellen, auch wenn er noch Schwierigkeiten bei der Durchführung des Lösungsverfahrens hat und nur als assistierender Kreator auftritt. Bei ihm ist diese Entwicklung offensichtlich von außen/von der Interaktion angestoßen, da er zu Beginn ja sogar noch die gefundene Lösung durch Bohnen konkretisieren wollte.

Insgesamt gewinnt man den Eindruck, dass Nathan mutiger agiert als Niko, da er austestet, während Niko versucht sich einzufinden, beide ihre Schwierigkeiten mit dem Verfahren zur Lösung der durch die Boxen und einzelnen Bohnen repräsentierten Gleichung haben, aber auch beide Ansätze für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen als gesuchte Unbekannte und Platzhalter zeigen (vgl. Kap. 6.2, S. 119, und Berlin et al. (2009, S. 291)).

Im Hinblick auf die Ablösung vom Auslegen der Bohnen fällt in dieser Episode noch etwas ins Auge: in fast allen Lösungsversuchen nach der Ablösung vom Auslegen[9] wird die Nennung der aktuell anzunehmenden Belegungszahl jeder schwarzen Box imitiert bzw. paraphrasiert. Die fraglichen Stellen sind in den folgenden Ausschnitten durch Fettdruck hervorgehoben:

Ausschnitt aus Szene 4 (s. S. 94)

30	Nils	**Jetzt versuchen wir das mal mit dre** *(beginnt je eine dritte Bohne auf die schwarzen Boxen zu legen)*
31	Niko	# *schreibt etwas in seine Tabelle*
32	Nathan	# **Mit dre**. Ok, dre, drei, sechs, neun, zwölf, 15, 18, 21 *(zeigt nacheinander auf die schwarzen Boxen)* minus zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)* sind

Ausschnitt aus Szene 5 (s. S. 97)

39	Nils	Nee, passt nichts, # passt nichts. **Aber mit vier würd, passt wieder** *(fängt an die Bohnen von den schwarzen Boxen einzusammeln)*. **Müsste,** nee, **mit vier**, warte mal
40	Nathan	# Passt nicht.
41	Nathan	**Doch mit vier könnte das aber passen.**

[9]abgesehen von Szene 7, S. 102

42	Nils	**Ja, mit vier passt das vielleicht, vielleicht.** *(hat nun alle Bohnen von den schwarzen Boxen eingesammelt, und nimmt nun auch noch die einzelnen Bohnen aus den beiden Anordnungen weg)* Vier ist

Ausschnitt aus Szene 6 (s. S. 99)

44	Nils	Achtundzw, sind 30. 30 minus vier sind 26 *(deutet mit der Hand zuerst auf die Stelle, an der bis soeben die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen lagen, dann auf die weißen Boxen selbst)*, passt auch nicht. **Mit sechs**,
45	Nathan	**Sechs**,

Ausschnitt aus Szene 8 (s. S. 103)

61	Nathan	**Mit zehn**,
62	Nils	Eh, **mit zehn**,
63	Nathan	Mit zehn müsste passen

Da dieses Phänomen vor der Ablösung vom konkreten Auslegen der Bohnen nicht zu beobachten ist, deutet sein Auftreten nach der Ablösung darauf hin, dass es eine Bedeutung für den bzw. im Ablösungsprozess hat. Eine Hypothese ist, dass darüber ein sprachliches Festhalten der anzunehmenden Belegung erfolgt, das vorher durch das Auslegen der Bohnen realisiert wurde. Demnach würde hier also die Repräsentation auf konkret-gegenständlicher Ebene durch eine prozesshafte sprachliche Darstellung abgelöst. Die Plausibilität der Hypothese wird dadurch unterstützt, dass man nach der Ermittlung von Lösungen auch solche Formen von Wiederholungen beobachtet, und das von Anfang an (z. B. <24> – <28>, <53> – <55>). Dies ist auch schlüssig, da die Schüler ja von Anfang an die gefundenen Lösungen nicht konkretisieren, sie aber bis zur schriftlichen Fixierung irgendwie festhalten müssen.

Die betrachtete Episode ist sehr dicht. Man stellt eine Häufung von Kreatorbeiträgen fest. Allerdings tritt die Sprecherrolle ‚Kreator' den innovativen Gehalt einer Äußerung betreffend in sehr verschiedenen Ausformungen auf. Aufgrund der Beobachtungen scheint die folgende Ausdifferenzierung sinnvoll: **innovativer Kreator** (bringt eine neue substanzielle Idee ein), **ausführender Kreator** (wendet ein bereits erarbeitetes Verfahren an), **assistierender Kreator** (führt eine Rechnung oder einen einzelnen Teilschritt eines Verfahrens aus). Die Berechnung eines bestimmten Wertes beispielsweise liefert nämlich zwar auch im hier betrachteten Zusammenhang etwas Neues für den Lösungsprozess (deshalb sollte solchen Beiträgen der Kreator-Status nicht aberkannt werden), hat in gewisser Weise aber nur den Stellenwert einer Nebenrechnung und lässt dem jeweiligen Sprecher in dieser Situation dementsprechend eine andere Rolle zukommen, als es in einem Kontext der Fall wäre, in dem es z. B. maßgeblich um das Üben solcher Berechnungen geht, und die Ausführung einer solchen Rechnung ein substanzieller Beitrag wäre. Auch bei Nils, der – wie bereits erörtert wurde – den Lösungsprozess trägt, fast durchgehend als Kreator auftritt und insbesondere mit der Verkürzung des Verfahrens ihren Lösungsprozess substanziell bereichert, finden sich viele Beiträge, in denen er ‚nur' das zum gegebenen Zeitpunkt etablierte Verfahren anwendet, und in welchen er daher eher als ausführender Kreator und weniger als innovativer Kreator einzustufen ist.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Interaktion durch die Konfrontation unterschiedlicher Situationsdefinitionen den kollektiven Lösungsprozess und das Verständnis des Lösungsprozesses der einzelnen Schüler voranbringt. Alle drei an der Interaktion beteiligten Schüler profitieren, jedoch auf verschiedenen Ebenen. Während die Interaktion mit Nils für Nathan und Niko insbesondere zur Klärung des Verfahrens beiträgt, nutzt Nils die Interaktion mit den anderen zur Weiterentwicklung des Verfahrens. Das Lösungsverfahren, das man in gewisser Weise als Ergebnis der Episode ansehen kann, ist der Bedeutungsaushandlung zwischen den Schülern geschuldet. Allerdings ist es wohl unsicher, inwieweit alle das komplette Lösungsverfahren verstanden haben, inwieweit es also als geteilt geltendes Wissen angesehen werden kann. Denn auch wenn alle als Kreatoren an der Bedeutungsaushandlung beteiligt waren, so bestehen doch Unterschiede im Grad der Durchdringung, und es ist daher fraglich, inwieweit Niko und Nathan das Gesamte überschauten. Dies gilt nicht für die im Kapitel ‚Rolle des Materials‘ erörterten Errungenschaften: bei allen drei Schülern sind erste Entwicklungsschritte zum Variablenbegriff sehr deutlich zu erkennen. Die dafür notwendige Ablösung vom Material wurde durch Nathans Beitrag <32> (s. S. 95) erneut vollzogen und durch die Interaktion unterstützt. Das wiederholte Auftreten der Imitation bzw. Paraphrase von neuen Lösungsmöglichkeiten machte klar, wie die Schüler nach der Ablösung vom konkreten Auslegen der Bohnen eine neue (dann sprachliche) Fixierung dieser Lösungsmöglichkeit fanden.

Kapitel 7

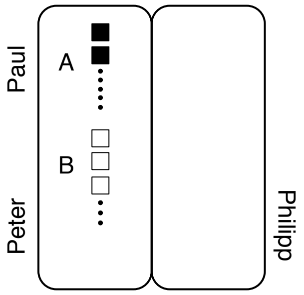
Das zweite Fallbeispiel: Gruppe P

Als zweites Fallbeispiel dient die Episode, in der die Gruppe P eine erste Lösung zu der in der Einstiegsaufgabe zu *Knack die Box* vorgegebenen Boxensituation findet. Für diese Episode als zweites Fallbeispiel spricht, dass

- die Schüler eine andere Lösungsstrategie verfolgen als Gruppe N – das Fallbeispiel also kontrastierend wirkt,
- dem ersten Eindruck nach ihr Einsatz des konkreten Materials dem der Gruppe N aber ähnelt (viele Zeigegesten und antizipierendes Arbeiten) – sich dadurch bisherige Befunde also vielleicht untermauern lassen – und
- sich jedoch auch in dieser Hinsicht beim Lesen der Episode schon Unterschiede andeuten (mehr Handlungen am Material als bei Gruppe N) – sich hier also unter Umständen Möglichkeiten zur Ausschärfung ergeben.

7.1 Rekonstruktion des Lösungsprozesses

Die Protagonisten der zu betrachtenden Episode sitzen wie unten dargestellt am Gruppentisch zusammen und sind gerade dabei, den Aufgabentext gemeinsam nachzuvollziehen. Die Boxensituation haben sie bereits vor Paul auf dem Tisch aufgebaut. Zur besseren Lesbarkeit des Transkriptes wurden die Anordnungen in der Abbildung gemäß der Aufgabenstellung beschriftet. Die Boxen sind geschlossen und leer.



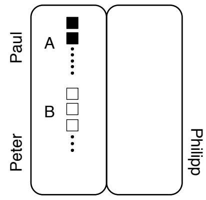
Zu der Gruppe gehört auch noch der Schüler Patrick, der an diesem Tag aber fehlt. Paul sitzt auf Patricks freiem Platz. Normalerweise sitzt er rechts neben Philipp.

Szene 1: Feststellung, dass in die weißen Boxen insgesamt zwei Bohnen gelegt werden müssen, um die verschiedenen Anzahlen von einzelnen Bohnen in den Anordnungen auszugleichen

Während Peter in <1> den Aufgabentext vorliest, schaut Philipp ebenfalls auf sein Arbeitsblatt, Paul spielt mit dem Bohnenvorrat und schaut in der Gegend herum.

1	Peter	Nehmt Bohnen aus dem Bohnenvorrat und füllt die Boxen so, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden, erstens in beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden. Insgesamt, das heißt die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt,
2	Philipp	Aha, weil hier nur drei sind *(zeigt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand auf die drei einzelnen Bohnen in Anordnung B)*, müssen wir dann irgendwie noch zwei *(zeigt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand auf zwei der drei weißen Boxen)* in die Boxen packen.
40 sec. Unterbrechung: die Schüler beschäftigen sich nicht mit der Aufgabe, sondern unterhalten sich – angestoßen durch eine Bemerkung von Paul – über den fehlenden Mitschüler. Diese Unterhaltung wird hier ausgelassen.		
3	Peter	*wendet sich seinem Arbeitsblatt zu*
4	Philipp	Hier *(tippt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand vor den weißen Boxen auf den Tisch)* müssen noch zwei Bohnen rein, wenn ich das richtig kapiert hab',

5	Paul	*(liest von seinem Arbeitsblatt vor, spielt dabei mit der rechten Hand mit einer der nicht zur Situation gehörenden Boxen, die den Bohnenvorrat enthalten)* In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden, insgesamt, das heißt – aah *(hat die Box so schräg gehalten, dass nun die innere Schachtel herausrutscht und Bohnen auf den Tisch kullern)*
6	Philipp	*(lacht)* Ja ist scheiße, ne, das fällt unten *(zeigt auf die Box, mit der Paul hantiert)* raus,
7	Paul	Aah *(schüttet alle Bohnen aus der Box auf den Tisch)*
8	Peter	*schaut zu Paul herüber*
9	Paul	Ja und warum ist das so schlimm, da machst Du einfach so *(schiebt alle Bohnen mit der geöffneten Hand zur Tischkante)*
10	Peter	*schaut wieder auf sein Arbeitsblatt*



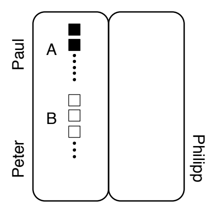
Nachdem Peter in <1> die erste Bedingung der Anweisung zur Befüllung der Boxen vorgelesen hat, äußert Philipp in <2> eine erste Idee. Er begründet, dass sie in Anordnung B zwei Bohnen in die Boxen legen müssen, um auf ebenfalls fünf Bohnen wie in Anordnung A zu kommen. Dazu expliziert er durch Sprache und Zeigen aber nur, dass in Anordnung B „nur drei [Bohnen] sind“ und sie deshalb noch zwei Bohnen ergänzen müssen. Dass in der anderen Anordnung fünf einzelne Bohnen liegen und die Differenz zu den drei einzelnen Bohnen in Anordnung B die zu ergänzende Anzahl von zwei ergibt, bleibt implizit. Durch sein Zeigen mit zwei Fingern auf zwei der drei weißen Boxen macht er überdies noch deutlich, dass er die zwei zu ergänzenden Bohnen nicht in *eine* weiße Box legen möchte, sondern in *zwei* Boxen.

Es folgt eine Unterbrechung des Lösungsprozesses durch ein Gespräch über den fehlenden Mitschüler der Gruppe. Peter markiert dadurch, dass er sich wieder seinem Arbeitsblatt zuwendet, das Ende dieses Gesprächs (<3>). Philipp wiederholt in <4> seine Idee aus <2>. In der Wiederholung fällt seine Ausführung wesentlich knapper aus. Hier stellt er lediglich fest, dass in die weißen Boxen noch zwei Bohnen gelegt werden müssen. Den Begründungsansatz, den er in <2> geliefert hatte, wiederholt er nicht. Philipp fügt seinem Vorschlag hier den Nachsatz „wenn ich das richtig kapiert hab'" an, wodurch er andeuten könnte, dass er sich nicht ganz sicher ist, oder womöglich auch nur eine Bestätigung der anderen einfordert.

Paul beginnt anschließend noch einmal die erste Bedingung zur Befüllung der Boxen von seinem Arbeitsblatt vorzulesen. Es ist denkbar, dass er Philipps Vorschlag nachvollziehen oder aber auch im Lösungsprozess fortfahren möchte, sich aber auf dem Arbeitsblatt neu orientieren muss. Während er liest, spielt er mit einer Hand mit einer Bohnen-Vorratsschachtel. Da die Schachtel sich dabei plötzlich öffnet und Bohnen auf den Tisch kullern, gibt es eine neue kurze Unterbrechung des Lösungsprozesses (<5> – <9>). Die sich auf dieses Missgeschick beziehenden Äußerungen werden nicht näher betrachtet, da sie sich nicht auf die Aufgabe beziehen.

Szene 2: Öffnen von zwei weißen Boxen

11	Philipp	Also, so *(öffnet zwei der drei weißen Boxen ein Stückchen)*, da müssen jetzt noch zwei Bohnen rein #, ne, damit immer *(zeigt abwechselnd auf die beiden Anordnungen)* gleich viel Bohnen sind, ja? *(wendet sich seinem Arbeitsblatt zu)*
12	Peter	# *schaut kurz zu der auf dem Tisch aufgebauten Boxensituation, dann wieder auf sein Arbeitsblatt*
13	Peter	Das heißt die Anzahl der Bohnen in den Boxen *(mehrere Wörter unverständlich)* #, ja *(wendet sich der auf dem Tisch aufgebauten Boxensituation zu, schaut kurz zu Paul)* Gut wir müssen hier jetzt noch *(bewegt seine rechte Hand in einer Greifhaltung über (vermutlich zwei?) einzelne Bohnen neben den schwarzen Boxen; nimmt die Hand wieder zurück und legt den Arm auf dem Tisch ab)* zwei Bohnen reinlegen *(deutet mit Daumen und Zeigefinger der linken Hand auf die beiden geöffneten weißen Boxen, ohne sie zu berühren; Daumen und Zeigefinger sind dabei gerade soweit gespreizt wie die beiden Boxen zusammen breit sind; berührt dann mit mehreren Fingern der linken Hand die geschlossene weiße Box; belässt die Hand an den weißen Boxen)*
14	Paul	# Oh, ich hab' ein paar Stück weggehauen, *(steht auf und verschwindet aus dem Bild)*



Zu Beginn dieser Szene öffnet Philipp zwei der drei weißen Boxen ein Stückchen. Damit macht er einen ersten Schritt, seine vorab geäußerte Idee mit

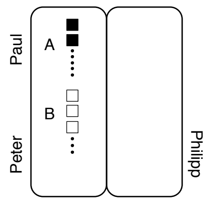
Hilfe des konkreten Materials umzusetzen. Nachdem er die Boxen geöffnet hat, wiederholt er erneut seinen Vorschlag, zwei Bohnen in die weißen Boxen zu legen. Diesmal äußert er auch, was damit bezweckt werden soll: „damit immer *(zeigt abwechselnd auf die beiden Anordnungen)* gleich viel Bohnen sind“. Das Adverb ‚immer‘ ist in der wiedergegebenen Äußerung vermutlich nicht zeitlich gemeint, sondern wird im Zusammenhang mit der begleitenden Zeigegeste als Synonym für ‚in beiden Anordnungen‘ gedeutet. Philipps nachgeschobenes „ja?“ lässt wie sein „wenn ich das richtig kapiert hab‘“ aus <4> (Szene 1) offen, ob er nur Bestätigung sucht oder tatsächlich unsicher ist.

Ob Peters Blick zu der auf dem Tisch aufgebauten Boxensituation in <12> eine Reaktion auf Philipps Äußerung <11> ist, oder ob Peter gerade eigenen Überlegungen nachgeht, lässt sich nicht sagen. Auch seine Folgeäußerung <13> lässt dies offen: zu Beginn von <13> liest er wohl noch einmal aus der ersten Bedingung zur Befüllung der Boxen vor, auch wenn die Formulierung etwas gegenüber derjenigen des Aufgabenblattes verändert ist. Das folgende „ja“ könnte Philipps fragendes ‚Ja‘ aus <11> bestätigen, aber auch Peters eigene Gedanken beschließen. Peter äußert dann, dass sie in die weißen Boxen noch zwei Bohnen legen müssen. Damit wiederholt er eigentlich also Philipps Vorschlag, wobei aber denkbar ist, dass ihm dies nicht bewusst ist, sondern er nach dem Studium seines Arbeitsblattes selbst zu diesem Schluss gekommen ist. Auch hier ist also nicht deutlich, inwiefern er auf Philipp Bezug nimmt oder nicht. Peters Handbewegungen zeigen, dass er die weißen Boxen nun tatsächlich (nicht nur gedanklich) mit Bohnen befüllen möchte, da er nach Bohnen greift. Dies sind jedoch die einzelnen Bohnen aus Anordnung A, weshalb er vermutlich seine Hand wieder zurückzieht, und anschließend wie Philipp nur auf die weißen Boxen zeigt. Am Ende seines Beitrags widmet er sich auch noch der dritten weißen (geschlossenen) Box, indem er sie mit mehreren Fingern berührt. Es lässt sich jedoch (noch?) nicht erschließen, was er sich zu der dritten Box überlegt.

Paul ist am Ende dieser Szene immer noch mit den verschütteten Bohnen beschäftigt und steht vom Tisch auf, um Bohnen aufzuheben.

Szene 3: Feststellung, dass in Boxen gleicher Farbe gleich viele Bohnen liegen müssen; Etablierung des sukzessiven (gedanklichen) Befüllens und Erkennen des Problems

15	Philipp	*(schaut von seinem Arbeitsblatt auf)* Nee, *(stellt seine rechte Hand mit aufgerichtetem Zeigefinger in die Mitte des Tisches)* in den Boxen gleicher Farbe *(setzt die Finger der rechten Hand vor den weißen Boxen auf, tippt mehrmals mit allen Fingern auf den Tisch)* liegen immer gleich viele Bohnen *(nimmt die Hand ans Kinn)*, das heißt hier *(setzt die Finger der rechten Hand wieder vor den weißen Boxen auf und tippt wiederum mehrmals mit allen Fingern auf den Tisch)* müssen mindestens drei sein *(berührt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand kurz die drei weißen Boxen)*, und wenn hier dann *(legt die Finger der rechten Hand vor den einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen ab und fährt an der Bohnenlinie entlang)*, drei und drei *(tippt mit dem rechten Zeigefinger einmal vor den einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen und einmal vor den weißen Boxen auf)* sind sechs, und dann müssten das *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* zwei sein, *(schaut zu Peter)* wir müssen dann so'n Faktor finden, den beide gleich haben *(bewegt seine rechte Hand in der Luft mit ausgestrecktem Zeigefinger über den beiden Boxenanordnungen hin und her)*.
16	Peter	*öffnet die dritte weiße Box ein Stückchen*
17	Philipp	Ne, Peter?
18	Paul	*steht wieder am Tisch und füllt Bohnen in die Schachtel mit dem Bohnenvorrat*



Philipps „Nee“ zu Beginn von <15> deutet an, dass er eine neue Einsicht gewonnen hat, die die Gültigkeit des bisher Gesagten einschränkt. Durch das Aufstellen seines Zeigefingers in der Tischmitte macht er sehr deutlich, dass ihm seine neue Einsicht gewichtig erscheint. Er gibt die zweite Bedingung aus der Anweisung zur Befüllung der Bohnen wieder, wobei er den Ausdruck „in den Boxen gleicher Farbe“ gestisch auf die weißen Boxen in der auf dem Tisch aufgebauten Boxensituation bezieht. Dies ist auch sinnvoll, da ihre bisherigen Überlegungen ja zu unterschiedlichen (gedanklichen) Befüllungen der weißen Boxen geführt hatten. Bei der Wiedergabe der Bedingung ersetzt er das Wort ‚jeweils' durch ‚immer'. Dieser Gebrauch des Adverbs ‚immer' erinnert an die bereits diskutierte Verwendung in <11>. Anschließend stellt Philipp in eigenen Worten dar, was die zweite Bedingung für ihre bisherigen Überlegungen bedeutet: „das heißt hier *(setzt die Finger der rechten Hand wieder vor den weißen Boxen auf und tippt wiederum mehrmals mit allen Fingern auf den Tisch)* müssen mindestens drei sein *(berührt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand kurz die drei weißen Boxen)*", wobei die Bezüge des Gesagten zum konkreten Material nur im Zusammenhang mit der Gestik klar werden. Seine Äußerung lässt erkennen, dass ihm bewusst geworden ist, dass sie unter Beachtung der zweiten Bedingung zur Befüllung der Boxen die Anzahl der Bohnen pro weißer Box noch ermitteln müssen, und bisher lediglich feststeht, dass sie insgesamt *mindestens* drei Bohnen in die drei weißen Boxen – also je eine Bohne pro Box (Zeigen mit drei Fingern auf die drei Boxen!) – legen müssen, da sie die Differenz zur Anordnung A ausgleichen und in alle Boxen gleicher Farbe gleich viele Bohnen legen müssen. Philipp nimmt nun kurzzeitig die Anordnung mit den schwarzen Boxen in den Blick („und wenn hier dann *(legt die Finger der rechten Hand vor den einzelnen Bohnen bei den schwarzen Boxen ab und fährt an der Bohnenlinie entlang)*"), kehrt aber direkt wieder zur Betrachtung der weißen Boxen zurück, um – wie seine nächste Äußerung zeigt – zunächst eine Befüllung der weißen Boxen gedanklich festzulegen und so für Anordnung B eine Gesamt-Bohnenanzahl ermitteln zu können. Er geht nun von einer festen Befüllung jeder weißen Box mit je einer Bohne aus und ermittelt: „drei und drei *(tippt mit dem rechten Zeigefinger einmal vor den einzelnen Bohnen bei den weißen Boxen und einmal vor den weißen Boxen auf)* sind sechs". Anschließend wendet er sich wieder den schwarzen Boxen zu und kommt zu dem Schluss: „und dann müssten das *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* zwei sein". Die bisherigen Überlegungen der Schüler lassen folgende Interpretation dieser Äußerung naheliegend erscheinen, auch wenn Philipp nicht von Bohnen spricht und auf Boxen zeigt: wenn in Anordnung B insgesamt sechs Bohnen liegen, müsste in jede der beiden schwarzen Boxen eine Bohne gelegt werden, um im Vergleich zu Anordnung B unter Beachtung der zweiten Bedingung aufzufüllen. Da Philipp diesmal nicht von *mindestens* zwei Bohnen spricht (vgl. etwas früher in diesem Beitrag), zeigt erst sein nächster Satz, dass er hier nicht davon ausgeht, mit der aktuellen (gedanklichen) Befüllung schon eine Lösung gefunden zu haben, sondern ein sukzessives Lösungsverfahren anstößt, das noch fortgeführt werden muss. Zum Schluss seines Beitrags sagt er nämlich: „wir müssen dann so'n Faktor finden, den beide gleich haben *(bewegt seine rechte Hand in der Luft mit ausgestrecktem Zeigefinger über den beiden Boxenanordnungen hin und her)*". Es lässt sich zwar nicht sicher sagen, was Philipp genau mit dem Begriff ‚Faktor' meint, es wird aber deutlich, dass ihm klar ist, dass sie noch keine Lösung gefunden haben und in der Lösungssuche fortfahren müssen. Es ist vorstellbar, dass er beim ‚Faktor' an den zu findenden Iterationsschritt in dem angedeuteten sukzessiven Befüllungsverfahren denkt, in dem schließlich in beiden Anordnungen gleich viele Bohnen liegen.

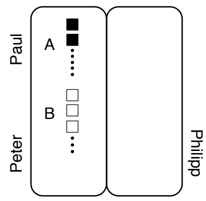
Im Anschluss an Philipps Ausführungen öffnet Peter die dritte weiße Box ein Stückchen, so dass zu vermuten ist, dass dies als Reaktion auf Philipps Beitrag geschieht. In <17> schiebt Philipp seiner in <15> geäußerten Idee wieder eine Vergewisserungsfrage nach. Wie wir gleich sehen werden, reagiert Peter darauf zu Beginn der nächsten Szene dadurch, dass er beginnt, Philipps Gedankengang nachzuvollziehen.

Zum Schluss dieser Szene kehrt Paul wieder zum Tisch zurück und füllt Bohnen in die Vorratsschachtel.

Szene 4: Ermittlung der ersten Lösung (2 | 2) durch (gedankliches) sukzessives Befüllen

19	Peter	Also muss jetzt hier, eins, zwei, drei *(zeigt beim Zählen nacheinander auf die weißen Boxen)*, dann hab'n wir, eins, zwei, drei *(zeigt beim Zählen nacheinander auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)*
20	Philipp	Sechs.
21	Peter	Sechs, und hier hab'n wir schon zwei, vier *(zählt mit den Fingern die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen ab)*

22	Philipp	Fünf *(deutet auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, # und dann wär'n das *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* sieben ##, das heißt *(hebt seine rechte Hand mit aufgerichtetem Zeigefinger und Mittelfinger)*, wenn wir dann noch mal da welche rein packen *(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen)*, sind das neun, sieben plus zwei *(tippt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand auf die beiden schwarzen Boxen)* sind auch neun ###, das heißt da *(tippt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand erneut auf die beiden schwarzen Boxen)* kommen jeweils immer zwei rein und da *(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen)* kommen zwei mal dr *(am Ende leiser werdend und abbrechend)*
23	Peter	# Fünf,
24	Peter	## Sieben
25	Paul	### *schließt die Box mit dem Bohnenvorrat und schüttelt sie*



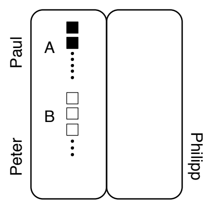
Peter zählt zunächst bis drei und zeigt dabei nacheinander auf die drei weißen Boxen. Dass er dabei die antizipierten Bohnen und nicht die weißen Boxen zählt, wird durch seine Einleitung „Also muss jetzt hier" deutlich. Mit „dann hab'n wir" drückt er anschließend aus, dass nun die Gesamt-Bohnenanzahl in der Anordnung mit den weißen Boxen zu bestimmen ist, und zählt dazu nun auch die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen ab. Die Dehnung beim Aussprechen der Zahl drei könnte darauf zurückzuführen sein, dass er sich gedanklich schon wieder den Bohnen in den Boxen widmet und versucht, die Gesamt-Bohnenanzahl zu ermitteln. Diese Deutungshypothese wird dadurch unterstützt, dass er die daraufhin von Philipp genannte Gesamt-Bohnenanzahl sechs (<20>) sofort aufgreift und sich dann der Anordnung mit den schwarzen Boxen zuwendet (<21>). Hier beginnt er, die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen mit den Fingern abzuzählen, bevor Philipp ihn wieder unterbricht (<22>). Philipp deutet auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen und benennt direkt ihre Anzahl (5). Anschließend zeigt er auf die schwarzen Boxen und sagt: „und dann wär'n das sieben". Damit macht er offensichtlich eine Feststellung zur Gesamt-Bohnenanzahl in der Anordnung mit den schwarzen Boxen. Soweit war Philipp auch schon in Beitrag <15> gekommen. Im übrigen Teil des vorliegenden Beitrags führt er diesen Ansatz nun aber zu einer ersten Lösung fort. Auf die anstehende Ermittlung der Lösung macht er sprachlich („das heißt“) und insbesondere gestisch (*hebt seine rechte Hand mit aufgerichtetem Zeigefinger und Mittelfinger*) aufmerksam, was ein Anzeichen dafür sein könnte, dass er die Lösung nicht erst im Laufe seines Wortbeitrages findet, sondern vorher schon im Kopf oder zumindest eine Ahnung davon hat. Er setzt das begonnene sukzessive (gedankliche!) Befüllen fort: da nun wieder in der Anordnung mit den weißen Boxen weniger Bohnen liegen, wird in jeder weißen Box eine weitere Bohne ergänzt, was in dieser Anordnung zu einer Gesamt-Bohnenanzahl von neun führt. Daraufhin stellt Philipp fest: „sieben plus zwei sind auch neun“, wobei er durch seine Gestik (*tippt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand auf die beiden schwarzen Boxen*) die Aussage auf die Anordnung mit den schwarzen Boxen bezieht. Zum Schluss seines Beitrages fasst er noch einmal zusammen: er zeigt auf die schwarzen Boxen und benennt die dafür ermittelte Bohnenanzahl („da kommen jeweils immer zwei rein“). In Bezug auf die weißen Boxen äußert er: „und da kommen zwei mal dr *(am Ende leiser werdend und abbrechend)*“, wobei er mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die weißen Boxen tippt. Hier benennt er nicht die für die weißen Boxen ermittelte Bohnenanzahl, sondern vollzieht vermutlich sprachlich den Lösungsprozess nach, in welchem zweimal gedanklich je eine Bohne in jede weiße Box gelegt wurde, auf alle drei weißen Boxen bezogen, also zwei mal drei Bohnen verteilt wurden. Es könnte sein, dass Philipp der sprachliche Unterschied zur Darstellung des anderen Teils seiner Lösung auffällt und er deshalb am Ende leiser wird und abbricht.

Die Beiträge <23> und <24> sind zwei Einwürfe von Peter, in welchen er Zwischenergebnisse nennt bzw. wiederholt. Beitrag <23> könnte man auch noch als zu <21> gehörend ansehen, da Philipp Peter ja ins Wort gefallen ist und er mit ‚fünf‘ in <23> gerade die Anzahl benennt, die er in <21> zu ermitteln begonnen hatte.

Paul hat gegen Ende dieser Szene offensichtlich wieder alle Bohnen in die Vorratsbox eingefüllt und schließt die Box nun wieder (<25>).

Szene 5: Bedeutung des Ausdrucks „Zwei mal drei" bzgl. Anordnung B wird geklärt

26	Peter	*(zeigt auf die weißen Boxen, nachfragend)* Da kommen zwei mal (.) # drei rein,
27	Philipp	# Ja, zwei mal drei rein. Drei *(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen)*, sechs *(hebt die Finger leicht von den Boxen an)*, neun *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)*. ## Und dann, fünf *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, sieben *(tippt mit dem Zeigefinger der rechten Hand vor der einen schwarzen Box auf den Tisch)*, neun *(tippt ein zweites Mal auf den Tisch, etwas weiter rechts als beim ersten Mal, (vielleicht vor der anderen schwarzen Box?))*. Ne, Peter?
28	Peter	## *nimmt sich den Bohnenvorrat, den Paul gerade wieder in die Box eingefüllt hat*
29	Paul	## *setzt sich hin*

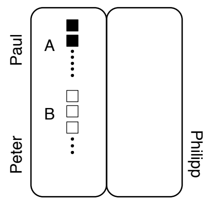


Peter ist Philipps letzte Äußerung zur Befüllung der weißen Boxen (Ende Szene 4) offenbar unklar, da er sie zu Beginn dieser Szene in einem fragenden Tonfall wiederholt (<26>). Nachdem es in <22> noch den Anschein hatte, dass seine Aussage Philipp selbst auch merkwürdig vorkam, bekräftigt er sie nun jedoch und erläutert sie anschließend. Sein additives Zählen in Verbindung mit seiner Gestik bestätigt die oben aufgestellte Hypothese zur Herkunft dieser Aussage. Anschließend rechnet er noch einmal vor, wie man in der Anordnung mit den schwarzen Boxen auf neun Bohnen kommt, wobei er hier nicht wie bei den weißen Boxen entlang des Befüllvorgangs rechnet, sondern wieder zur Addition der Bohnenanzahlen pro Box zurückkehrt. Abschließend sucht er wieder Bestätigung bei Peter.

Peter kann Philipps Darstellung des Ergebnisses nach dessen Erläuterung wohl nun nachvollziehen, da er sich bereits nach dem die weißen Boxen betreffenden Teil die Vorratsbox mit den Bohnen von Paul nimmt. Dies könnte ein Anzeichen dafür sein, dass er die Boxen nun tatsächlich ihren Überlegungen entsprechend befüllen möchte. Paul setzt sich, nachdem Peter sich die Vorratsbox genommen hat, wieder hin.

Szene 6: Befüllen und Schließen der Boxen

30	Peter	Eins, zwei *(füllt in die erste weiße Box zwei Bohnen und schließt die Box danach)*
31	Philipp	Und jetzt da eins, zwei *(zeigt auf die zweite weiße Box; schaut auf sein Arbeitsblatt)*
32	Peter	Eins, zwei *(füllt in die zweite weiße Box zwei Bohnen und schließt die Box danach)*
33	Paul	Häh, in jede muss eine rein, oder? *(zeigt auf die weißen Boxen)*
34	Philipp	Nein, das ist,
35	Peter	Eins *(legt nacheinander zwei Bohnen in die dritte weiße Box und schließt die Box danach).* Nein, Mann, wir müssen das ausrechnen, # wir müssen das ausgleichen, *(öffnet beide schwarze Boxen ein Stückchen),*
36	Philipp	# Da muss immer,
37	Paul	Ah.
38	Peter	Weil sonst gibt es Schwankungen, # *(nimmt zwei Bohnen aus dem Vorrat und legt sie in seine linke Hand)*
39	Philipp	# Und da *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* ist auch eins, zwei.
40	Peter	In beide? *(nimmt zwei weitere Bohnen in seine rechte Hand)*
41	Philipp	Ja, in beide, weil dann sind das *(fährt mit den Fingern auf dem Tisch vor den einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen entlang)* ja auch neun.
42	Peter	*legt in die beiden schwarzen Boxen je die zwei Bohnen, die er in seinen Händen hält, # (ca. 2 Wörter unverständlich), schließt die Boxen*
43	Philipp	# *(liest von seinem Arbeitsblatt vor)* Erfindet,

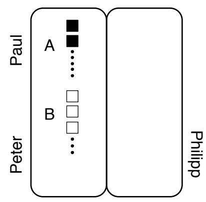


Peter beginnt nun tatsächlich mit der Befüllung der Boxen. Er legt zunächst jeweils zwei Bohnen in die weißen Boxen, wobei er die Bohnen jeweils laut abzählt und die Boxen nach dem Befüllen schließt (<30>, <32>, <35>). Er geht also auch bei den weißen Boxen boxenweise vor, legt also drei mal zwei Bohnen in die Boxen und nicht, wie von Philipp vorgerechnet, zwei mal drei Bohnen (s. <22>, <27>). In <35> zählt er nur bis eins, da er vermutlich von Pauls Nachfrage in <33> abgelenkt ist, legt aber ebenfalls zwei Bohnen in die Box. Paul wundert sich in <33> darüber, dass in jede weiße Box zwei Bohnen gelegt werden, und meint, dass in jede nur eine Bohne hinein müsse. Er hat offenbar die Lösung des Problems verpasst, trotz seiner Ablenkung durch die verschütteten Bohnen in Szene 1 aber noch mitbekommen, dass in Boxen gleicher Farbe gleich viele Bohnen liegen müssen. Peter verneint Pauls Einwurf und liefert Begründungsbruchstücke (<35>, <38>), mit denen Paul sich zufrieden gibt (<37>: „Ah.“). Dabei spricht Peter vom Ausrechnen, Ausgleichen und andernfalls zu erwartenden Schwankungen. Auch Philipp legt Einspruch gegen Pauls Einwurf ein (<34>, <36>), kommt aber nicht über Satzanfänge hinaus, bevor Peter wieder das Wort ergreift. Im ersten Teil dieser Szene ist Peter ohnehin der Hauptakteur und Philipps inhaltlicher Beitrag beschränkt sich mit <31> darauf, dass er Peter auffordert, auch in die zweite weiße Box zwei Bohnen zu legen.

Philipps Meinung ist ab <40> wieder gefragt. Peter hat zu diesem Zeitpunkt bereits beide schwarzen Boxen ein Stückchen geöffnet (<35>) und schon mal zwei Bohnen in seine linke Hand genommen (<38>). Nachdem Philipp in <39> geäußert hat: „Und da *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* ist auch eins, zwei.“, vergewissert sich Peter in <40>, ob dies für beide schwarzen Boxen gelte. Bevor Philipp antworten kann, nimmt er aber schon mal zwei weitere Bohnen in seine rechte Hand. Zu Philipps Beitrag <39> sei noch eine sprachliche Auffälligkeit angemerkt: Philipp sagt nicht einfach „Und da müssen auch zwei rein.“, sondern greift das Abzählen der Bohnen, das Peter während des Befüllens der weißen Boxen wiederholt durchgeführt hat, sprachlich in seiner Aufforderung auf. In <41> bejaht Philipp Peters Frage und führt an, dass man auf diese Weise in Anordnung A ja auch neun Bohnen erhalte. Daraufhin befüllt Peter die schwarzen Boxen mit jeweils den zwei Bohnen, die er schon in seinen Händen bereit gehalten hat, und schließt dann die Boxen (<42>). Gegen Ende dieses Vorgangs beginnt Philipp bereits die nächste Teilaufgabe vom Arbeitsblatt vorzulesen, wird aber direkt von Peter unterbrochen (s. nächste Szene).

Szene 7: Erneute Überprüfung der Lösung anhand der befüllten aber geschlossenen Boxen und Abschluss der Aufgabe

44	Peter	[Jetzt hab'n wir hier,] eins, zwei *(tippt zweimal auf die eine schwarze Box)*, drei, vier *(tippt zweimal auf die andere schwarze Box)*, fünf, sechs, sieben, acht, neun *(tippt während des Weiterzählens an der Bohnenreihe neben den schwarzen Boxen entlang)*, (.) # eins, zwei *(tippt zweimal auf die erste weiße Box)*, drei, vier *(tippt zweimal auf die zweite weiße Box)*, fünf, sechs *(tippt zweimal auf die dritte weiße Box)*, sieben, acht, neun *(tippt während des Weiterzählens an der Bohnenreihe neben den weißen Boxen entlang). (Hebt seine rechte Hand zur Seite, mit der Handfläche zur Gruppe gedreht.)*
45	Philipp	# Und da *(zeigt auf die weißen Boxen)*
46	Philipp	Ha *(schlägt mit seiner rechten Hand in Peters Hand ein)*, also komm', jetzt weiter,



Peter überprüft in <44> noch einmal, ob sie mit der vorgenommenen Befüllung tatsächlich eine Lösung gefunden haben. Dazu zählt er die Bohnen in beiden Anordnungen ab. Da die Boxen geschlossen sind und daher ihre Befüllungen für Zeigegesten nicht zugänglich sind, tippt er während des Abzählens der Bohnen, die in den Boxen liegen, auf die Boxen – jeweils zweimal. Als Peter vor dem Wechsel zur zweiten Anordnung kurz innehält, wirft Philipp sofort „Und da *(zeigt auf die weißen Boxen)*“ ein und weist dadurch darauf hin, was noch zu tun ist. Man kann aber davon ausgehen, dass Peter auch ohne diesen Hinweis die Überprüfung hätte abschließen können. Die Schüler schließen die Bearbeitung der betrachteten Teilaufgabe dadurch ab, dass Philipp und Peter ihre rechten Hände zusammenschlagen – als Ausdruck der Freude über die gefundene Lösung. Philipp sagt „also komm', jetzt weiter,“ und will vermutlich mit der nächsten Teilaufgabe fortfahren (vgl. <43>).

Zusammenfassende Beschreibung des Lösungsverfahrens

Die Schüler tasten sich beim Nachvollziehen der Aufgabenstellung an die Lösung heran. Zunächst gleichen sie den Bohnen-Überschuss von zwei in der Anordnung mit den schwarzen Boxen durch gedankliches Einfüllen von insgesamt zwei Bohnen in zwei weiße Boxen aus, bevor sie in der zweiten Bedingung lesen, dass in Boxen gleicher Farbe gleich viele Bohnen liegen müssen, sie also auch in die dritte weiße Box gedanklich noch eine Bohne legen. Dabei wird ihnen klar, dass nun wieder in der Anordnung mit den schwarzen Boxen (gedanklich) nachzufüllen ist und sie so fortfahren müssen, bis in beiden Anordnungen gleich viele Bohnen liegen. Dieser Zustand wird schon bei zwei Bohnen pro Box erreicht.

Die Schüler arbeiten zunächst nur mit vorgestellten Bohnen, sie konkretisieren ihren sukzessiven Befüllungsprozess nicht durch tatsächliches Verteilen von Bohnen. Erst als sie eine Lösung gefunden haben, legen sie die entsprechenden Anzahlen von Bohnen in die Boxen.

Im Prinzip befolgen die Schüler nur die Aufgabenstellung, deren Bedingungen zur Befüllung der Boxen sie gewissermaßen als Anweisungen verstehen, die in Schleifen durchzuführen sind, bis der gewünschte Zustand erreicht ist. Sie etablieren dabei ein algorithmisches Verfahren, das durch sukzessives Befüllen der Boxen sicher zu allen Lösungen in $\mathbb{N}$ der durch die Boxen und Bohnen dargestellten Gleichung führt. Dieses soll abschließend allgemein dargestellt werden:

1. *Ergänze in derjenigen Anordnung in welcher insgesamt weniger Bohnen vorhanden sind, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt, pro Box eine Bohne.*

2. *Überprüfe, ob in beiden Anordnungen gleich viele Bohnen vorhanden sind (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt). Falls nicht, beginne wieder bei Schritt 1.*

3. *Wenn dieser Schritt erreicht wird, ist eine Lösung gefunden. Um weitere Lösungen ermitteln zu können, muss das Gleichgewicht der beiden Anordnungen gestört werden, indem in einer der beiden Anordnungen pro Box eine Bohne ergänzt wird. Beginne nun wieder bei Schritt 1.*

Schritt 3 wird von den Schülern nicht ausgeführt. Sie brechen den Lösungsprozess ab, als sie die erste Lösung gefunden haben. Dies ist nicht verwunderlich, da sie im Mathematikunterricht in der Regel vermutlich nur eine Lösung ermitteln müssen. Die Etablierung von Schritt 3 würde darüber hinaus auch eine tiefere Durchdringung des Problems erfordern, die über eine erste Algorithmisierung der Aufgabenbedingung – wie sie von den Schülern vorgenommen wurde – hinaus ginge. In der allgemeinen Darstellung des Verfahrens wurde dieser Schritt ergänzt, um zu zeigen, dass das Verfahren der Schüler grundsätzlich für die Suche aller Lösungen geeignet ist.

7.2 Die Rolle des Materials

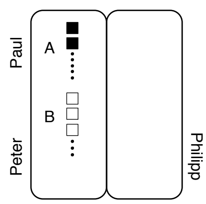
In der ersten Hälfte der Episode sprechen die Schüler einzelne Male explizit von Boxen oder Bohnen – in eigenen Formulierungen (<2>, <4>, <11>, <13>), sowie bei der Wiedergabe von Aufgabentext (<1>, <13>, <15>). Ansonsten nehmen sie sprachlich insbesondere durch ortsbestimmende Adverbien (z. B. <2>: „weil *hier* nur drei sind“, <11>: „*da* müssen jetzt noch zwei Bohnen rein“, <22>: „wenn wir dann noch mal *da* welche reinpacken“), aber auch durch Demonstrativpronomen (<15>: „und dann müssten *das* zwei sein“, <22>: „und dann wär'n *das*“), Indefinitpronomen (<22>: „da *welche* reinpacken“) und durch eine sinn-erweiterte Verwendung des Adverbs ‚immer‘ (<11>: „damit *immer (zeigt abwechselnd auf die beiden Anordnungen)* gleich viel Bohnen sind“, <22>: „das heißt da *(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen)* kommen jeweils *immer* zwei rein“; s. auch bereits S. 142, 144) auf das Material Bezug. Die Häufung der ortsbestimmenden Adverbien deutet bereits die Relevanz anderer Ausdrucksmodalitäten im Umgang mit dem Material an, da in der beobachteten Verwendung auf der sprachlichen Ebene die eigentlichen Ortsinformationen fehlen.

Die Schüler begleiten ihre Äußerungen durch ausgeprägtes Zeigen auf Bohnen und Boxen und komplettieren dadurch ihre sprachlichen Formulierungen mit Adverbien und Demonstrativpronomen. Bevor diese Zeigegesten genauer betrachtet werden, lässt sich demnach bereits festhalten, dass es sich um gesture-speech-mismatches handelt. Man beobachtet sowohl gewöhnliche Zeigegesten als auch am Material verankerte abstrakte Zeigegesten (s.

S. 120), wobei die Klassifizierung noch diskutiert werden muss. Eindeutige Fälle von gewöhnlichen Zeigegesten sind überall dort zu finden, wo die Schüler auf einzelne Bohnen neben den Boxen zeigen (z. B. zweite Geste in <19> (S. 145), erste Geste in <22> (S. 146)) und sie abzählen bzw. direkt deren Anzahl benennen, oder dort, wo sie auf Boxen zeigen und explizit über das Befüllen der Boxen sprechen (z. B. in <22> (S. 146): „... wenn wir dann noch mal da welche rein packen *(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen)*, sind das neun ...“). Diskutiert werden müssen diejenigen Fälle, in denen die Schüler auf Boxen zeigen, sie sich aber eigentlich mit den Bohnen befassen – also Fälle, die möglicherweise als am Material verankerte abstrakte Zeigegesten einzustufen sind.

Hier gibt es Beiträge, in denen bei gemeinsamer Deutung von Geste und Sprache deutlich wird, dass etwas im Sinne von „hier [in diese Box] sollen so und so viele Bohnen hinein“ ausgedrückt werden soll, und in denen die beobachtete Geste daher doch als gewöhnliche Zeigegeste einzustufen ist:

Philipp, Ausschnitt aus <15> (s. S. 143)
... hier *(setzt die Finger der rechten Hand wieder vor den weißen Boxen auf und tippt wiederum mehrmals mit allen Fingern auf den Tisch)* müssen mindestens drei sein *(berührt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand kurz die drei weißen Boxen)* ..., und dann müssten das *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* zwei sein ...



Peter, Ausschnitt aus <19> (s. S. 145)
Also muss jetzt hier, eins, zwei, drei *(zeigt beim Zählen nacheinander auf die weißen Boxen)* ...

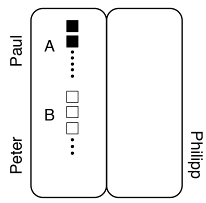
Während die erste Geste im zitierten Ausschnitt aus <15> ohne Frage eine gewöhnliche Zeigegeste ist, die darüber Auskunft gibt, was mit „hier“ gemeint ist, scheinen die übrigen zitierten Gesten auf den ersten Blick einen abstrakteren Charakter zu haben, da die Schüler tatsächlich zwar auf die Boxen deuten, anders betrachtet aber mit ihren Gesten auf gedachte Bohnen verweisen bzw. gedachten Bohnen einen Ort zuweisen könnten. Allerdings deutet die Verwendung des Verbes „müssen“ an, dass der Fokus in allen drei Fällen auf dem Befüllvorgang ruht. Bezieht man diesen Aspekt mit ein, ist es naheliegend, die Gesten im obigen Sinne von „hier [in diese Box] sollen so und so viele Bohnen hinein“ als gewöhnliche Zeigegesten zu verstehen.

Es finden sich aber auch sicher zu identifizierende am Material verankerte abstrakte Zeigegesten (s. Fettdruck in den folgenden Beiträgen):

Philipp, Ausschnitt aus <15> (s. S. 143)
... drei und drei *(**tippt mit dem rechten Zeigefinger** einmal vor den einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen und einmal **vor den weißen Boxen auf**)* sind sechs ...

Philipp, Ausschnitt aus <22> (s. S. 146)
... und dann wär’n das ***(zeigt auf die schwarzen Boxen)*** sieben ..., sieben plus zwei ***(tippt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand auf die beiden schwarzen Boxen)*** sind auch neun ...

Philipp, Ausschnitt aus <27> (s. S. 148)
... Drei ***(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen)***, sechs ***(hebt die Finger leicht von den Boxen an)***, ... Und dann, fünf *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, sieben ***(tippt mit dem Zeigefinger der rechten Hand vor der einen schwarzen Box auf den Tisch)***, neun ***(tippt ein zweites Mal auf den Tisch, etwas weiter rechts als beim ersten Mal, (vielleicht vor der anderen schwarzen Box?))***



Die Identifizierung fällt hier leicht, da diese Beiträge auf gestischer *und* verbaler Ebene durch ein „so tun als ob“ gekennzeichnet sind. Wie auch bereits in den eben betrachteten zwei Beiträgen zeigen die Schüler auf die Boxen, befassen sich aber mit den Bohnen. Darüber hinaus sprechen sie nun jedoch auch nicht mehr über den Befüllvorgang (auch nicht indirekt durch die Verwendung des Verbs „müssen“ wie oben), sondern tun auch hier so als ob, antizipieren also die gewünschten Bohnenanzahlen. Dabei verwenden sie sowohl den Indikativ als auch den Konjunktiv.

Im folgenden Beitrag (<44>) liegen in den Boxen tatsächlich die gewünschten Anzahlen an Bohnen, die Boxen sind aber geschlossen, so dass man sie nicht sehen kann:

Peter, Ausschnitt aus <44> (s. S. 151)
... eins, zwei *(tippt zweimal auf die eine schwarze Box)*, drei, vier *(tippt zweimal auf die andere schwarze Box)*, ... eins, zwei *(tippt zweimal auf die erste weiße Box)*, drei, vier *(tippt zweimal auf die zweite weiße Box)*, fünf, sechs *(tippt zweimal auf die dritte weiße Box)*, ...

Die beobachtbare Bezugnahme auf das Material ist vergleichbar zur eben beschriebenen, gedanklich macht es aber natürlich trotzdem einen Unterschied, zu wissen, dass in den Boxen Bohnen liegen. Es handelt sich dann nämlich nicht mehr um ein so tun als ob, sondern um ein Zeigen auf nicht sichtbare, aber vorhandene Bohnen. Dies spricht dafür, die Gesten dieses Beitrags wiederum als gewöhnliche Zeigegesten einzustufen.

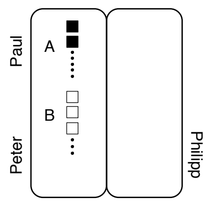
Oben wurde bereits darauf hingewiesen, dass die in dieser Episode häufig zu beobachtenden Kombinationen aus ortsbestimmenden Adverbien bzw. Demonstrativpronomen und (abstrakten) Zeigegesten als gesture-speech-mismatches anzusehen sind. Darüber hinaus findet man noch vier andere mismatches:

Philipp, Ausschnitt aus <2> (s. S. 139)
... müssen wir dann irgendwie noch zwei *(zeigt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand auf zwei der drei weißen Boxen)* in die Boxen packen.

Philipp, Ausschnitt aus <15> (s. S. 143)
... in den Boxen gleicher Farbe *(setzt die Finger der rechten Hand vor den weißen Boxen auf, tippt mehrmals mit allen Fingern auf den Tisch)* liegen immer gleich viele Bohnen ...

Philipp, Ausschnitt aus <22> (s. S. 146)
... und dann wär'n das *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* sieben ...

Philipp, <41> (s. S. 149)
Ja, in beide, weil dann sind das *(fährt mit den Fingern auf dem Tisch vor den einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen entlang)* ja auch neun.



Bei dem Ausschnitt aus <2> handelt es sich um ein gesture-speech-mismatch, da Philipps Geste seine verbale Aussage konkretisiert. Sprachlich bleibt offen, in welche Boxen Bohnen ‚gepackt' werden sollen. Durch seine

Geste macht er aber deutlich, dass sie in den weißen Boxen zu ergänzen sind und schlägt darüber hinaus sogar vor, in zwei der drei weißen Boxen je eine Bohne zu legen und nicht in eine weiße Box zwei Bohnen.

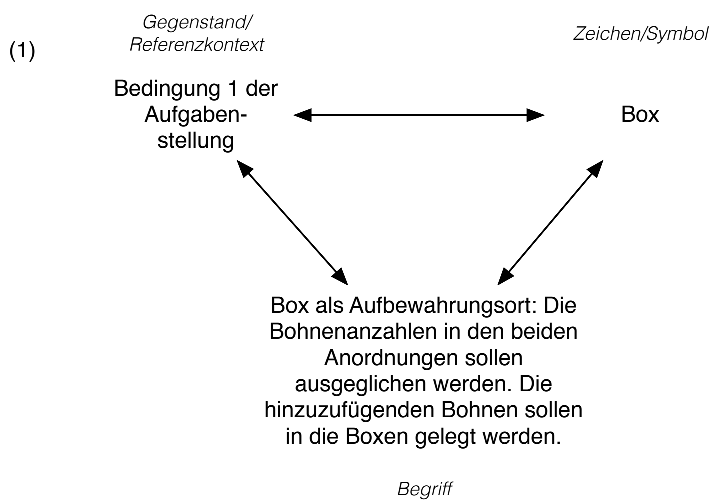
Auch bei der Passage aus <15> bezieht Philipp seine verbale Aussage durch seine Geste auf eine Boxenfarbe und fügt ihr dadurch eine zusätzliche Information bei. Die durch die Geste getroffene Einschränkung macht deutlich, dass die verbale Aussage aktuell insbesondere bei der Betrachtung der weißen Boxen von Belang ist, da deren antizipierte Befüllungen dieser Vorgabe bislang nicht genügen.

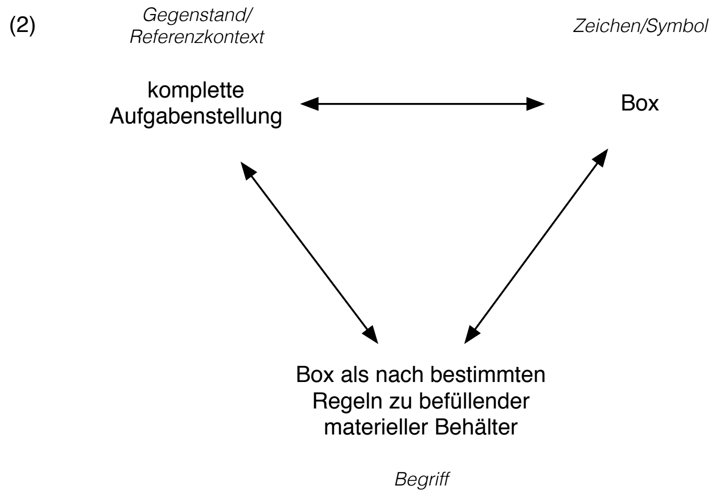
Die Ausschnitte aus <22> und <41> sind mismatches in doppelter Hinsicht. Zum einen erläutern die wiedergegebenen Gesten das in beiden Fällen verbal verwendete Demonstrativpronomen ‚das'. Dies geschieht jedoch widersprüchlich, da in den schwarzen Boxen in <22> nicht sieben und neben den schwarzen Boxen in <41> nicht neun Bohnen liegen. In dieser Widersprüchlichkeit liegt die zweite Facette des mismatches, da durch sie eine weitere Information gegeben wird. Die Geste verweist in beiden Fällen auf diejenigen Bohnen, die die schon vorhandene Anzahl zur mit der Geste benannten Gesamtzahl ergänzen.

Die große Anzahl an mismatches in dieser Episode (insbesondere die Kombinationen aus ortsbestimmenden Adverbien bzw. Demonstrativpronomen und (abstrakten) Zeigegesten), die allesamt bei auf das Material bezogenen Gesten zu finden sind, lässt also vermuten, dass die Präsenz des Materials den Schülern gelegen kommt: sie müssen aufgrund der Möglichkeit, sich gestisch auf das Material zu beziehen, auf sprachlicher Ebene nur weniger Informationen verarbeiten. Also unterstützt auch diese Episode Goldin-Meadows Auffassung der Gesten als Eingangstor zu neuen Inhalten (Goldin-Meadow 2005, S.57; hier s. S. 51).

Beschreibt man die Verwendung des Materials in dieser Episode, so muss festgestellt werden, dass die Schüler nicht nur durch Gestik das konkrete Material einbeziehen, sondern sich auch Handlungen an den Boxen und Bohnen beobachten lassen. Diese ersetzen zum Teil Gesten: in <11> verleiht Philipp z. B. der Wiederholung seiner Aussage aus <4>, dass in zwei weiße Boxen je eine Bohne gelegt werden müsse, durch das Öffnen zweier weißer Boxen Nachdruck. Im Gegensatz zu seiner Geste in <4> führt die Handlung nämlich zu einer sichtbaren bleibenden Veränderung des Materials, die auch nach der Ausführung der Handlung noch Eindruck machen kann. Gegen Ende der Episode (<30> – <42>) wird sogar hauptsächlich gehandelt und nur wenig gestikuliert. In diesem Ausschnitt befüllt Peter die Boxen gemäß ihrer vorab ermittelten Lösung.

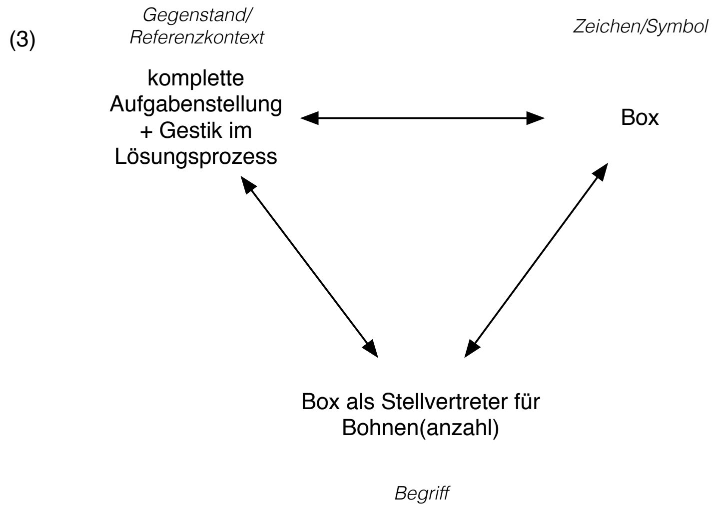
Welche Variablenrollen lassen sich bei dieser Verwendung des Materials und dieser Art der Lösungsfindung nun beobachten? Zu Beginn der Aufgabenbearbeitung liegt der Fokus der Schüler darauf, dass Bohnen ergänzt werden müssen, damit in beiden Anordnungen gleich viele Bohnen liegen. Dabei ist ihnen klar, dass die zu ergänzenden Bohnen in die Boxen gelegt werden müssen, die Frage, wie viele Bohnen in jede Box müssen, steht jedoch nicht im Zentrum. Daher wird die Idee der gesuchten Unbekannten hier wohl eher nicht erfahren. Die Boxen erscheinen zunächst als Aufbewahrungsort für die zu ergänzenden Bohnen (s. erstes epistemologisches Dreieck).





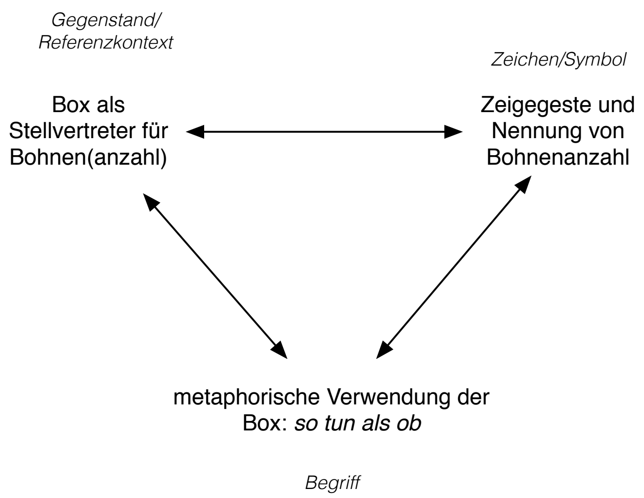
Nachdem Philipp in <15> die Aufgabenstellung komplett erfasst hat, sehen die Schüler die Boxen als Objekte mit eigenen Regeln. Sie behandeln sie nun als nach bestimmten Vorgaben zu befüllende Behälter (s. zweites epistemologisches Dreieck). Bis zu diesem Zeitpunkt ist die gesamte Bearbeitungsweise von der materiell gegebenen Boxensituation geprägt und lässt keine algebraischen Ansätze erkennen.

In <15> wird dann jedoch eine Umdeutung der Boxen als Stellvertreter für Bohnen(-Anzahlen) sichtbar (s. u. das dritte epistemologische Dreieck). Diese Umdeutung vollzieht sich durch die gestische Einbeziehung der Boxen in den Lösungsprozess. Die Schüler zeigen stellvertretend auf die Boxen, wenn sie über (die als) deren Befüllungen (anzunehmenden Bohnen(anzahlen)) sprechen.



Im Hinblick auf die Untersuchung der Variablenrollen stellt sich nun die Frage, wie weit die Ausprägungen des Stellvertreter-Daseins der Box in Richtung einer abstrakten Vorstellung von Variablen als Platzhalter reichen? Die immer wiederkehrende Präsenz des tatsächlichen Befüllvorgangs und das Befüllen der Boxen am Schluss der Episode deuten eher an, dass die Boxen von den Schülern als materielle Stellvertreter für materielle Bohnenmengen angesehen werden. Das Befüllen der Boxen mit den Bohnen scheint ihnen zu wichtig zu sein, als dass sie die Boxensituation nur als Darstellungsmittel für ein abstrakteres Problem ansehen könnten. Die für die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen als Platzhalter notwendige metaphorische *Betrachtung* der Box bleibt wohl (noch?) aus. Allerdings lassen sich sehr wohl unterschiedliche Ausprägungen des Stellvertreter-Daseins der Box festmachen – insbesondere, wenn man die abstrakten Zeigegesten auf die leeren Boxen mit den Zeigegesten auf die gefüllten Boxen am Ende der Episode vergleicht. Während auf die Boxen im zweiten Fall in einem sehr materiellen Sinne als Stellvertreter der in ihnen liegenden Bohnen Bezug genommen wird, ist der erste Fall subtilerer Natur. Die dort zu beobachtende durch ein ‚so tun als ob' gekennzeichnete bildliche *Verwendung* der Boxen (s. viertes epistemologisches Dreieck) könnte den Grundstein für die metaphorische *Betrachtung* der Boxen legen, die für die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen als Platzhalter notwendig ist.

(4)



Auch auf der Ebene der Denkhandlungen lassen sich im Verlauf der Episode durchaus Ansätze algebraischen Denkens aufdecken. Zum einen konstruieren die Schüler bei der Lösungssuche einen Algorithmus, der den in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen genügt und – wie oben bereits erläutert wurde – so erweitert werden kann, dass er nicht nur eine Lösung, sondern alle Lösungen in $\mathbb{N}$ produziert. Hierin kann man demnach die Denkhandlung des Konstruierens mit ihrem spezifisch algebraischen *way of thinking* festmachen: Objekte so zu konstruieren, dass sie vorhandenen Regeln genügen (vgl. S. 12). Zum anderen führen die Schüler diesen Algorithmus gedanklich durch: sie befüllen die Boxen nicht tatsächlich sukzessive mit Bohnen, sondern lediglich in ihrer Vorstellung. Dies passt zur Denkhandlung des Strukturierens, die im algebraischen Kontext eben dadurch charakterisiert wird, dass Prozesse gedanklich durchlaufen werden (vgl. S. 12). Darüber hinaus müssen die Schüler bei der Durchführung ihres Algorithmus ständig die aktuell angenommenen Bohnenanzahlen in den Boxen präsent haben, und die Gesamt-Bohnenanzahlen in den Anordnungen nach größer/kleiner-Relationen ordnen, was ebenfalls strukturierende Leistungen erfordert. In diesem Zusammenhang lässt sich mutmaßen, dass die Möglichkeit, bestimmte Informationen durch Gesten auf das Material zu äußern, die Schüler bei dieser gedanklichen Durchführung des Lösungsprozesses maßgeblich unterstützt bzw. sie sogar erst ermöglicht.

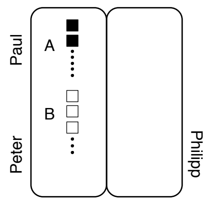
Zusammenfassend lässt sich konstatieren, dass die Schüler das Material sehr stark in ihren Lösungsprozess einbinden – sowohl durch Gesten und Handlungen als auch durch sprachliche Bezüge. Die Möglichkeit der gestischen Verweise scheint an den entscheidenden Stellen z. T. überhaupt der Ermöglichungsgrund für die gedankliche Ausführung des Lösungsverfahrens zu sein. Man kann demnach feststellen, dass das Material in dieser Episode zum material anchor für das Lösungsverfahren avancieren kann. Allerdings scheint das Material (noch) weitgehend in seiner konkret-gegenständlichen Präsenz von Nöten, da das tatsächliche Befüllen für die Schüler einen großen Stellenwert zu haben scheint. Erste Ablösungstendenzen (von den Bohnen) sind lediglich bei den am Material verankerten abstrakten Zeigegesten auf die Boxen zu beobachten. Wie oben bereits erörtert wurde, könnte die dabei festzustellende bildliche Verwendung der Boxen der Grundstein für deren metaphorische Betrachtung sein. Wird diese von den Schülern erreicht, kann die Box zum material anchor für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen als Platzhalter werden.

In den einleitenden Sätzen zu dieser Fallstudie wurde gesagt, dass diese Episode unter anderem deshalb ausgewählt wurde, weil der Einsatz des konkreten Materials dem ersten Eindruck nach demjenigen der Gruppe N ähnelt (viele Zeigegesten und antizipierendes Arbeiten), sich aber auch schon Unterschiede andeuten (mehr Handlungen am Material als bei Gruppe N). Die ausführliche Analyse hat nun gezeigt, dass es zwar Parallelen gibt, die Rolle des Materials in den Lösungsprozessen der beiden Gruppen sich aber doch stark unterscheidet. Darauf werde ich in Kap. 9.2 noch genau eingehen.

7.3 Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander

In 7.1 wurde zu den Beiträgen <10> bis <13> bereits erörtert, dass nicht eindeutig festzumachen ist, inwiefern sich Peter auf Philipp bezieht (s. S. 142). Dieser Ausschnitt wird hier noch einmal wiedergebenen, da die Beobachtung symptomatisch für den Anfang der Episode (<3> – <14>) ist.

10	Peter	*schaut wieder auf sein Arbeitsblatt*
11	Philipp	Also, so *(öffnet zwei der drei weißen Boxen ein Stückchen)*, da müssen jetzt noch zwei Bohnen rein #, ne, damit immer *(zeigt abwechselnd auf die beiden Anordnungen)* gleich viel Bohnen sind, ja? *(wendet sich seinem Arbeitsblatt zu)*
12	Peter	# *schaut kurz zu der auf dem Tisch aufgebauten Boxensituation, dann wieder auf sein Arbeitsblatt*
13	Peter	Das heißt die Anzahl der Bohnen in den Boxen *(mehrere Wörter unverständlich)* #, ja *(wendet sich der auf dem Tisch aufgebauten Boxensituation zu, schaut kurz zu Paul)* Gut wir müssen hier jetzt noch *(bewegt seine rechte Hand in einer Greifhaltung über (vermutlich zwei?) einzelne Bohnen neben den schwarzen Boxen; nimmt die Hand wieder zurück und legt den Arm auf dem Tisch ab)* zwei Bohnen reinlegen *(deutet mit Daumen und Zeigefinger der linken Hand auf die beiden geöffneten weißen Boxen, ohne sie zu berühren; Daumen und Zeigefinger sind dabei gerade soweit gespreizt wie die beiden Boxen zusammen breit sind; berührt dann mit mehreren Fingern der linken Hand die geschlossene weiße Box; belässt die Hand an den weißen Boxen)*



Die Schüler richten ihre Aufmerksamkeit nie gleichzeitig auf dasselbe: sie schauen abwechselnd auf ihre Arbeitsblätter und äußern sich zur Aufgabe. Sie nehmen in ihren Beiträgen auch nicht direkt aufeinander Bezug, so dass unklar bleibt, inwiefern sie überhaupt Notiz von den Äußerungen des anderen nehmen.[1] Philipp bringt hartnäckig immer wieder seinen ersten Lösungsvorschlag vor (<2>, <4>, <11>) und fordert die anderen in den beiden wiederholenden Beiträgen durch Nachsätze indirekt zu Reaktionen auf, die aber zunächst ausbleiben, da Peter mit seinem Arbeitsblatt und Paul mit den verschütteten Bohnen beschäftigt sind. Während Peters oben wiedergegebenen Beitrags <13>, bei dem – wie dargestellt wurde – unklar ist, ob er als Reaktion gemeint ist, den Philipp aber als solche auffassen könnte, ist dann Philipps Aufmerksamkeit auf das Arbeitsblatt und nicht auf die aufgebaute Boxensituation und Peters Beitrag gerichtet. Man gewinnt insgesamt den Eindruck, dass die Schüler zunächst eher nebenein-

[1] Allein in der Passage zu den verschütteten Bohnen (<5> – <9>), die sich aber nicht mit der Aufgabe befasst, stellt sich dies anders dar.

anderher arbeiten (vgl. Naujok, Brandt & Krummheuer 2008, S. 793), auch wenn sie mit derselben Aufgabe beschäftigt sind, und letztlich offen bleibt, ob sie nicht ‚mit einem Ohr' die Äußerungen des anderen verfolgen.

Ab <15> richten zumindest Philipp und Peter ihre Aufmerksamkeit gemeinsam auf die auf dem Tisch aufgebaute Boxensituation. Dies begründet vermutlich, dass sie ab diesem Zeitpunkt schließlich doch zusammenarbeiten. Paul ist bis <25> nach wie vor mit den verschütteten Bohnen beschäftigt und tritt erst in <33> kurzfristig aktiv in die Interaktion ein. Beitrag <15> von Philipp (Berücksichtung der zweiten Bedingung zur Befüllung der Boxen) zeigt, dass bei der vorangegangenen Lektüre des Arbeitsblattes seine Situationsdefinition mit der zweiten Bedingung der Aufgabenstellung konfrontiert wurde. Zu Beginn des Beitrags wiederholt er Bedingung 2 des Aufgabentextes in leicht modifizierter Form („jeweils" wird zu „immer") und deutet in seiner Gestik deren Relevanz für ihren bisherigen Lösungsansatz an. Da Peter Philipps Beitrag abwartet, kann man <16> (Öffnen der dritten weißen Box) wohl als Reaktion auf <15> auffassen, auch wenn Peter vor Philipps Beitrag schon mit dieser dritten weißen Box befasst war. Peters Nachvollzug von Philipps Gedankengang in <19> kann als Reaktion auf Philipps Beitrag <15> und die nachgeschobene Vergewisserungsfrage in <17> angesehen werden. In diesen Beiträgen deutet sich also ein erstes Aufeinander-Bezug-Nehmen an. Eine tatsächliche Verschränkung der Beiträge ist ab <19> / <20> festzustellen. Peter und Philipp arbeiten dann gemeinsam an der Lösung der Aufgabe.

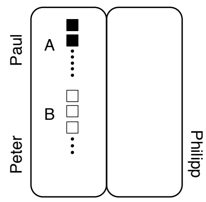
Im Folgenden werden die individuellen Verantwortlichkeiten für die Interaktion in dieser Episode genauer untersucht, um die Gestaltung des Lösungsprozesses noch genauer nachvollziehen zu können und einen Eindruck der individuellen Lernprozesse der Schüler zu erhalten. In der Episode treten nur einzelne Konfrontationen unterschiedlicher Situationsdefinitionen zu Tage. Sie werden – um Dopplungen in der Darstellung zu vermeiden – im Folgenden an den entsprechenden Stellen mitverhandelt.

Philipp übernimmt im Lösungsprozess die Führungsrolle. Er bestimmt das Geschehen nachhaltig durch seine inhaltlichen Beiträge – innovativer Kreator in <2> (erste Idee), <11> (Wiederholung der ersten Idee und Öffnen zweier weißer Boxen), <15> (Berücksichtung der zweiten Bedingung zur Befüllung der Boxen) und <22> (Ermittlung der ersten Lösung), die er zu Beginn mit einer gewissen Hartnäckigkeit immer wieder vortragen muss, bis sie Beachtung finden. Außerdem beschleunigt er z. T. das Tempo, indem er als assistierender Kreator Zwischenergebnisse (<19> – <22>) oder als ausführender Kreator den jeweils nächsten auszuführenden Schritt (<31>, <39>, <45>) nennt. Letzteres hat auch einen den Lösungsprozess strukturierenden Effekt. Interessanterweise möchte er sich dabei aber dennoch immer wieder bei seinen Mitschülern – insbesondere bei Peter – absichern (die Gültigkeit seiner Aussagen abschwächende Nachsätze in <4>, <11>, <17>, <27>). An Peter orientiert er sich darüber hinaus an zwei Stellen sogar in seiner Wortwahl: in <31> und <39> übernimmt er die zählende Sprechweise zur Benennung der Anzahl an Bohnen pro Box (<31>: „Und jetzt da eins, zwei *(zeigt auf die zweite weiße Box; . . .)*“).

Peter ist an der Gestaltung des Lösungsprozesses eindeutig beteiligt. Zu Beginn der Episode nimmt er sich aber die Zeit, die er benötigt, um die Aufgabenstellung eingehend zu studieren, und äußert sich noch nicht (abgesehen vom Vorlesen des ersten Teils der Aufgabenstellung in <1>). Er lässt sich nicht von Philipp hetzen, der bereits immer wieder einen ersten Lösungsvorschlag vorbringt. In <13> paraphrasiert er dann schließlich Philipps ersten Vorschlag, wobei jedoch, wie bereits erörtert wurde, nicht klar ist, ob er bewusst Philipps Vorschlag in seinen Worten wiedergibt, oder seine eigenen Überlegungen darstellt, Philipps Äußerungen also gar nicht wahrgenommen hat. In <19> beginnt Peter, Philipps Überlegungen aus <15> (Berücksichtung der zweiten Bedingung zur Befüllung der Boxen) zu paraphrasieren. Dieser Beitrag leitet die eigentliche Ermittlung der Lösung durch Philipp in <22> ein. Daran ist Peter mit imitierenden Beiträgen (<21>, <23>, <24>) sowie als assistierender Kreator (<21>) beteiligt.

In 8.1 wurden bereits Peters Reaktionen (<26> und <30> (s. S. 148, 149)) auf Philipps Äußerungen zu der für die weißen Boxen ermittelten Lösung (Ende von <22> und <27>) diskutiert:

22	Philipp	... und da *(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen)* kommen zwei mal dr *(am Ende leiser werdend und abbrechend)*
26	Peter	*(zeigt auf die weißen Boxen, nachfragend)* Da kommen zwei mal (.) # drei rein,
27	Philipp	# Ja, zwei mal drei rein. Drei *(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen)*, sechs *(hebt die Finger leicht von den Boxen an)*, neun *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)*. ## Und dann, fünf *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, sieben *(tippt mit dem Zeigefinger der rechten Hand vor der einen schwarzen Box auf den Tisch)*, neun *(tippt ein zweites Mal auf den Tisch, etwas weiter rechts als beim ersten Mal, (vielleicht vor der anderen schwarzen Box?))*. Ne, Peter?
28	Peter	## *nimmt sich den Bohnenvorrat, den Paul gerade wieder in die Box eingefüllt hat*
30	Peter	Eins, zwei *(füllt in die erste weiße Box zwei Bohnen und schließt die Box danach)*



Peter wird in <22> von Philipp mit einer Darstellung der Lösung konfrontiert, die den Hergang der Lösungsfindung berücksichtigt. Die von Philipp gewählte Formulierung ist aber missverständlich – insbesondere, wenn der Zuhörer davon ausgeht, dass die Anzahl der Bohnen pro Box genannt wird. Wie bereits festgehalten wurde, scheint Philipp mit seiner Formulierung zunächst sogar selbst Probleme zu haben (am Ende von <22>). Peter stellt Philipps Äußerung zur Befüllung der weißen Boxen in <26> traduzierend in Frage. Nach dessen diesbezüglicher Erläuterung, beginnt Peter in <30> die Boxen tatsächlich zu befüllen. Er beginnt mit einer weißen Box und füllt direkt zwei Bohnen ein. Auf diese Weise wendet er sich von der in Frage gestellten Sichtweise zur Befüllung der weißen Boxen ab und kehrt zum Blick auf die Anzahl der Bohnen pro Box zurück. Insofern hat dieser Beitrag einen über die Durchführung des Befüllens (ausführender Kreator) hinausgehenden Neuigkeitswert (innovativer Kreator). Der weitere Interaktionsverlauf zeigt, dass Philipp mit der üblichen Sichtweise auch zurecht kommt, und die Situationsdefinitionen sind damit wieder angeglichen.

An dieser Stelle soll noch festgehalten werden, dass Peter sowohl im eben verhandelten Beitrag <30> als Reaktion auf Philipps Nachfrage „Ne, Peter?“ aus <27> als auch in <19> als Reaktion auf das „Ne, Peter?“ aus <17> (s. o.) auf die Nachfragen durch nachvollziehende Beiträge reagiert und nicht einfach zustimmt. Für das tatsächliche Befüllen der Boxen mit Bohnen am Schluss der Episode zeigt sich Peter hauptverantwortlich und führt im Anschluss daran auch noch eine Überprüfung des Ergebnisses durch, obwohl Philipp schon fortfahren möchte. Abgesehen davon, dass Philipp sich durch Peters Vorstoß auch noch einmal von der Richtigkeit der Lösung überzeugen kann, hat diese Konfrontation der beiden Situationsdefinitionen aber keine Auswirkungen auf den kollektiven Lösungsprozess oder das individuelle Verständnis.

Paul ist durch sein Missgeschick in <5> bis mindestens zu Beitrag <25> abgelenkt und daher im Grunde nicht an der Lösungsaushandlung beteiligt. In seinem einzigen wirklich inhaltlichen Beitrag <33> ist er noch der Ansicht, dass jede weiße Box mit einer Bohne befüllt werden müsse, und zeigt seine Irritation über die augenblicklich ausgeführte Befüllung jeder Box mit zwei Bohnen. Peter nennt in <35> und <38> Begründungsfetzen, die Paul mit „Ah“ quittiert. Inwiefern Paul hier tatsächlich von der Konfrontation mit dem Befüllvorgang sowie den Begründungsbruchstücken für die Befüllung mit zwei Bohnen profitiert, bleibt völlig offen, da er sich nicht weiter äußert.

Welche Rolle spielt die Interaktion der Lernenden untereinander also für deren individuelle Lernprozesse? Philipp findet die Lösung im Grunde allein. Daher könnte man annehmen, dass er die Aufgabe auch in Einzelarbeit hätte erfolgreich bewältigen können. Allerdings könnte Peters unbeirrbares Lesen des Arbeitsblattes zu Beginn der Episode auch Philipp nach seinem ersten (unvollständigen) Lösungsansatz dazu gebracht haben, noch einmal auf das Arbeitsblatt zu schauen, so dass er die zweite Bedingung wahrnehmen konnte. Das hieße, dass für Philipp unter Umständen die mögliche, aber zu Beginn ausbleibende, Interaktion mit Peter und dessen Muße beim Lesen des Arbeitsblattes entscheidend für die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe waren, da er sich allein womöglich nicht mit der nötigen Ruhe dem Arbeitsblatt gewidmet hätte. Peters Beiträge deuten an, dass auch er das Lösungsverfahren durchdrungen hat, aber es lässt sich nur mutmaßen, dass er auch alleine – ohne Philipps vorpreschende Vorschläge – in seinem eigenen Tempo eine Lösung gefunden hätte.

Die Schüler scheinen sich im gemeinsamen Lösungsprozess weitgehend einig, die Konfrontation unterschiedlicher Situationsdefinitionen spielt in dieser Episode keine entscheidende Rolle – weder für die Entwicklung des kollektiven Lösungsprozesses noch für das Verständnis einzelner. Dies kann aber nicht allein der Tatsache geschuldet sein, dass Philipp die Führung übernimmt. Peter vollzieht nämlich Philipps Vorschläge immer wieder in seinem Tempo und auf seine Art und Weise nach, ist also eindeutig kein Trittbrettfahrer, der einer Lösung einfach zustimmt, ohne sich damit auseinander zu setzen (Brandt & Höck 2011, S. 255), was die Seltenheit der Konfrontation unterschiedlicher Situationsdefinitionen auch erklären würde. Die Episode ist ein Beispiel für Typ 2 der Kategorisierung von Ko-Konstruktionen in Gruppenarbeiten nach Howe (2009): „only 1 idea has to be considered“ (ebd., S. 218). Brandt und Höck (2011, S. 255) schreiben dazu: „Dieser Typ 2 tritt vor allem dann auf, wenn der Ansatz eines Lernpartners zum Gruppenprodukt wird (ebd., S. 217) ... Während Trittbrettfahrer einer Individuallösung als Gruppenlösung zustimmen, ohne sich damit erkennbar thematisch auseinanerzusetzen, wird in dem von ihr beschriebenen Typ 2 die eine Idee zum gemeinsam fokussierten Gesprächsthema“ (ebd. bezieht sich auf Howe 2009). Dieser Umstand und die Tatsache, dass die gemeinsame Lösungsfindung auch noch sehr glatt verläuft, begründet wohl, dass es nur so wenige Konfrontationen unterschiedlicher Situationsdefinitionen gibt.

Die Ablösung vom Konkreten ist in dieser Episode (noch) kein zentrales Thema, so dass sich die Rolle der Interaktion für diesen speziellen Prozess hier nicht beurteilen lässt.

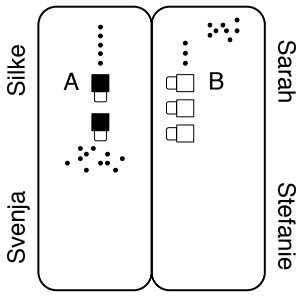
Kapitel 8

Das dritte Fallbeispiel: Gruppe S

Im dritten Fallbeispiel begleiten wir die Gruppe S bei ihrer Suche nach zwei weiteren Lösungen zu der in der Einstiegsaufgabe zu *Knack die Box* vorgegebenen Boxensituation, nachdem sie bereits die Lösung (2 | 2) ermittelt haben. Für diese Episode als weiteres Fallbeispiel spricht, dass die Schülerinnen zwar eine ähnliche Lösungsstrategie verfolgen wie Gruppe P, schon bei der Lösungssuche aber tatsächlich mit den Boxen und Bohnen agieren, also die Boxen mit Bohnen befüllen und diese dann immer wieder abzählen. Hierin zeigt sich eine weitere Variante des Materialgebrauchs, die im Vergleich mit den anderen beiden von großem Interesse sein könnte.

8.1 Rekonstruktion des Lösungsprozesses

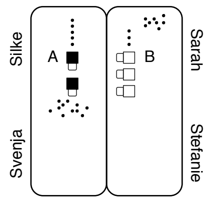
Die folgende Abbildung zeigt, wie die Schülerinnen der Gruppe S am Gruppentisch zusammensitzen, und wie sie die Boxensituation auf dem Tisch aufgebaut haben. Anordnung A liegt auf der Tischseite von Silke und Svenja, Anordnung B auf der Tischseite von Sarah und Stefanie (s. auch Beschriftung in der Abbildung). Die aufgereihten Bohnen gehören jeweils zu den Anordnungen, die verstreut liegenden Bohnen sollen die Vorräte darstellen, die die Mädchen auf die Tische ausgeleert haben. Die Anzahl der Bohnen in den Vorräten ist in dieser Darstellung willkürlich gewählt.



Was bisher geschah ...

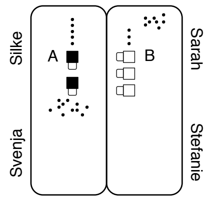
Nach Klärung der Aufgabenstellung mit der Beobachterin zählen die Schülerinnen die einzelnen Bohnen in den Anordnungen ab und ergänzen in zwei weißen Boxen je eine Bohne, so dass in beiden Anordnungen schon mal gleich viele Bohnen liegen (5). Im Anschluss daran fügt Silke wiederholt in beiden Anordnungen je eine Bohne zu, so dass die Gleichheit der Gesamt-Bohnenanzahlen stets erhalten bleibt. Dabei wechselt sie beim Befüllen der Reihe nach zwischen den Boxen einer Anordnung ab. Die erste mögliche Lösung (2 | 2) wird auf diese Weise handelnd erzeugt, von den Schülerinnen aber nicht bemerkt. Silke befüllt einfach weiter. Die Beobachterin fragt nach, ob die Schülerinnen denn immer im Blick hätten, wie viele Bohnen gerade in den beiden Anordnungen liegen. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich in den schwarzen Boxen und in zwei der drei weißen Boxen je drei Bohnen und in der dritten weißen Box zwei Bohnen. Die Schülerinnen ergänzen in der dritten weißen Box eine dritte Bohne, so dass die zweite Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt wird. Dann ermitteln sie die Gesamt-Bohnenanzahlen in beiden Anordnungen und stellen fest, dass diese nicht gleich sind. Die Beobachterin fragt daraufhin, wie es denn bei zwei Bohnen pro schwarzer und weißer Box war. Sie bemerken, dass sie das doch ausrechnen könnten, und Sarah ermittelt die Gesamt-Bohnenanzahlen, indem sie die gewünschten Befüllungen der Boxen antizipiert – zunächst für sich, dann erläutert sie noch einmal für die anderen:

> **Sarah**
> Bei zwei passt das, wenn da überall zwei Bohnen drin sind, passt das. Fünf liegen hier *(deutet mit den Fingern der rechten Hand auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen und bewegt die Hand mehrmals hin und her)*, sieben *(zeigt auf die eine schwarze Box)*, neun *(zeigt auf die andere schwarze Box)*, und dann drei *(setzt die Finger der rechten Hand oberhalb, den Daumen unterhalb der einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen auf und fährt die Bohnenreihe in Richtung der weißen Boxen entlang)*, fünf *(zeigt auf die von ihr aus betrachtet rechte weiße Box)*, sieben *(zeigt auf die mittlere weiße Box)*, neun *(zeigt auf die verbliebene weiße Box)*.



Die Schülerinnen nehmen aus jeder Box eine Bohne heraus, so dass die Lösung (2 | 2) in der konkreten Boxensituation realisiert wird. Bevor die Beobachterin den Gruppentisch verlässt, weist sie die Schülerinnen darauf hin, dass (2 | 2) *eine* Möglichkeit ist, und schlägt ihnen vor, dass sie die Boxen nach ihrer Methode weiter befüllen und stets überprüfen, ob sie eine Lösung gefunden haben, und diese dann aufschreiben. Die Schülerinnen legen in ihren Mappen Tabellen an und tragen das erste Ergebnis ein. Währenddessen kommt der Lehrer kurz zum Gruppentisch und lässt sich den Stand der Dinge berichten. Auch er weist noch einmal darauf hin, dass es vielleicht noch weitere Lösungen gibt. Silke wirft ein, dass es auch mit vier Bohnen pro Box weitergehen könnte, dass vielleicht die Zweierreihe hinter den Befüllungen stehen könnte. Sarah möchte diese Möglichkeit daraufhin sofort ausprobieren, wird zunächst aber von ihren Mitschülerinnen ausgebremst, die erst einmal die erste Lösung aufschreiben wollen. Einen kurzen Moment später ermittelt Sarah – während die anderen mit ihren Mappen beschäftigt sind – dann aber trotzdem leise für sich die Gesamt-Bohnenanzahlen in beiden Anordnungen – zwar nicht ganz korrekt, aber wieder rein antizipierend wie bei der ersten Lösung. Nachdem Silke ihre Arbeit an ihrer Tabelle abgeschlossen hat, probiert auch sie die Lösungsmöglichkeit (4 | 4) aus. Auch Silke geht hier rein antizipierend vor:

Silke
So, dann, eins, zwei, drei, vier, fünf *(zeigt nacheinander auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A)*, neun *(zeigt auf die eine schwarze Box, verharrt für 4 Sek. in dieser Position)*, 13 *(zeigt auf die andere schwarze Box)*. Eins, zwei, drei *(zeigt nacheinander auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B, verharrt für 2 Sek. auf die letzte Bohne zeigend)*, drei plus vier *(zeigt auf die von ihr aus gesehen linke weiße Box)* sind sieben, plus vier *(zeigt auf die mittlere weiße Box)* sind elf, plus vier *(zeigt auf die von ihr aus betrachtet rechte weiße Box)* sind (..) 15. Nee, das passt nicht.



Anschließend wird die Möglichkeit (3 | 3) überprüft. Dabei geht Silke dann wieder dazu über, die Boxen mit den Bohnen entsprechend zu befüllen. Stefanie merkt an, dass in schwarzen und weißen Boxen auch unterschiedlich viele Bohnen liegen könnten. Sie ermitteln dann aber zunächst doch für (3 | 3) die Gesamt-Bohnenanzahlen und stellen auch für diese Möglichkeit fest, dass es nicht passt. Da in Anordnung B aber nur eine Bohne zu viel ist, kommen sie auf die Idee, aus jeder weißen Box eine Bohne zu entfernen. Bevor sie auch aus den schwarzen Boxen je eine Bohne wegnehmen, fällt ihnen aber doch noch auf, dass sie so wieder zur Lösung (2 | 2) kommen würden. Aus den schwarzen Boxen nehmen sie die Bohnen daher dann erst gar nicht mehr weg.

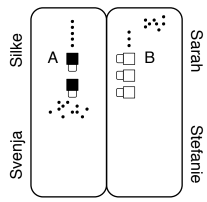
Im Vorfeld der Episode, die im Folgenden analysiert werden soll, hat sich im Laufe der eben dargestellten Überlegungen also der folgende Zustand der Boxensituation auf dem Tisch ergeben: die Boxen sind alle geöffnet (die Ausrichtung der Öffnung ist in der obigen Skizze durch die an die Kästchen angefügten Laschen angedeutet), in jeder schwarzen Box liegen drei und in jeder weißen Box zwei Bohnen (dies ist oben nicht dargestellt).

Um den Lösungsprozess der Schülerinnen besser nachvollziehbar darstellen zu können, wird in diesem Kapitel vor jeder Szene die aktuelle Befüllung der Boxen mit Bohnen in einer Tabelle angegeben (mit s: Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box, w: Anzahl der Bohnen pro weißer Box). Vor Beginn von Szene 1 sieht diese Tabelle wie folgt aus:

s	3
w	2

Szene 1: Ergänzung zu je vier Bohnen in jeder schwarzen Box

1	Silke	Aber jetzt will ich mal probieren, ob das auch mit, mit, # wenn man überall, wenn man da, das hier sind *(greift nach Bohnen aus dem Vorrat)*
2	Stefanie	# *nimmt (eine) Bohne(n) aus dem Vorrat*
3	Stefanie	Hier sind jetzt überall zwei drin, ne? *(zeigt auf die weißen Boxen)*
4	Silke	Ja,
5	Stefanie	Und dann tu mal da # *(legt in die eine schwarze Box eine Bohne)* jeweils ein rein *(deutet auf die andere schwarze Box)*,
6	Sarah	# *nimmt die mittlere der einzelnen Bohnen aus Anordnung A weg und legt sie zu dem vor ihr liegenden Teil des Bohnenvorrats*
7	Silke	*legt in die andere schwarze Box eine Bohne*
8	Stefanie	Dann sind da? *(deutet immer noch auf die schwarze Box (s. Ende von <5>) – oder auf Anordnung A?)*
9	Silke	*(hebt die schwarzen Boxen etwas an, hält sie schräg zu sich und schaut hinein; zuerst die, in die sie eine Bohne gelegt hat)* Vier drin.
10	Stefanie	# Und insgesamt *(zeigt auf Anordnung A)* neun, ne?
11	Sarah	# *schiebt eine andere Bohne aus ihrem Vorrat zu den einzelnen Bohnen in Anordnung A; auf den Platz der Bohne, die sie vorher weggenommen hat*
12	Silke	*(zeigt nacheinander auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A)* Eins, zwei, drei, vier, fünf, *(zeigt auf die mittlere Bohne und sagt zu Sarah)* war der schon da?
13	Svenja	Mach doch ganz einfach *(nimmt (eine) Bohne(n) aus dem Vorrat, steht auf und beugt sich über den Tisch)*, [hör mal] tu doch da auch einfach vier rein *(schaut nacheinander in die weißen Boxen)* und guck dann.
14	Sarah	*(mehrere Wörter unverständlich)* die war'n so schrumpelig *(zeigt Silke eine Bohne aus ihrem Vorrat)*
15	Stefanie	Oh, nee
16	Silke	Das sind neun, plus [mmm] *(zeigt mit ihrem Stift auf die von ihr aus betrachtet rechte schwarze Box)* sind 13, ne? Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs *(zeigt nacheinander mit ihrem Stift erst auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B, dann auf die weißen Boxen)* sind 12.



Silke leitet zu Beginn dieser Episode einen neuen Lösungsversuch ein: sie nimmt Bohnen aus dem Vorrat, macht aber lediglich mehrere Formulierungsansätze zur Nennung einer neuen Befüllungszahl und wird nicht konkret (<1>). Es ist Stefanie, die dann tatsächlich eine Befüllung vorschlägt (<5>), nachdem sie auch schon eine oder mehrere Bohnen aus dem Vorrat gegriffen (<2>) und sich über die Befüllung der weißen Boxen bei Silke vergewissert hat (<3>, <4>). Sie schlägt vor, in jeder schwarzen Box eine Bohne zu ergänzen, und setzt dies bei einer Box auch direkt um. Silke legt in die andere schwarze Box eine Bohne (<7>). Stefanies Äußerung <5> muss in zweierlei Hinsicht genauer angesehen werden: zum einen fordert der Wortlaut ihrer Formulierung eigentlich Silke auf, die Bohnen zu ergänzen (<5>: „Und dann tu mal da ...“), Stefanie legt dann aber sofort selbst eine Bohne in eine schwarze Box. Es ist vorstellbar, dass die gewählte Formulierung gar nicht als Aufforderung an Silke gemeint ist, sondern Stefanie mit diesen sehr einfachen Worten lediglich ihren Vorschlag zum Ausdruck bringen möchte, und es ihr nicht darauf ankommt, dass Silke diesen umsetzt. Oder sie entscheidet beim Sprechen und Auf-die-Box-Zeigen spontan, dass sie eigentlich auch gleich selbst eine Bohne einfüllen könnte, da sie eine in der Hand hat. Zum anderen ist es interessant, dass sie bei der vorab gegebenen Befüllung der Boxen (3 | 2) vorschlägt, in den schwarzen Boxen Bohnen zu ergänzen, da in der Anordnung mit den schwarzen Boxen eigentlich ohnehin schon mehr Bohnen liegen. Dafür gibt es verschiedene plausible Erklärungen: sie könnte vermeiden wollen, wieder die Befüllung (3 | 3) zu erzeugen, die sie vorab schon verworfen haben, oder sie könnte einfach etwas ausprobieren wollen, ohne genau im Kopf zu haben, wie viele Bohnen gerade in den beiden Anordnungen liegen. Außerdem macht es Sinn, nach einem Gleichstand direkt jeweils zwei Bohnen in den schwarzen Boxen zu ergänzen, da in Anordnung B mindestens drei Bohnen ergänzt werden müssen (wegen drei weißer Boxen), und man mit der Ergänzung von insgesamt zwei Bohnen in Anordnung A demnach darunter läge. Verfolgt man diesen Gedankengang weiter, wird auch klar, dass man von einem gefundenen Ergebnis ausgehend die nächste Lösung erzeugt, indem man in beiden Anordnungen jeweils sechs Bohnen zufügt, pro schwarzer Box also drei Bohnen und pro weißer Box zwei Bohnen. Es gibt in der Szene aber keine Anhaltspunkte dafür, dass Stefanie hier soweit denkt. Insofern erscheinen die beiden ersten Hypothesen plausibler.

Sarah hat unterdessen (<6>) aus Anordnung A die mittlere der einzelnen Bohnen neben den Boxen entfernt und zu dem vor ihr liegenden Bohnenvorrat gelegt. Betrachtet man diese Aktion im Zusammenhang mit ihren späteren Beiträgen <11> und <14>, so wird deutlich dass sie die Bohne entfernt, um sie durch eine schönere – weniger ‚schrumpelige' – auszutauschen. Ihre Mitschülerinnen reagieren auf das Wegnehmen der Bohne zunächst nicht. Erst das Zufügen der neuen Bohne scheint zumindest Silkes Aufmerksamkeit zu erregen, da sie sich in <12> nach dem Abzählen der einzelnen Bohnen in Anordnung A bei Sarah vergewissert, ob die fragliche Bohne tatsächlich zur Anordnung gehört. Die Begründung, die Sarah daraufhin gibt (<14>), stößt bei Stefanie auf wenig Gegenliebe (<15>).

Kehren wir zum themenzentrierten Handlungsstrang zurück. Nachdem in beiden schwarzen Boxen je eine Bohne ergänzt wurde, fragt Stefanie in <8>: „Dann sind da?". Es ist nicht zu erkennen, ob sie dabei immer noch auf die schwarze Box vom Ende des Beitrags <5> oder auf die gesamte Anordnung A zeigt. Für die Interpretation des Gesagten ist die Referenz der Geste aber entscheidend: bezieht sie sich gestisch nur auf die schwarze Box, möchte sie vermutlich erfragen, wie viele Bohnen nun in dieser Box (bzw. in jeder schwarzen Box) liegen. Deutet sie hingegen allgemein auf Anordnung A, möchte sie wahrscheinlich wissen, wie groß die Gesamt-Bohnenanzahl in Anordnung A ist. Silke bezieht Stefanies Frage auf den Inhalt der schwarzen Boxen und gibt ihr nach Überprüfung entsprechende Auskunft (<9>). Stefanie erwidert daraufhin in <10>: „Und insgesamt *(zeigt auf Anordnung A)* neun, ne?". Aufgrund der Nachfrage lässt sich aber nicht schlussfolgern, dass sie sich auch vorher eigentlich schon für die Gesamt-Bohnenanzahl in Anordnung A interessierte. Es ist nämlich auch durchaus denkbar, dass sie zuerst nach der Anzahl der Bohnen pro Box und dann nach der Gesamt-Bohnenanzahl fragt. Dies muss hier also offen bleiben. Die von ihr in ihrer Frage angegebene Gesamt-Bohnenanzahl (9) ist nicht korrekt. Stefanie muss sich entweder verrechnet haben, oder Silkes Angabe aus <9> auf beide schwarzen Boxen zusammen bezogen haben. Silke ermittelt auf Stefanies Frage hin die richtige Gesamt-Bohnenanzahl in Anordnung A, indem sie zunächst die einzelnen Bohnen der Anordnung abzählt (<12>) und im Anschluss zweimal vier dazu addiert (<16>). Bei der zweiten Addition zeigt sie mit ihrem Stift auf die von ihr aus betrachtet rechte schwarze Box. Die Geste liefert den sprachlich lediglich durch ein überlegendes „mmm“ bezeichneten Summanden. Silke schiebt ihrer Berechnung zwar ein fragendes ‚ne‘ nach, wartet aber keine Antwort ab, sondern geht direkt zu Anordnung B über. Das deutet darauf hin, dass sie nicht tatsächlich unsicher ist, sondern das ‚ne‘ in einem rhetorischen Sinne gebraucht.

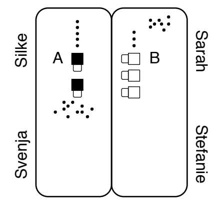
Die Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung B gelingt Silke hier nicht: sie zählt alle Anordnung B konstituierenden Objekte (drei einzelne Bohnen und drei weiße Boxen) einfach ab und multipliziert die erhaltene Anzahl (6) mit zwei (aktuelle Anzahl der Bohnen pro weißer Box). Offenbar behandelt sie also auch die einzelnen Bohnen wie die Boxen – also so, als ob sie jeweils zwei Bohnen enthielten. Da sie für Anordnung A die Gesamt-Bohnenanzahl mit Sachverstand bestimmt hat, unterstellen wir ihr hinter diesem falschen Vorgehen keine irgendwie geartete Intention, sondern gehen davon aus, dass sie hier schlicht aufgrund von fehlender Konzentration falsch zählt bzw. rechnet. Der Fehler fällt Silkes Mitschülerinnen nicht auf, in Szene 2 wird mit diesem Ergebnis weitergearbeitet.

Svenja hat in dieser Szene nur einen aktiven Beitrag (<13>). Darin schlägt sie vor, auch in die weißen Boxen jeweils vier Bohnen einzufüllen und dann zu prüfen, wie viele Bohnen sich in beiden Anordnungen befinden. Sie geht nicht explizit auf den laufenden Lösungsprozess ihrer Mitschülerinnen ein. Lediglich die Formulierung „Mach doch ganz einfach“ könnte andeuten, dass ihr dieser eher kompliziert vorkommt. In der Gegenrichtung erfolgt auch keine Bezugnahme auf Svenjas Beitrag. Ihr Vorschlag steht also für sich im Raum.

s	4
w	2

Szene 2: Ergänzung zu je drei Bohnen in jeder weißen Box und vermeintliche Realisierung einer zweiten Lösung durch Ergänzung zu je fünf Bohnen in jeder schwarzen Box

17	Sarah	*tauscht eine weitere einzelne Bohne aus Anordnung A gegen eine andere aus ihrem Vorrat aus*
18	Silke	Mann #, Sarah
19	Stefanie	# Mann, Sarah. ## Zwölf *(zeigt mit der Hand auf die von ihr aus betrachtet rechte weiße Box)*, 13 *(legt eine Bohne in diese weiße Box)*, 14 *(legt eine Bohne in die mittlere weiße Box)*, *(nimmt eine weitere Bohne aus dem Vorrat und legt sie in die verbliebene weiße Box)* 15, dann sind hier *(hält ihre geöffnete Hand über Anordnung B)* 15, ne?
20	Sarah	## Ich vertausch die doch nur.
21	Silke	Ja.
22	Stefanie	Und da? *(zeigt mit dem Finger auf Anordnung A)*
23	Silke	Das sind eins, zwei, drei, vier, fünf # *(zeigt nacheinander mit dem Stift auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A)*, *(zeigt erst auf die von ihr aus gesehen linke schwarze Box in Anordnung A, hebt sie dann kurz an)* vier im Sinn, sind neun, *(hebt die andere schwarze Box kurz an)* sind 13 (..)
24	Stefanie	# *greift nach Bohnen aus dem Vorrat*
25	Stefanie	13
26		*Stefanie, Svenja und Silke reden plötzlich alle durcheinander (unverständlich); Silke greift nach Bohnen aus dem Vorrat; Stefanie legt eine Bohne in die eine schwarze Box und bewegt ihre Hand dann in Richtung der anderen, in diese hat Svenja dann aber schon eine Bohne gelegt*



Sarah ist in dieser Szene wohl weiterhin mit dem Ästhetischen befasst: in <17> tauscht sie eine weitere einzelne Bohne aus Anordnung A gegen eine andere aus ihrem Vorrat aus, und man kann davon ausgehen, dass sie dies aus gleichem Grund wie bei der ersten Bohne macht. Diesmal stößt sie sofort auf Unverständnis bei Silke und Stefanie (<18>, <19>: „Mann, Sarah") – die Schülerinnen fühlen sich offenbar in ihrer Arbeit durch Sarahs Bohnen-Austausch-Aktionen gestört. Den Unmut ihrer Mitschülerinnen kann Sarah im Gegenzug nicht nachvollziehen, da sie keine Veränderung an der Boxensituation vornimmt (<20>: „Ich vertausch die doch nur.“).

Stefanie kehrt nach der Bekundung ihres Missfallens direkt zur Sache zurück (<19>). Sie wiederholt die von Silke am Ende von Szene 1 ermittelte (aber falsche!) Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung B (12) – der Bezug zu Anordnung B wird durch ihre Geste hergestellt. Anschließend legt sie in die drei weißen Boxen nacheinander jeweils eine Bohne und nennt bei jedem Befüllvorgang die neue Gesamt-Bohnenanzahl. Zum Schluss fasst sie noch einmal zusammen: „dann sind hier *(hält ihre geöffnete Hand über Anordnung B)* 15, ne?“. Nachdem sie von Silke die gewünschte Bestätigung erhalten hat (<21>), wendet sie sich wieder Anordnung A zu und fragt noch einmal nach der darin befindlichen Gesamt-Bohnenanzahl (<22>). Silke ermittelt diese daraufhin erneut (vgl. <12> und <16> in Szene 1). Dabei geht sie ähnlich vor wie beim ersten Durchgang, wobei sie diesmal die vier Bohnen aus der von ihr aus gesehen linken schwarzen Box auch sprachlich erwähnt („vier im Sinn“), zur anderen schwarzen Box aber wieder nichts sagt. In Szene 1 ersetzte eine Zeigegeste auf die von ihr aus gesehen rechte schwarze Box die Nennung des zweiten Summanden vier, hier hebt Silke die Box stattdessen etwas an. Es ist erstaunlich, dass die Schülerinnen die Gesamt-Bohnenanzahl in Anordnung A beide nicht behalten haben (bzw. sich zumindest nicht mehr sicher sind), da Silke diese nur wenige Beiträge vorab ermittelt und Stefanie zudem in <19> auch noch (zumindest scheinbar) absichtsvoll die weißen Boxen aufgefüllt hat. Tatsächlich absichtsvoll kann dies auch nur dann gewesen sein, wenn sie sich über die Befüllung der schwarzen Boxen im Klaren war. Denkbar wäre es allerdings, dass Stefanie durch Sarahs Vertauschen der Bohnen soweit abgelenkt wurde, dass sie zwar noch behalten hat, dass in Anordnung B weniger Bohnen liegen und dort deshalb aufgefüllt werden muss, sich die genauen Zahlen aber nicht gemerkt hat.

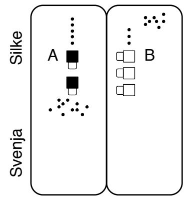
Stefanie wiederholt noch einmal die Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung A (<25>). Anschließend haben sie selbst, Svenja und Silke offenbar ein gemeinsames Aha-Erlebnis: alle reden durcheinander, so dass nichts mehr zu verstehen ist. Aus ihren Handlungen lässt sich aber wohl ihre Einsicht rekonstruieren. Stefanie und Svenja legen nämlich je eine Bohne in je eine schwarze Box, und auch Silke greift nach Bohnen aus dem Vorrat. Ihnen ist offenbar klar geworden, dass sie durch Hinzufügen von zwei Bohnen in Anordnung A dort (auch) auf 15 Bohnen kommen können, womit eine zweite Lösung gefunden wäre – lägen in Anordnung B tatsächlich 15 Bohnen. Dies könnte die plötzliche Aufgeregtheit der Schülerinnen erklären.

s	5
w	3

Szene 3: Überprüfung der vermeintlich richtigen Befüllungen und daraus resultierende Ermittlung der tatsächlichen Lösung (5 | 4)

27	Silke	*(bewegt ihre Hand zu den schwarzen Boxen)* Nein, dann kann man hier *(bewegt ihre Hand zu sich und legt zwei Bohnen auf ihr Heft)*, warte wie viel hast *(schaut in die von ihr aus betrachtet linke schwarze Box)*
28	Svenja	Haben wir doch schon,
29	Sarah	*tauscht eine einzelne Bohne aus Anordnung B durch eine aus ihrem Vorrat aus*
30	Silke	# Dann muss hier *(schaut in die von ihr aus gesehen rechte schwarze Box)* Ja dann sind jetzt fünf *(zeigt auf diese schwarze Box)*, fünf *(zeigt auf die andere schwarze Box)*, fünf *(zeigt auf die einzelnen Bohnen aus Anordnung A)* sind 15, *(bewegt ihre Hand zu Anordnung B)* eins, zwei, drei *(zeigt nacheinander auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*, vier, fünf, sechs *(zeigt nacheinander auf die weißen Boxen)*, sechs mal *(kippt die von ihr aus betrachtet linke weiße Box zu sich und hebt sie ein bisschen hoch)*, nein, warte mal *(stellt die Box wieder ab)*, ## drei mal zwei sind sechs *(deutet dabei im Rhythmus ihrer Worte auf Anordnung B)*, *(hebt nochmals die gleiche weiße Box hoch, kippt sie in ihre Richtung und schaut hinein)* boah noch mal
31	Stefanie	# Boah, Sarah, lass die doch jetzt mal so liegen
32	Stefanie	*## hebt die mittlere weiße Box kurz an, schaut hinein und stellt sie wieder ab*
33	Stefanie	Drei mal drei sind neun *(hebt dabei die von ihr aus gesehen linke weiße Box hoch, kippt sie zur anderen Tischseite – die darin liegenden Bohnen rutschen dadurch in den offenen Teil der Box – und stellt sie wieder ab)*

34	Silke	Warte, wo hast denn Du jetzt überall # drei rein getan *(schaut zuerst in die mittlere, dann in die von ihr aus gesehen rechte weiße Box, die Stefanie gerade hochgehoben hatte)*, nee, hier sind nur zwei drin *(schaut nochmal in die von ihr aus betrachtet linke weiße Box)*, ah nee, auch drei
35	Stefanie	# *nachdem Silke sie wieder abgestellt hat, schaut auch Stefanie in die mittlere weiße Box*
36	Stefanie	# Drei, drei, neun *(zeigt nacheinander auf die weißen Boxen)*, ## 12.
37	Sarah	# In den [ganzen] Schachteln müssen auch überall gleich viele sein *(zeigt auf Anordnung B)*.
38	Silke	## 12 *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*.
39	Stefanie	Na, nur von *(zeigt mit zwei Fingern der rechten Hand auf die weißen Boxen)*
40	Silke	12,
41	Stefanie	Und das? *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*
42	Silke	*(greift nach Bohnen aus dem Vorrat)* Dann musst Du hier überall noch einen reintun *(bewegt ihre Hand zu einer weißen Box)*
43	Stefanie	Nein, nein, hier sind doch noch *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*
44	Silke	*(legt die Bohnen wieder zum Vorrat)* Ja, # hab ich dazu gerechnet,
45	Stefanie	# *(greift nach Bohnen aus dem Vorrat)* Ja, dann tu mal eins, zwei *(legt in zwei der drei weißen Boxen eine Bohne dazu)*, *(nimmt noch eine Bohne aus dem Vorrat und legt sie in die verbliebene weiße Box)* drei *(deutet anschließend mit der Hand mehrere Punkte in die Luft setzend entlang der Anordnungen; es ist nicht zu erkennen, ob entlang Anordnung A oder B)*
46	Silke	Und hier sind auch *(schaut in eine der schwarzen Boxen)*
47	Stefanie	15
48	Silke	Sind fünf und fünf *(berührt nacheinander die beiden schwarzen Boxen)*, 15 *(deutet mit der Hand auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A; wendet sich anschließend ihrem Heft zu)*
49	Stefanie	Dann sind fünf und vier *(schaut in eine weiße Box)*, *(wendet sich ihrem Heft, dann Silke zu)* also oben sind fünf, in den schwarzen,
50	Silke	*schreibt in ihr Heft*



Silke wollte offenbar die Bohnen, die sie am Ende von Szene 2 aus dem Vorrat genommen hat, auch in die schwarzen Boxen füllen, kommt aber zu spät (<27>). Dass sie die zwei Bohnen, die sie in die Hand genommen hatte, dabei tatsächlich in die *zwei* schwarzen Boxen legen wollte und nicht beide in eine, kann man nur vermuten, ist aber aufgrund des weiteren Interaktionsverlaufs plausibel. Ihr „Nein" zu Beginn des Beitrags sowie das „warte, wie viel hast Du" und der Blick in die von ihr aus betrachtet linke schwarze Box deuten darauf hin, dass sie den Eindruck hat, bei der Befüllung durch ihre Mitschülerinnen sei etwas falsch gelaufen. Svenja nimmt wahr, dass Silke eigentlich Bohnen in die Boxen legen wollte, und entgegnet: „Haben wir doch schon,". In <30> fährt Silke mit ihrer Überprüfung fort („Dann muss hier *(schaut in die von ihr aus gesehen rechte schwarze Box)*") und ist dann doch mit der vorgefundenen Befüllung einverstanden: „Ja dann sind jetzt fünf *(zeigt auf diese schwarze Box)*, fünf *(zeigt auf die andere schwarze Box)* . . . ". Von ihrer Zustimmung leitet sie sofort zur Überprüfung der Richtigkeit der gewählten Befüllungen über. Wie in Szene 1 gelingt ihr die Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung A (15), während ihr Anordnung B Probleme bereitet. Dort zählt sie erneut zunächst alle die Anordnung konstituierenden Objekte (drei einzelne Bohnen und drei weiße Boxen) einfach ab und setzt auch wieder dazu an, die erhaltene Anzahl (6) mit der aktuellen Anzahl an Bohnen pro weißer Box zu multiplizieren, wobei der zweite Faktor lediglich auf der Handlungsebene angegeben wird („sechs mal *(kippt die von ihr aus betrachtet linke weiße Box zu sich und hebt sie ein bisschen hoch)*"). Dabei wird ihr ihr Fehler aber offenbar bewusst („nein, warte mal *(stellt die Box wieder ab)*"). Der zweite Versuch bezogen auf Anordnung B („drei mal zwei sind sechs *(deutet dabei im Rhythmus ihrer Worte auf Anordnung B)*") ist ebenfalls fehlerhaft. Hier berücksichtigt sie wohl, dass es nur drei und nicht sechs weiße Boxen gibt, arbeitet aber mit einer falschen (nicht mehr aktuellen) Anzahl an Bohnen pro weißer Box. Dies wird ihr selbst bewusst und frustriert sie („boah noch mal"). Die Bezüge zu den Anordnungen werden in diesem Beitrag ausschließlich durch ihre Gesten und Handlungen hergestellt.

Sarah hat in der Zwischenzeit eine weitere Bohne aus der Boxensituation (diesmal eine einzelne Bohne aus Anordnung B) durch eine aus dem Vorrat ersetzt (<29>) und dafür einen Tadel von Stefanie bekommen (<31>). Während sich Sarah offenbar also weiterhin mit den ‚schönen' Bohnen befasst, ist Stefanie nach wie vor auch am themenzentrierten Handlungsstrang beteiligt. Während Silkes Ringens mit der Bohnenanzahl-Bestimmung für Anordnung B hat sie in die mittlere weiße Box geschaut – vermutlich um die Anzahl der Bohnen in dieser weißen Box (vielleicht auch stellvertretend pro weißer Box) festzustellen (<32>). Nachdem Silke dann ihrer Frustration über ihre Schwierigkeiten bei der Bohnenanzahl-Bestimmung Luft gemacht hat (Ende von <30>, s. o.), berechnet Stefanie nun offenbar durch Multiplikation die Anzahl der Bohnen in allen drei weißen Boxen zusammen (<33>: „Drei mal drei sind neun"), wobei sie in die von ihr aus gesehen linke weiße Box schaut.

Silke erscheint in <34> durch Stefanies Beitrag <33> irritiert: es wundert sie wohl, dass in allen drei weißen Boxen angeblich jeweils drei Bohnen liegen sollen. Sie überprüft die Befüllungen der weißen Boxen und befindet bezüglich der von ihr aus betrachtet linken Box: „nee, hier sind nur zwei drin *(schaut noch mal in die von ihr aus betrachtet linke weiße Box)*, ah nee, auch drei". In <30> hatte sie lediglich in diese weiße Box einen Blick geworfen. Es ist denkbar, dass sie dabei, und auch nun wieder, zunächst nur zwei Bohnen gesehen hat. Dies würde auch erklären, warum sie gegen Ende von <30> mit der falschen, nicht mehr aktuellen, Bohnenanzahl gerechnet hat. Allerdings hatten wir angenommen, dass ihr der Fehler ganz am Ende von <30> noch selbst bewusst geworden ist (durch einen weiteren Blick in die Box) und zu ihrer Frustration geführt hat. Da sie hier zudem zuerst in die anderen beiden Boxen schaut, ist es plausibler, dass ihre Verwunderung eigentlich den anderen beiden Boxen gilt, auch wenn sie sich zu der von ihr aus gesehen linken kritisch äußert, als dass ihr die Befüllung letzterer schon wieder entfallen ist.

Stefanie lässt sich durch Silkes Einwurf dazu veranlassen, auch noch einmal die Anzahl der Bohnen in der mittleren weißen Box zu überprüfen (<35>). An Silkes Beitrag anschließend bestimmt sie erneut die Anzahl der Bohnen in allen drei weißen Boxen zusammen (<36>): sie zeigt nacheinander auf zwei weiße Boxen und nennt jeweils die darin befindliche Bohnenanzahl (3), dann auf die verbliebene weiße Box und nennt die Gesamt-Bohnenanzahl für alle drei weißen Boxen (9) – zur letzten Box wechselt sie also quasi zu einem additiven Abzählen. Zum Schluss nennt sie die Zahl Zwölf. Sie macht die Bedeutung dieser Zahl für ihre Äußerung weder gestisch noch verbal deutlich. Da neben den weißen Boxen drei einzelne Bohnen liegen, ist es aber naheliegend, dass sie mit dieser Zahl die Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung B benennt und den additiven Abzählprozess fortsetzt. In die Nennung der Zahl Zwölf stimmt auch Silke mit ein (<38>). Sie zeigt dabei auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B, stellt also gestisch eine Beziehung zur Boxensituation her.

Sarah kommentiert in <37>, dass in allen Boxen gleich viele Bohnen liegen müssen und zeigt auf Anordnung B. Ob sie alle Boxen einer Farbe (u. U. speziell alle weißen Boxen) oder alle Boxen der betrachteten Situation meint, ist daran nicht eindeutig zu festzumachen. Allerdings spricht ihre Geste eher dafür, dass sie über die Boxen einer Farbe (vielleicht auch nur über die weißen Boxen) spricht. Zudem geht es auch im Kontext dieses Beitrags um die Befüllungen der weißen Boxen, so dass eine solche Deutung plausibel ist. Stefanie setzt in <39> vermutlich zu einer Reaktion auf Sarahs Bemerkung an, die sie aber nicht ausführt. Ihre Satzfetzen lassen sich jedoch dahingehend deuten, dass sie Sarahs Aussage eher auf alle Boxen bezogen versteht und dies ablehnt („Na, nur“ im Sinne von ‚Nein, nur‘). Da es im Vorfeld dieser Episode ebenfalls Stefanie war, die darauf aufmerksam gemacht hat, dass in schwarzen und weißen Boxen unterschiedlich viele Bohnen liegen dürfen (vgl. S. 172), wäre es plausibel, dass sie sich hier bemüßigt fühlt, dies zu wiederholen, wenn sie Sarahs Aussage auf alle Boxen bezieht.

Silke wiederholt in <40> die Zahl Zwölf, also die aktuelle Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung B. Daraufhin fragt Stefanie (<41>): „Und das? *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*“. Ihre Frage legt die Vermutung nahe, dass sie der Meinung ist, die drei einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen müssten noch dazu gezählt werden. Diese Hypothese bestätigt sich in <43>. Dort lehnt sie Silkes Vorschlag aus <42> ab, in jede weiße Box noch eine Bohne zu legen, und verweist erneut auf die Bohnen neben den weißen Boxen. Silke entgegnet in <44>: „Ja, habe ich dazu gerechnet,“, legt aber die Bohnen, die sie bereits in <42> aus dem Vorrat gegriffen hat, trotzdem wieder zurück. Ob sich Stefanie in <36> verrechnet hat, so dass sie der Überzeugung war, dass die von ihr genannte Zahl Zwölf die Anzahl der Bohnen in den drei weißen Boxen beziffert, oder ob sie sich lediglich in <41> / <43> irrt und meint, die einzelnen Bohnen noch nicht berücksichtigt zu haben, wird nicht klar. Nach Silkes Versicherung in <44>, diese Bohnen bereits „dazu gerechnet“ zu haben, ist Stefanie jedenfalls überzeugt und greift nach Bohnen aus dem Vorrat (<45>). Sie fordert verbal zwar eigentlich Silke auf, entsprechend Bohnen in den Boxen zu ergänzen („Ja, dann tu mal“), legt sie aber direkt selbst in die Boxen. Dies ist vergleichbar mit Beitrag <5> aus Szene 1, bei dem Stefanie ebenfalls einen Vorschlag als Aufforderung formuliert hat, und diesen sofort selbst umgesetzt hat (vgl. S. 174). Die dort diskutierte Hypothese, dass sie den Aufforderungssatz lediglich der einfachen Formulierung wegen verwendet, wird durch diese neue Stelle unterstützt.

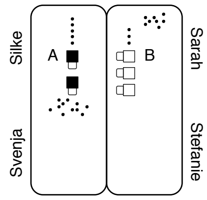
Nachdem Stefanie die Bohnen in die weißen Boxen gelegt hat, deutet sie mit der Hand entlang der Anordnungen und setzt dabei einige Punkte in die Luft (weiterhin <45>). Es ist zwar nicht zu erkennen, mit welcher Anordnung sie sich gerade beschäftigt, es lässt sich aber mutmaßen, dass sie für zumindest eine der Anordnungen noch einmal die Gesamt-Bohnenanzahl bestimmt. Silke wendet sich in <46> jedenfalls wieder Anordnung A zu: „Und hier sind auch *(schaut in eine der schwarzen Boxen)*“. Durch ihren Blick in die schwarze Box überprüft sie vermutlich noch einmal deren Befüllung. Aufgrund der Anfügung des Wortes ‚auch‘ kann man aber vermuten, dass sie eine Aussage über die Gesamt-Bohnenanzahl machen möchte. Bezogen auf die Befüllung der Boxen wäre das ‚auch‘ nämlich nicht korrekt. Ob sich Stefanies Nennung der Zahl 15 in <47> an Silkes Äußerung anschließt, oder ob Stefanie hier das Ergebnis ihrer Überlegungen aus <45> verkündet – welches sich auch auf Anordnung B beziehen könnte –, wissen wir nicht. Silke rekapituliert in <48> den Zustand von Anordnung A, indem sie die Bohnenanzahlen für beide Boxen nennt und auf die Boxen zeigt, und abschließend auf die einzelnen Bohnen neben den Boxen deutet und die Gesamt-Bohnenanzahl für diese Anordnung nennt. Danach wendet sie sich ihrem Heft zu. Stefanie fasst dann noch einmal die gefundene Lösung zusammen (<49>): „Dann sind fünf und vier“, wobei sie in eine weiße Box schaut – vermutlich um sich noch einmal zu vergewissern. Auch sie wendet sich danach zunächst ihrem Heft zu, entscheidet sich dann aber dafür, die Nennung der Lösung weiter zu spezifizieren. Sie richtet sich an Silke und sagt: „also oben sind fünf, in den schwarzen,“. Das ortsbestimmende Adverb ‚oben‘ bezieht sich dabei vermutlich auf die Tabelle auf dem Aufgabenblatt bzw. in ihren Heften, da es nun ja um das Eintragen des Ergebnisses geht. Denkbar wäre aber auch, dass sie von ‚oben‘ spricht, da Anordnung A in der auf dem Tisch liegenden Boxensituation von ihr aus gesehen oben liegt. Ihr Nachsatz „in den schwarzen“ trägt in jedem Fall zur besseren Verständlichkeit bei, was vielleicht auch der Grund dafür ist, dass sie ihn anfügt. Die Episode endet damit, dass Silke beginnt, in ihr Heft zu schreiben.

s	5
w	4

Szene 4: Feststellung, dass Boxen unterschiedlicher Farbe mit verschiedenen Anzahlen an Bohnen befüllt sein dürfen

51	Svenja	Ach, das muss nicht immer gleich sein?
52	Stefanie	*(fasst sich mit der Hand vor die Stirn)* Ooh.
53	Silke	*(ein oder zwei Wörter unverständlich)* Das muss nur insgesamt gleich sein *(schaut in eine weiße Box)*.
54	Svenja	Ach so.
55		*Silke, Stefanie und Svenja schreiben in ihre Hefte. Sarah spielt mit Bohnen zwischen den Fingern.*
56	Stefanie	*(schreibt)* und vier
57	Svenja	Jetzt darf ich mal ausprobieren, ja, mit der Sarah. Ihr habt ja jetzt gerade ausprobiert, ne? Sarah komm' wir *(Rest unverständlich)*
58	Sarah	Ok! Aber guck mal, da müssen doch überall gleich viele sein, # in den ganzen Schachteln *(deutet mit der Hand auf die Anordnungen)*,
59	Svenja	# Nein, muss nicht, es muss nur das gleiche rauskommen

60	Stefanie	# Du musst da *(zeigt auf Anordnung A)* immer ne krumme Zahl
61	Silke	Insgesamt muss das gleiche sein *(bewegt die geöffnete Hand in der Luft über Anordnung A)*
62	Stefanie	Und in den Kästchen *(zeigt abwechselnd auf die beiden schwarzen Boxen)*, in den beiden muss das gleiche sein.



Im Laufe dieser Szene stellt sich heraus, dass für Svenja und Sarah bis dahin noch nicht klar war, dass nur in Boxen gleicher Farbe gleich viele Bohnen liegen müssen, sich in weißen und schwarzen also durchaus verschiedene Anzahlen an Bohnen befinden dürfen. Offenbar haben nur Stefanie und Silke dies im Vorfeld der Episode erfasst (vgl. S. 172). Diese Szene deutet auch darauf hin, dass sich Sarah in <37> (Szene 3) vielleicht doch auf alle Boxen bezogen hat, obwohl ihre Geste sowie der Kontext dafür sprachen, dass sie sich nur über die Boxen einer Farbe geäußert hat (vgl. S. 183).

Der Sachverhalt wird hier nun in zwei Anläufen geklärt. Auf Svenjas diesbezügliche, sehr erstaunte Frage ganz zu Beginn (<51>) reagiert Stefanie mit stark zur Schau gestellter Fassungslosigkeit (<52>). Silke hingegen erläutert, dass in den Anordnungen lediglich insgesamt gleich viele Bohnen liegen müssen (<53>). Svenja gibt sich damit zufrieden (<54>), obwohl der von ihr selbst fokussierte Aspekt der Gleichheit von (bestimmten) Boxenbefüllungen von Silke nicht spezifiziert wird. Abgesehen von Sarah schreiben anschließend alle in ihre Hefte. Man kann davon ausgehen, dass sie wohl die am Ende der dritten Szene gefundene Lösung notieren (s. auch <56>). Sarah spielt währenddessen mit Bohnen zwischen den Fingern.

Nachdem sie die Lösung notiert hat, äußert Svenja den Wunsch, gemeinsam mit Sarah zu versuchen, eine weitere Lösung zu finden (<57>). Sie spricht dabei von „ausprobieren“, was einen Einblick in ihre Sicht auf den Lösungsprozess erlaubt und zu ihrem Vorstoß aus <13> passt, einfach überall vier Bohnen reinzulegen und dann zu „gucken“ (s. S. 173). Sie rechtfertigt ihren Wunsch nach Übernahme der Verantwortlichkeit für den Lösungsprozess dadurch, dass die anderen beiden „ja jetzt gerade ausprobiert“ hätten. Abschließend fordert sie Sarah wohl direkt auf mitzumachen, wobei das Ende ihres Satzes aber nicht zu verstehen ist.

Sarah stimmt Svenjas Ansinnen zu (<58>: „Ok!“), weist sie dann aber zunächst darauf hin, dass in den Boxen „doch überall gleich viele sein“ müssten. Svenja verneint dies und sagt, dass nur das gleiche rauskommen müsse (<59>), womit sie vermutlich versucht, Silkes Erläuterung aus <53> wiederzugeben, die sie selbst auf ihre einleitende Frage hin erhalten hatte. Silke reagiert hier (<61>) ähnlich wie in <53>, und auch Stefanie gibt diesmal eine Erläuterung. Sie greift die andere Bedingung zur Befüllung der Boxen aus der Aufgabenstellung (<62>) auf: „Und in den Kästchen *(zeigt abwechselnd auf die beiden schwarzen Boxen)*, in den beiden muss das gleiche sein.“. Streng genommen bezieht sich ihre Aussage nur auf die schwarzen Boxen, man kann aber vermuten, dass sie eigentlich versucht, die zweite Bedingung allgemein zum Ausdruck zu bringen.

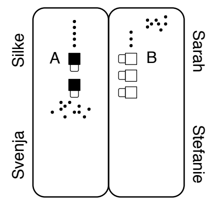
Stefanie gibt in <60> noch einen Hinweis, was ihrer Meinung nach für die weitere Lösungssuche zu beachten sei: „Du musst da *(zeigt auf Anordnung A)* immer ne krumme Zahl“. Die Mitschülerinnen gehen darauf aber nicht ein, und auch Stefanie äußert sich im Anschluss – wie schon dargestellt – auch wieder zu dem in dieser Szene fokussierten Problem. Wir fragen aber trotzdem, was sie mit dem Hinweis meinen könnte. Zu allererst ist zu bemerken, dass sie hier von Zahlen und nicht von Bohnen spricht. Der Ausdruck „krumme Zahl“ bezeichnet vermutlich die ungeraden Zahlen. Ob sie nun allerdings ausdrücken möchte, dass die Gesamtzahl an Bohnen in Anordnung A immer ungerade sein muss (was sie aufgrund der Beschaffenheit der Anordnung ohnehin immer ist, was Stefanie aber vielleicht nicht klar ist), oder dass die Anzahl der Bohnen pro schwarzer Box immer ungerade sein muss (was bei ihrer ersten gefundenen Lösung schon nicht der Fall ist, was wiederum aber kein Hinderungsgrund für eine solche Aussage sein muss), lässt sich hier nicht erkennen.

s	5
w	4

Szene 5: Ergänzung zu je sieben Bohnen pro schwarzer Box

63	Svenja	*(nimmt Bohnen aus dem Vorrat)* Ich probier jetzt mal hier sieben, # *(legt in eine schwarze Box zwei Bohnen dazu)*

64	Stefanie	# Und hier *(zeigt auf Anordnung A)* muss immer ne krumme Zahl *(ein Wort unverständlich)*
65	Sarah	Wir probieren jetzt sechs aus *(schiebt zwei der drei einzelnen Bohnen aus Anordnung B zu ihrem Vorrat, nimmt Bohnen in die Finger).*
66	Svenja	*(legt in die andere schwarze Box zwei Bohnen dazu)* Sieben. Nein, das sind sieben drin. Eins, zwei, drei, vier, fünf *(zeigt nacheinander auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A)*, fünf mal äh *(zeigt auf die schwarzen Boxen)*
67	Silke	19.
68	Sarah u. Svenja	19.
69	Svenja	Und jetzt hier sind *(wendet sich Anordnung B zu)*,
70	Stefanie	Boah Sarah, # lass die doch
71	Svenja	# Sarah, jetzt lass es doch mal bitte, ja? *(Svenja und Silke schieben je eine Bohne aus Sarahs Vorrat zu den einzelnen Bohnen in Anordnung B)*
72	Sarah	Mann, hallo, ich hab' hier raus genommen *(zeigt auf ihren Bohnenvorrat)*



Svenja nimmt Bohnen aus dem Vorrat und beginnt ihren Lösungsversuch (<63>). Sie entscheidet sich dafür, es mit sieben Bohnen pro schwarzer Box zu probieren, und ergänzt direkt zwei Bohnen in einer schwarzen Box. Die Beziehung zum Material wird nicht verbal, sondern lediglich auf handelnder Ebene hergestellt. Stefanie fällt Svenja ins Wort und wiederholt ihre Aussage aus <60> zu den ‚krummen Zahlen'. Auch hier beobachtet man wieder keine Reaktion auf Stefanies Beitrag. Allerdings ist es denkbar, dass bereits Svenjas Vorstoß, es mit sieben Bohnen pro schwarzer Box zu probieren – also direkt zwei Bohnen pro Box zu ergänzen und die Befüllung mit sechs Bohnen pro schwarzer Box zu überspringen, auf Stefanies ursprüngliche Bemerkung in <60> zurückzuführen ist.

Sarah äußert, dass sie sechs ausprobieren möchte (<65>), wobei sie nicht deutlich macht, ob in den schwarzen oder weißen Boxen. Auf der handelnden Ebene ist sie offenbar immer noch mit dem Austauschen der Bohnen beschäftigt: sie nimmt in diesem Beitrag zwei der drei einzelnen Bohnen neben den weißen Box weg, legt sie zu dem vor ihr liegenden Vorrat und nimmt Bohnen daraus in die Finger.

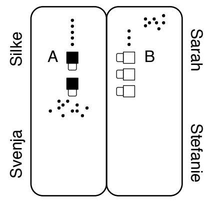
Svenja fügt auch der anderen schwarzen Box zwei Bohnen zu und beharrt auf der Befüllung der schwarzen Boxen mit je sieben Bohnen (<66>: „Nein, das sind sieben drin.“). Sie unternimmt einen Versuch, die Gesamtanzahl an Bohnen in Anordnung A zu ermitteln, der aber misslingt: sie zählt die einzelnen Bohnen in der Anordnung ab (5) und äußert anschließend: „fünf mal äh *(zeigt auf die schwarzen Boxen)*“. Ob dies auf Unkonzentriertheit oder mangelndes Verständnis zurückzuführen ist, ist hier nicht zu erkennen. Silke kommt ihr zu Hilfe und nennt die richtige, aktuelle Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung A (19). Sarah und Svenja wiederholen diese in <68>. Anschließend wendet sich Svenja Anordnung B zu und leitet auch für diese Anordnung die Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahl ein: „Und jetzt hier sind“. Weiter kommt sie allerdings nicht, da zunächst Stefanie und dann auch ihr selber auffällt, dass wieder einzelne Bohnen in Anordnung B fehlen. Den Schülerinnen ist sofort klar, wer dafür die Verantwortung tragen muss (Stefanie in <70>: „Boah Sarah, lass die doch“, Svenja in <71>: „Sarah, jetzt lass es doch mal bitte, ja?“). Nachdem Svenja und Silke die Anordnung wieder vervollständigt haben, weist Sarah die Verantwortung für die fehlenden Bohnen mit Nachdruck zurück und stellt fest, dass sie die Bohnen, die sie in Händen hält aus ihrem Bohnenvorrat genommen habe. Dies entspricht auch den Tatsachen, nur dass sie vorab die Bohnen ja sehr wohl aus der Anordnung entfernt hat (s. o.). Da sie die Bohnen aber weggenommen hat, während sie vorschlug, es mit sechs Bohnen zu probieren, ist es möglich, dass sie diese Handlung nebenbei ausgeführt hat – also nicht absichtsvoll – und sie sich hier nun wirklich keiner Schuld bewusst ist.

s	7
w	4

Szene 6: Ergänzung zu je fünf Bohnen pro weißer Box und zu je acht Bohnen pro schwarzer Box

73	Svenja	15 *(deutet auf Anordnung B)*, *(zeigt nacheinander auf zwei der weißen Boxen)* nee, einer zu wenig ist da
74	Sarah	Hier *(legt eine Bohne in eine weiße Box)*

75	Svenja	Jetzt probieren wir mal, *(schaut zur Box, in die Sarah die Bohne gelegt hat, streckt die Hand danach aus, zieht sie wieder zurück)*
76	Silke	*(zeigt auf Anordnung B)* Du musst ja überall gleich viel reintun
77	Svenja	Ja, deswegen ja *(greift in die weiße Box mit der zusätzlichen Bohne)*
78	Stefanie	Jetzt tu mal überall noch einen rein #, in die drei *(zeigt auf die weißen Boxen)* ## und dann tust Du ### in die beiden *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* auch noch einen jeweils rein.
78a	Svenja	*# nimmt ihre Finger aus der Box*
78b	Sarah	*## fügt einer weiteren weißen Box eine Bohne hinzu*
78c	Svenja	*### fügt der verbliebenen weißen Box eine Bohne zu*
79	Svenja	Ja.
80		*Silke und Sarah legen in je eine schwarze Box eine Bohne; Svenja bewegt ihre Hand (mit Bohnen?) auch zu den schwarzen Boxen.*
81	Stefanie	Und jetzt zählt noch mal.



Svenja nimmt in <73> den Faden vom Ende der vorherigen Szene wieder auf: sie deutet auf Anordnung B und nennt die aktuelle Gesamt-Bohnenanzahl (15). Hierzu ist festzuhalten, dass sie diese Gesamt-Bohnenanzahl scheinbar nicht erneut ermittelt, sondern sofort benennt. Es wäre allenfalls möglich, dass sie die Anzahl im Kopf und sehr schnell noch einmal berechnet. Im Video gibt es dafür aber keine Anzeichen. Anschließend zeigt sie nacheinander auf zwei der weißen Boxen und stellt fest: „nee, einer zu wenig ist da". Eine plausible Deutung dieses Beitrags ist, dass sie während des Zeigens auf die Boxen gedanklich Bohnen in die weißen Boxen einfüllt. Nimmt man an, dass sie für jede weiße Box eine weitere Bohne antizipiert (obwohl sie nur auf zwei der weißen Boxen zeigt), so käme sie insgesamt auf 18 Bohnen für Anordnung B. Dies wäre eine Bohne weniger als aktuell in Anordnung A vorhanden ist. Ihre verbale Äußerung stellt genau dies fest.

Sarah fügt auf Svenjas Äußerung hin einer weißen Box eine Bohne zu (<74>). Sie bezieht Svenjas Feststellung offenbar auf die aktuelle, konkrete

Befüllungssituation, da sie wohl nicht bemerkt hat, dass Svenja eine Aussage über gedanklich schon aufgefüllte Boxen macht. Wäre in der konkret aufgebauten Boxensituation tatsächlich ein Rückstand von einer Bohne für Anordnung B zu verzeichnen, wäre Sarahs Handlung durchaus im Sinne des sukzessiven Befüllens, welches sich bisher angedeutet hat.

Svenja wollte nach ihrem gedanklichen Befüll-Versuch offenbar etwas anderes ausprobieren und setzt in <75> zunächst auch dazu an („Jetzt probieren wir mal"). Die von Sarah zugefügte Bohne bringt sie aber davon ab: sie streckt zunächst die Hand nach der fraglichen Box aus, zieht sie wieder zurück, ohne etwas gemacht zu haben, führt aber auch ihren Satz nicht weiter fort. Silke weist in <76> (vermutlich) Sarah darauf hin, dass sie in alle weißen Boxen gleich viele Bohnen hineinlegen müsse. Svenja fühlt sich dadurch offenbar darin bestätigt, die von Sarah zugefügte Bohne wieder zu entfernen: „Ja, deswegen ja *(greift in die weiße Box mit der zusätzlichen Bohne)*" (<77>). Dies war demnach vermutlich auch ihr Ansinnen beim ersten Strecken der Hand nach der fraglichen Box in <75>. Nun schaltet sich jedoch Stefanie ein und fordert ihre Mitschülerinnen auf, überall noch eine weitere Bohne zuzufügen (<78>). Daraufhin nimmt Svenja ihre Finger aus der Box mit der zusätzlichen Bohne. Zunächst fügt dann Sarah einer anderen weißen Box eine Bohne zu, dann Svenja der verbliebenen. Silke und Sarah ergänzen anschließend in je einer schwarzen Box eine Bohne und kommen damit vermutlich Svenja zuvor, die ihre Hand ebenfalls (mit Bohnen?) zu den schwarzen Boxen bewegt. Nachdem alle Boxen um eine Bohne ergänzt wurden, gibt Stefanie die Anweisung, noch einmal zu zählen (<81>).

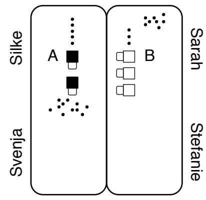
Es ist plausibel, Stefanies Befüllungsvorgabe in <78> als Folge von Svenjas Äußerung „nee, einer zu wenig ist da" (<73>) und Sarahs Reaktion darauf (<74>) zu verstehen: angenommen auch Stefanie geht davon aus, dass Svenjas Äußerung <73> sich auf die aktuelle, konkrete Befüllungssituation bezieht. Dann ist für sie Sarahs Handlung (Zufügen einer Bohne in einer weißen Box) ein sinnvoller Schritt im Rahmen des bisherigen Vorgehens bei der Lösungssuche. Mit dieser Bohne wäre in beiden Anordnungen Gleichstand erreicht. Werden nun in den beiden übrigen weißen Boxen sowie in den beiden schwarzen Boxen noch jeweils eine Bohne ergänzt, werden also in beiden Anordnungen insgesamt jeweils zwei Bohnen zugefügt, würde dies nichts an diesem Zustand ändern – wäre er denn vorher tatsächlich erreicht worden. Demnach wäre Stefanies Beitrag eigentlich nicht durch ein Probieren – wie es auf den ersten Blick scheint, sondern durch systematisches Überlegen gekennzeichnet. Den Schülerinnen fehlen am Ende dieser Episode zur Konkretisierung der nächsten Lösung (8 | 6) in der aufgebauten Boxensituation die von Svenja in <73> nur antizipierten Bohnen in den weißen Boxen:

s	8
w	5

Szene 7: Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahlen in beiden Anordnungen und Realisierung der Lösung (8 | 6) durch Ergänzen je einer Bohne pro weißer Box

82	Silke	*nimmt eine schwarze Box in die Hand und kippt sie zu sich*
83	Svenja	*(schaut in Silkes (schwarze) Box und zählt die Bohnen)* Eins, zwei # (..) acht
84	Sarah	# *nimmt die andere schwarze Box zu sich herüber*
85	Sarah	*(zählt die Bohnen in der schwarzen Box)* Eins, zwei, ## drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht. *(stellt die Box wieder zur Anordnung zurück)*
86	Svenja	## *(zeigt auf die (schwarze) Box, die Sarah in der Hand hat)* 16 *(bewegt ihre Hand zu den einzelnen Bohnen in Anordnung A)* plus 5 sind 21, *(wendet sich Anordnung B zu)* # 21
86a	Silke	*macht Svenjas Bewegungen in Beitrag <86> fast synchron mit*
87	Sarah	# *nimmt eine weiße Box zu sich herüber und zählt die Bohnen darin*
88	Stefanie	*(eine Schülerin aus einer anderen Gruppe nimmt Stefanies Etui vom Tisch; Stefanie dreht sich zu dieser Schülerin um)* Hallo?

89	Sarah	*(stellt die weiße Box wieder an ihren Platz zurück)* 15 *(berührt die anderen beiden weißen Boxen mit der Hand)* # müssten das sein, das passt, das sind ## 18.
90		# *das Etui wird wieder auf den Tisch gestellt; Stefanie wendet sich wieder ihrer Gruppe zu*
91	Svenja	## 18. Dann muss da noch, *(greift nach Bohnen aus dem Vorrat)* 18? Und hier *(zeigt auf Anordnung A)* sind 21. Dann muss da noch *(hält ihre Hand über eine weiße Box in Anordnung B)*
91b	Silke	## *greift nach der mittleren weißen Box und schaut hinein, deutet auf die anderen weißen Boxen, dann auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B.*
92	Stefanie	In jeweils einen rein *(zeigt auf Anordnung B)*
93	Svenja	*legt eine Bohne in die (weiße) Box (s. Ende von <91>)*
94	Sarah	# *legt in die beiden anderen weißen Boxen jeweils eine Bohne*
95	Svenja	# Dann muss noch *(greift nach Bohnen aus dem Vorrat)* jeweils einer rein. Ja *(legt die Bohnen wieder zum Vorrat).* Jetzt passt's.



Die Szene beginnt damit, dass die Schülerinnen Stefanies Anweisung, noch einmal zu zählen (<81>), ausführen: Silke nimmt eine schwarze Box in die Hand und kippt sie zu sich (<82>). Man kann davon ausgehen, dass sie die darin liegenden Bohnen zählen möchte, auch wenn sie sich verbal nicht äußert. Svenja schaut ebenfalls in Silkes Box und zählt die Bohnen (zum Teil laut) ab (8). Währenddessen nimmt Sarah die andere schwarze Box zu sich herüber (<84>) und zählt die Bohnen anschließend ebenfalls laut ab (8) (<85>). Svenja wartet nicht, bis Sarah die Bohnenanzahl in ihrer schwarzen Box ermittelt hat, sondern geht davon aus, dass sie auch acht Bohnen enthält. Sie zeigt auf die schwarze Box in Sarahs Hand und nennt die Zahl 16, addiert offensichtlich also zu der von ihr ermittelten Bohnenanzahl für Silkes schwarze Box (8) weitere acht Bohnen (<86>), nennt aber nur das Ergebnis. Sie führt ihre Hand daraufhin zu den einzelnen Bohnen in Anordnung A und rechnet weiter: „plus 5 sind 21", womit sie die Gesamt-Bohnenanzahl für diese Anordnung richtig bestimmt hat.[1] Zum

[1] Diese sichere Bestimmung der Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung A deutet darauf

Schluss wendet sie sich Anordnung B zu und nennt noch einmal die eben ermittelte Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung A. Da Silke Svenjas Bewegungen in <86> fast synchron mitmacht (<86a>), ist davon auszugehen, dass sie deren Gedankengang sehr aktiv verfolgt.

Nachdem Sarah die Bohnen in der schwarzen Box gezählt und diese dann wieder an ihren Platz zurückgestellt hat (<85>), nimmt sie (noch während Svenjas Beitrag <86>) eine weiße Box zu sich herüber und zählt auch darin die Bohnen (<87>). Das Ergebnis ihres Zählprozesses äußert sie nicht, sondern stellt die weiße Box wieder an ihren Platz zurück und nennt die Anzahl der Bohnen in allen weißen Boxen zusammen (<89>: „15 müssten das sein"), wobei sie hauptsächlich durch Berühren der anderen beiden weißen Boxen andeutet, worauf sich ihre verbale Aussage bezieht. Auch Sarah gibt sich nun also mit der Ermittlung der Bohnenanzahl in einer Box stellvertretend für alle Boxen dieser Farbe zufrieden – wie Svenja in <86>. Zum Schluss stellt sie fest: „das passt, das sind 18". Wir können davon ausgehen, dass sie mit der Zahl 18 die Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung B beziffert, da sich in der Anordnung drei einzelne Bohnen befinden. Ob sie allerdings mit „das passt" meint, dass bereits eine Gleichheit zwischen den Anordnungen hergestellt wurde, oder dass man die bereits in Anordnung B befindliche Anzahl an Bohnen (18) zu der von Svenja in <86> für Anordnung A ermittelten Gesamt-Bohnenanzahl von 21 ergänzen kann, lässt sich nicht mit Bestimmtheit sagen.

In die Nennung der Zahl 18 stimmt Svenja mit ein (<91>). Sie macht anschließend zwar sofort klar, dass bei einer aktuellen Gesamt-Bohnenanzahl von 18 noch Bohnen ergänzt werden müssen: „Dann muss da noch, *(greift nach Bohnen aus dem Bohnenvorrat)*", muss dann aber noch einmal rekapitulieren: „18? Und hier *(zeigt auf Anordnung A)* sind 21". Währenddessen ermittelt Silke offenbar noch einmal still für sich die Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung B (<91b>). Stefanie kommt Svenja in <92> mit der Schlussfolgerung bezüglich der notwendigen Ergänzung von Bohnen zuvor: „In jeweils einen rein *(zeigt auf Anordnung B)*". Svenja und Sarah befüllen daraufhin die weißen Boxen entsprechend (<93> – <95>), und Svenja beschließt die

hin, dass sie in <66> nur unkonzentriert war (vgl. S. 189).

Szene mit der Feststellung „Jetzt passt's.".

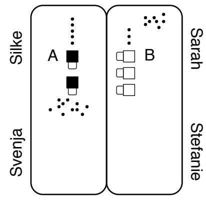
Festzuhalten ist noch, dass Stefanie zwar zwischenzeitlich kurzfristig dadurch abgelenkt wird, dass eine Schülerin aus einer anderen Gruppe ihr Etui vom Tisch nimmt (<88>, <90>), sie dadurch aber nicht aus dem Lösungsprozess aussteigt. Von Vorteil ist für sie dabei sicherlich, dass Svenja die Situation rekapituliert, nachdem Stefanie sich wieder dem Tisch zugewandt hat.

s	8
w	6

Szene 8: Überprüfung und Artikulation der Lösung (8 | 6)

96a	Stefanie	*nimmt während der folgenden Beiträge <96> – Beginn von <100> zwei weiße Boxen aus Anordnung B zu sich, schaut nacheinander in beide hinein und murmelt etwas.*
96	Silke	*(umrandet mehrmals mit Daumen und Zeigefinger die einzelnen Bohnen aus Anordnung A; ihr Daumen streicht dabei auf der einen Seite der Bohnen entlang, der Zeigefinger auf der anderen; wenn sie an einem Ende der Bohnenreihe angelangt ist, führt sie die Fingerspitzen zusammen)* Ist hier auch 21?
97	Svenja	Ja.
98	Sarah	Ja.
99	Svenja	Guck mal. Du hast hier acht *(beugt sich nach vorne und schaut in eine schwarze Box und fasst sie dabei an)*, *(zeigt auf die andere schwarze Box)* mal zwei, 16, plus 5 *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A)* sind 21 *(greift nach ihrem Stift)*
100	Silke	Ok, dann ist # hier *(nimmt eine schwarze Box in die Hand, kippt sie zu sich und schaut hinein)* überall eins, zwei, drei,
101	Stefanie	# *(nimmt eine der beiden weißen Boxen, die sie zu sich geholt hat, in die Hand und zieht sie ein Stück weiter auf)* Eins, zwei, drei, vier, fünf, *(ein Wort unverständlich)*
102	Svenja	Acht.
103	Silke	Acht *(schreibt in ihr Heft)*.
104	Stefanie	*stellt die beiden weißen Boxen, die sie zu sich geholt hatte, zurück zu Anordnung B*

105	Svenja	Und hier sind überall *(beugt sich über den Tisch und schaut in eine weiße Box)* fü, äh sechs drin. Acht und sechs *(schreibt in ihr Heft)*.



Zu Beginn der Szene nimmt Stefanie zwei der drei weißen Boxen zu sich herüber, schaut nacheinander in beide hinein und murmelt unverständlich. Dies läuft parallel zu der Konversation zwischen Silke, Svenja und Sarah (<96> – Beginn von <100>). In <101> öffnet Stefanie die von ihr als zweites betrachtete Box ein Stück weiter und zählt die darin befindlichen Bohnen. Wir gehen davon aus, dass sie sechs Bohnen zählt, auch wenn das letzte Wort, welches ‚sechs' sein müsste, unverständlich ist. Schaut man noch einmal in das Video, lässt sich vermuten, dass sie auch schon zu Beginn die Bohnen zählt, dies aber murmelnd nur für sich macht. Es ist gut nachvollziehbar, dass Stefanie noch einmal die Anzahl der Bohnen pro weißer Box bestimmen muss, nachdem nun eine passende Befüllung gefunden wurde, da diese Anzahl in der letzten Szene nicht explizit genannt und sogar noch erhöht wurde, und sie die Anzahl für die Lösung benötigen. Stefanie stellt die beiden Boxen in <104> an ihren Platz zurück.

Silke hadert in <96> offenbar mit der Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung A. Dabei scheinen ihr insbesondere die einzelnen Bohnen Kopfzerbrechen zu bereiten, da sie mit ihren Fingern immer wieder um sie herum fährt. Silkes Schwierigkeiten mit dieser Anzahl überraschen, da sie in <86a> Svenjas Ermittlung dieser Anzahl gestisch so intensiv zu verfolgen schien. Entweder war dieser Eindruck dort also falsch, oder sie will die Anzahl nach der Betrachtung von Anordnung B noch einmal nachvollziehen und hat nun Schwierigkeiten. Svenja und Sarah bestätigen zunächst schlicht die von Silke in ihrer Nachfrage angegebene Gesamt-Bohnenanzahl (<97>, <98>). Anschließend wiederholt Svenja aber noch einmal ihre Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung A aus <86>. Sie stellt die Anzahl der Bohnen für eine schwarze Box fest (<99>: „Du hast hier acht"), indem sie die Box anfasst und auch noch einmal hinein schaut. Anschließend deutet sie auf die andere schwarze Box und äußert: „mal zwei, 16". In <86> hatte sie lediglich auf die zweite Box gezeigt und das Ergebnis genannt. Dort hatten wir den Prozess als Addition eingestuft. Diese Stelle zeigt nun, dass sie vielleicht aber auch in <86> schon multipliziert hat, da ihr Vorgehen abgesehen von der Nennung der Rechenoperation identisch ist. Abschließend zeigt sie – wie in <86> – auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A und sagt: „plus 5 sind 21“. Sie greift dann zu ihrem Stift, will vermutlich ihre Lösung notieren.

Silke signalisiert in <100> zwar zunächst, dass sie Svenjas Ausführung verstanden hat („Ok,“), beginnt dann aber die Bohnen pro schwarzer Box noch einmal abzuzählen. Dies weist eher auf bestehende Verständnisschwierigkeiten hin, da die fragliche Anzahl von Svenja explizit genannt wurde und für die Lösung so essentiell ist, dass man sie in der kurzen Zeit eigentlich nicht schon wieder vergessen haben kann. Svenja nennt daraufhin noch einmal die Anzahl der Bohnen – wie zu erwarten, ohne sie erneut zu ermitteln (<102>). Silke wiederholt daraufhin die Anzahl und schreibt dann in ihr Heft. Svenja beugt sich hingegen erst noch über den Tisch und stellt durch einen Blick in eine (stellvertretende) weiße Box die Anzahl der Bohnen pro weißer Box fest (<105>): „Und hier sind überall fü, äh sechs drin.“. Dies ist aus gleichem Grund wie bei Stefanie ein zu erwartender Schritt (s.o.). Zum Abschluss nennt sie die gesamte Lösung und schreibt ebenfalls in ihr Heft.

Zusammenfassende Beschreibung des Lösungsverfahrens

Die Schülerinnen arbeiten in dieser Episode durchweg handelnd und zählend mit den Bohnen. Es wurde deutlich, dass ihnen diese Art der Bearbeitung eine große Koordinierungsleistung abverlangt. An Stellen, an denen sie diese nicht erfüllen können, kommt es zu Konfusionen oder Fehlern, die glücklicherweise aber alle nicht auf Abwege, sondern zu weiter ausgestaltbaren Zwischenergebnissen führen. Da vermeintlich gefundene Lösungen stets noch einmal überprüft werden, können sie zu tatsächlichen Lösungen weitergeführt werden.

Das Lösungsverfahren ist durch zwei Formen des sukzessiven Befüllens geprägt. Die erste Variante, die Silke im Vorfeld der Episode eingeführt hat (s. S. 170) und die sich am Ende der Episode bei der Ermittlung der Lösung (8 | 6) noch einmal andeutet (Szene 6, s. S. 189), lässt sich allgemein so darstellen:

Ausgangszustand: In Boxen gleicher Farbe befinden sich gleich viele Bohnen.

1. *Überprüfe in welcher der Anordnungen insgesamt weniger Bohnen vorhanden sind, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt. Ergänze die Boxen dieser Anordnung der Reihe nach solange, bis in beiden Anordnungen gleich viele Bohnen vorhanden sind, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt.*

2. *Überprüfe, ob in allen Boxen der Anordnung, in welcher in Schritt 1 Bohnen ergänzt wurden, gleich viele Bohnen liegen. Falls ja, ist eine Lösung gefunden. Notiere diese in Deiner Tabelle.*

3. *Ergänze in beiden Anordnungen in je einer Box eine Bohne. Berücksichtige bei der Auswahl der Boxen, dass eine gleichmäßige Befüllung angestrebt wird.*

4. *Überprüfe, ob in allen Boxen einer Farbe gleich viele Bohnen liegen. Falls ja, ist eine Lösung gefunden. Notiere diese in Deiner Tabelle. Springe wieder zu Schritt 3.*

Silke führt im Vorfeld der Episode Schritt 4 nicht durch. Aus diesem Grund erzeugt sie zwar handelnd die Lösung (2 | 2), bemerkt sie aber nicht (s. S. 170). Außerdem arbeitet sie, nachdem die erste Lösung dann mit Hilfe der Beobachterin gefunden wurde, auch nicht mehr nach ihrer Maxime, die Gleichheit der Gesamt-Bohnenanzahlen zu erhalten, weiter, sondern probiert die Befüllungen (4 | 4) und (3 | 3) aus. In der allgemeinen Beschreibung wird Schritt 4 mit aufgeführt, da er zeigt, dass mit dem Verfahren grundsätzlich alle Lösungen in $\mathbb{N}$ gefunden werden können.

Beim zweiten Auftreten (Szene 6, s. S. 189) findet man Schritt 1 in Sarahs Reaktion (<74>) auf Svenjas Äußerung <73>. Schritt 3 wird ohne zwischenzeitliche Überprüfung der Befüllungssituation (Schritt 4) quasi direkt zweimal hintereinander von Stefanie (<78>) ausgeführt. Stefanie gibt am Ende die Anweisung, dass nachgezählt werden soll (<81>), was einen Teilaspekt von Schritt 4 darstellt.

Als zweite Variante des sukzessiven Befüllens ist in der Episode das Verfahren zu beobachten, welches auch schon Gruppe P verwendet hat. Es soll hier der Vollständigkeit halber noch einmal wiederholt werden. Wir ergänzen außerdem eine Bedingung zum Ausgangszustand, da die Schülerinnen das Verfahren nicht von Anfang an verwenden und daher schon Bohnen in den Boxen liegen:

Ausgangszustand: In Boxen gleicher Farbe befinden sich gleich viele Bohnen.

1. *Ergänze in derjenigen Anordnung in welcher insgesamt weniger Bohnen vorhanden sind, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt, pro Box eine Bohne.*

2. *Überprüfe, ob in beiden Anordnungen gleich viele Bohnen vorhanden sind (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt). Falls nicht, beginne wieder bei Schritt 1.*

3. *Wenn dieser Schritt erreicht wird, ist eine Lösung gefunden. Um weitere Lösungen ermitteln zu können, muss das Gleichgewicht der beiden Anordnungen gestört werden, indem in einer der beiden Anordnungen pro Box eine Bohne ergänzt wird. Beginne nun wieder bei Schritt 1.*

Diese Variante ist in den Beiträgen <16> – <26> (S. 173 ff.), in denen allerdings eine falsche Gesamt-Bohnenanzahl vorausgesetzt wird, sowie in gewisser Weise (da schon nach einem Durchlauf eine Lösung gefunden wird) bei den Überprüfungen der vermeintlich gefundenen Lösungen (s. Szene 3 (S. 179), Szene 7 (S. 192)) zu beobachten. Svenjas Vorstoß, es mit sieben Bohnen pro schwarzer Box zu probieren (ausgehend von der Befüllung zur Lösung (5 | 4), <63>), könnte man als Form der Störung des Gleichgewichts (Schritt 3) werten, da sie ja nur die Befüllung der schwarzen Boxen variiert und nicht für beide Boxenfarben irgendwelche Befüllungen wählt und einfach ausprobiert.

Svenjas Beitrag <63> und seine Fortführung zur Lösung (8 | 6) zeigen auch, dass die verschiedenen Varianten des sukzessiven Befüllens in dieser Episode sehr miteinander verquickt sind. Während <63> zu Schritt 3 der zweiten Lösungsvariante passt, wurde die Fortführung (Szene 6) als ein Fall der ersten Variante gewertet (s. o.). Hierin deutet sich an, dass die Unterscheidung der verschiedenen Varianten des sukzessiven Befüllens nur in unserer Meta-Analyse existiert, während im Bewusstsein der Schülerinnen vermutlich lediglich das schrittweise Vorgehen an sich ihren Lösungsprozess bestimmt. Sie streben die Erfüllung der Aufgabenbedingungen zwar stets durch sukzessives Befüllen an, wechseln im Detail aber zwischen verschiedenen Vorgehensweisen.

8.2 Die Rolle des Materials

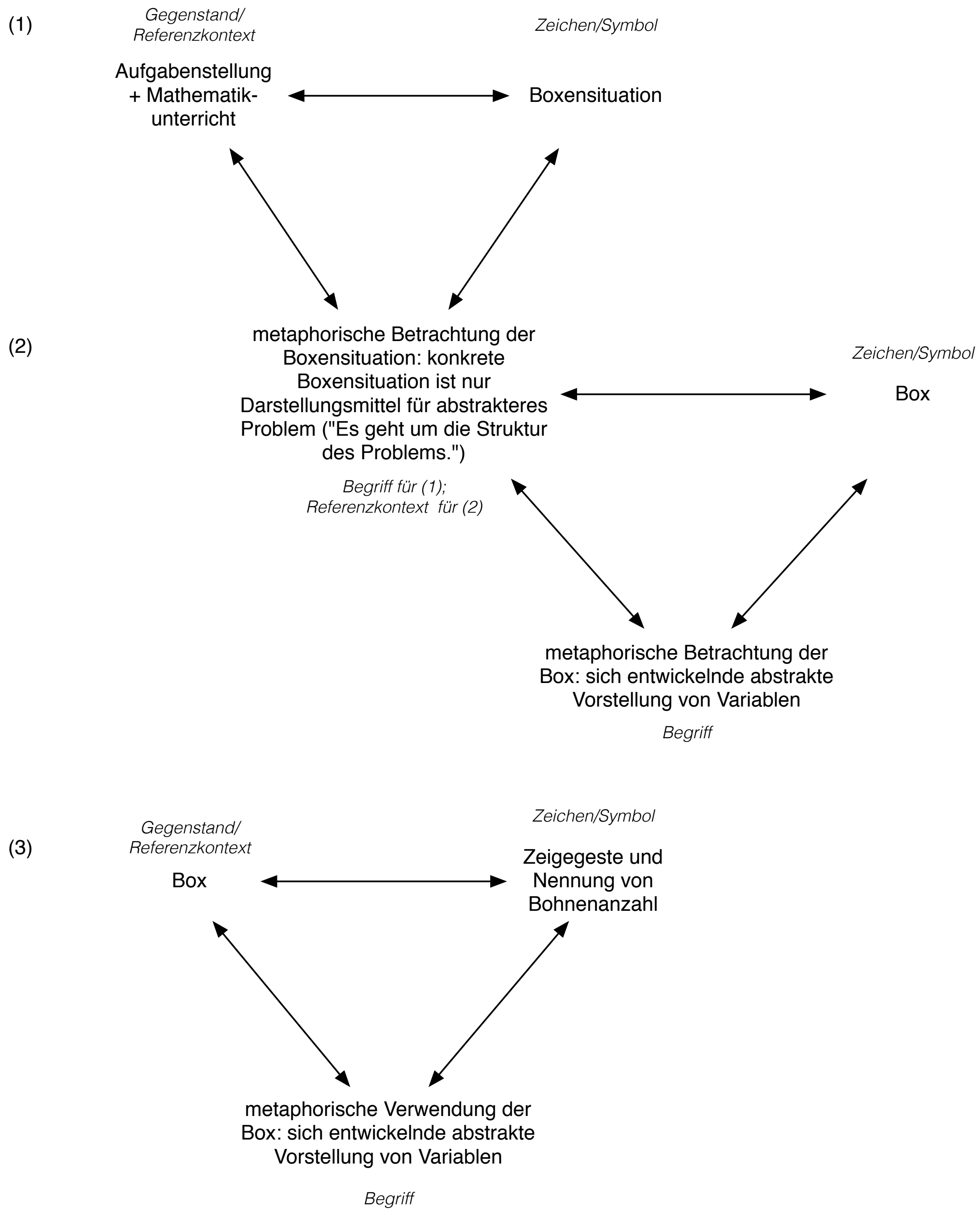
Die Schülerinnen sprechen in dieser Episode lediglich in drei Beiträgen explizit von den Boxen (<37>, <58>, <62>). Diese Beiträge gehören zur Klärung des Sachverhalts, dass (nur) in Boxen gleicher Farbe gleich viele Bohnen liegen sollen – und nicht in allen. Das Wort ‚Bohne' fällt in dieser Episode gar nicht. Implizit ist das konkrete Material – also Boxen *und* Bohnen – jedoch auch auf verbaler Ebene ständig präsent. Die Schülerinnen nehmen verbal durch ortsbestimmende Adverbien (z. B. <3>: „*Hier* sind *überall* zwei *drin*, ne?", <13>: „tu doch *da* auch einfach vier *rein*"), Demonstrativpronomen (z. B. <23>: „*Das* sind eins, zwei, drei, vier, fünf") sowie Indefinitpronomen (z. B. <37>: „In den [ganzen] Schachteln müssen auch überall gleich *viele* sein", <78>: „und dann tust Du in die *beiden (zeigt auf die schwarzen Boxen)* auch noch *einen* jeweils rein") auf das Material Bezug. Gesten und Handlungen übernehmen dabei die nähere Bestimmung der verbalen Ausdrücke. Sie treten während der gesamten Episode durchmischt auf. Bei Befüllungsanweisungen, Fragen nach Füllständen und der Ermittlung von Bohnenanzahlen in Anordnungen kann man sowohl Gesten als auch Handlungen beobachten (Beispiele für Gesten: <78>: „und dann tust Du in die beiden *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* auch noch einen jeweils rein", <3>: „Hier sind jetzt überall zwei drin, ne? *(zeigt auf die weißen Boxen)*", <16>: „Das sind neun, plus [mmm] *(zeigt mit ihrem Stift auf die von ihr aus betrachtet rechte schwarze Box)* sind 13, ne?"; Beispiele für Handlungen: <5>: Vorwegnahme der Ausführung der Anweisung, <27>:

„warte wie viel hast *(schaut in die von ihr aus betrachtet linke schwarze Box)*“, <33>: „Drei mal drei sind neun *(hebt dabei die von ihr aus gesehen linke weiße Box hoch, kippt sie zur anderen Tischseite – die darin liegenden Bohnen rutschen dadurch in den offenen Teil der Box – und stellt sie wieder ab)*“). Die Klärung der Aufgabenbedingungen wird nur durch Gesten begleitet (s. <37>, <39>, <58>, <61>, <62>). Das Festsetzen bzw. Festhalten der aktuell betrachteten Lösungsmöglichkeit erfolgt in dieser Episode hingegen ausschließlich durch Handlungen an der konkreten Boxensituation – also durch Befüllen der Boxen mit Bohnen.

Im Folgenden wird das beobachtete Zeigen auf Boxen und Bohnen näher analysiert. In der Mehrzahl der Fälle verwenden die Schülerinnen gewöhnliche Zeigegesten: sie zeigen auf Bohnen und zählen sie ab bzw. benennen direkt die gefragte Anzahl oder zeigen auf Boxen und sprechen über deren Befüllungen – sowohl vorzunehmende (z. B. <78>: „und dann tust Du in die beiden *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* auch noch einen jeweils rein“) als auch vorhandene (z. B. <3>: „Hier sind jetzt überall zwei drin, ne? *(zeigt auf die weißen Boxen)*“). Für uns sind aber vor allem diejenigen Fälle von Interesse, in denen die Schülerinnen auf Boxen zeigen, sich verbal aber auf Bohnenanzahl-Ebene äußern, ohne die Boxen irgendwie zu erwähnen. Es ist zu erörtern, ob es sich bei diesen Gesten um gewöhnliche oder am Material verankerte abstrakte Zeigegesten handelt. Da diese Frage stark mit der Einschätzung des Lösungsprozesses im Hinblick auf Ansätze zur Entwicklung einer Vorstellung von Variablen verschränkt ist, werden diese beiden Aspekte im Folgenden gemeinsam behandelt.

In den beiden Beiträgen, die aus dem Vorfeld der Episode zitiert wurden (s. S. 171, 172), beobachtet man klar am Material verankerte abstrakte Zeigegesten. Sarah und Silke zeigen auf die Boxen und antizipieren bestimmte Befüllungsanzahlen. Sie *tun so, als ob* die Boxen mit bestimmten Bohnenmengen befüllt wären. In der Loslösung vom konkreten Verteilen der Bohnen zeigt sich eine Abkehr von der Wahrnehmung der Boxensituation als konkretes Bohnen-Befüllungs-Problem, und der Blick richtet sich auf den mathematischen Gehalt der Situation (s. erstes epistemologisches Dreieck). Vor diesem Hintergrund müssen die Boxen metaphorisch betrachtet werden:

sie sind Bilder für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen als Platzhalter (s. zweites epistemologisches Dreieck). Die Verwendung der Boxen als Metaphern wird durch die gestischen Verweise möglich (s. drittes epistemologisches Dreieck).

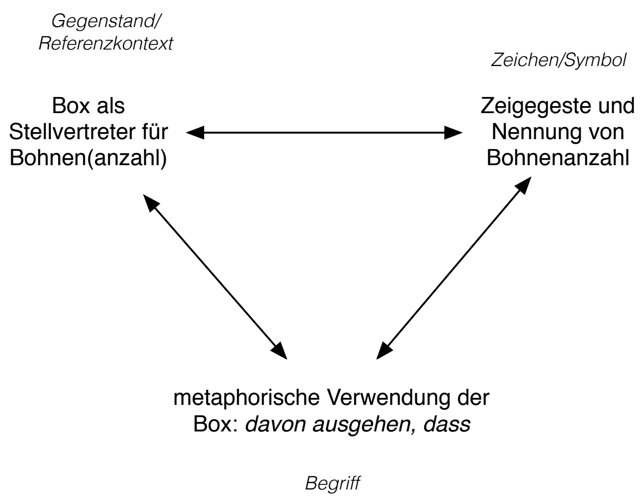


In der Episode selbst befüllen die Schülerinnen die Boxen wieder ihren Annahmen entsprechend mit Bohnen. Bei der Arbeit mit den befüllten Boxen zeigen sie häufig (z. T. wird auch hineingeschaut und gezählt) auf die Boxen und nutzen sie als Stellvertreter der in ihnen liegenden Bohnen. Hier stellt sich nun die Frage, ob die Schülerinnen dabei nur materielle Stellvertreter für materielle Bohnenmengen in den Boxen sehen, oder ob dieser Bezug trotz der tatsächlichen Befüllung Ausdruck einer sich entwickelnden abstrakten Vorstellung von Variablen als Platzhalter ist – sich die metaphorische Betrachtung der Boxen aus dem Vorfeld der Episode also aufrecht erhält. Man könnte hier argumentieren, dass das Vermögen, die Boxen metaphorisch zu betrachten, wenn es sich einmal gezeigt hat, dauerhaft ist und nicht ohne Weiteres wieder verloren geht. Dieses Argument scheint für sich allein aber schwach, wenn man in Erwägung zieht, dass manchmal ein ‚Rückfall' in grundlegende Vorstellungen bei auftretenden Verständnisschwierigkeiten notwendig sein kann. Wir versuchen daher in der Episode selbst Anzeichen für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen als Platzhalter zu finden. Dazu ordnen wir die fraglichen Beiträge zunächst zwei verschiedenen Gruppen zu: (1) Die Schülerinnen überprüfen (durch Nachzählen) die Anzahl der Bohnen in jeder Box und verweisen bei der direkt oder kurze Zeit später anschließenden Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahl für die zugehörige Anordnung durch Zeigen auf die Boxen auf die ermittelten Bohnenanzahlen bzw. die darin befindlichen Bohnen (<16>, <23>, <30>, <36>, <48>). (2) Die Schülerinnen ermitteln für nur *eine* Box einer Farbe (durch Nachzählen) die Anzahl der darin befindlichen Bohnen und nehmen bei der Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahl für die zugehörige Anordnung an, dass in allen Boxen dieser Farbe die gleiche Anzahl an Bohnen liegt. Sie nutzen bei allen Boxen dieser Farbe das Zeigen auf die Box als Verweis auf die (stellvertretend) an einer Box ermittelte Bohnenanzahl bzw. u. U. für die darin befindlichen Bohnen (<86>, <89>, <99>).

Da die Schülerinnen bei der Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahlen mit den Bohnenanzahlen pro Box rechnen (im Gegensatz zu Peter in <44> (s. S. 151, 155 f., 160), der zwar auf die Boxen zeigt, aber die darin befindlichen Bohnen abzählt), sich also auf der Zahlenebene bewegen, kann man wohl zumindest die Gesten der zweiten Gruppe als am Material verankerte abstrakte Zeigegesten auffassen. Dabei ist zwar kein ‚so tun als ob' zu beobachten, da die Bohnen ja tatsächlich in den Boxen liegen. Dadurch, dass die Schülerinnen dies aber nur noch stellvertretend für eine Box überprüfen, könnte man vielleicht von einem ‘davon ausgehen, dass' sprechen, was in eine ähnliche Richtung weist. Die Gesten der ersten Gruppe scheinen auch abstrakter als gewöhnliche Zeigegesten, da die Schülerinnen letztlich ja doch auf die Boxen zeigen, aber auf der Bohnenebene sprechen, nur sind hier die eingefüllten Bohnen so präsent, dass die Kategorisierung als abstrakte Zeigegeste wohl doch zu weit gegriffen ist. Hier handelt es sich vermutlich um eine Zwischenform.

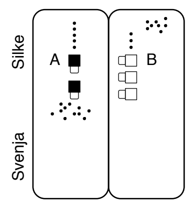
Wegen der am Material verankerten abstrakten Zeigegesten in der zweiten Gruppe lassen sich zumindest dort Ansätze einer metaphorischen *Verwendung* der Boxen festmachen, die durch das oben beschriebene ‚davon ausgehen, dass' gekennzeichnet ist. Dazu betrachten wir in einem epistemologischen Dreieck die Zeigegeste mit der Nennung der Bohnenanzahl als Zeichen und die Box, auf welche gezeigt wird (und die als Stellvertreter für die Bohnenanzahl fungiert), als Referenzkontext (s. viertes epistemologisches Dreieck).

(4)



Diese metaphorische *Verwendung* der Box könnte eine Grundlage für eine spätere *Betrachtung* der Box als Metapher für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen als Platzhalter oder ein Zeichen dafür sein, dass die Schülerinnen die metaphorische Betrachtungsweise aus dem Vorfeld der Episode trotz der konkreten Befüllung der Boxen mit Bohnen auch *in* dieser Episode einnehmen.

Es gibt noch weitere Indizien, die diese Einschätzung unterstützen, da sie für die mathematische Brille der Mädchen sprechen: die Art und Weise der Nennung der Lösungen in <49> (s. S. 180) und <105> (s. S. 196), Stefanies Äußerungen zu den ‚krummen Zahlen' (<60> (s. S. 186), <64> (s. S. 188)), der rechnende Umgang mit den Bohnenanzahlen, eine metonymische am Material verankerte abstrakte Zeigegeste in <73> (s. S. 189) sowie die (bezogen auf *die* Bohnen) falsche Deklination des unbestimmten Artikels. Als Beispiel für das letzte Indiz sei Beitrag <42> angeführt: „Dann musst Du hier überall noch *einen* reintun". Da von Bohnen die Rede ist, müsste es eigentlich heißen: ‚Dann musst Du hier überall noch *eine* reintun". Die verwendete maskuline Form gleicht der Sprechweise, die Schülerinnen und Schüler häufig beim Rechnen im Mathematikunterricht annehmen, und unterstreicht somit, dass sich die Schülerinnen auf einer Zahlenebene bewegen. Die Klassifizierung der zweiten Geste aus <73> als metonymische am Material verankerte abstrakte Zeigegeste ist bei der in der Rekonstruktion des Lösungsprozesses festgehaltenen Deutung dieses Beitrags (s. S. 190) eindeutig: „15 *(deutet auf Anordnung B)*, *(zeigt nacheinander auf zwei der weißen Boxen)* nee, einer zu wenig ist da". Das Zeigen auf zwei der weißen Boxen ersetzt metonymisch das Einfüllen von je einer Bohne in die beiden Boxen. Wir haben angenommen, dass die Befüllung der dritten weißen Box gedanklich erfolgt, so dass die Gesamt-Bohnenanzahl für Anordnung B gedanklich auf 18 angehoben wird und sie somit um eins kleiner ist als diejenige von Anordnung A (aktuelle Befüllung der Boxen s. Tabelle am Rand).



s	7
w	4

Es stellt sich die Frage, warum die Schülerinnen überhaupt wieder zum Befüllen der Boxen zurückkehren, obwohl sie diese im Vorfeld der Episode schon nur noch als Gedankenstütze genutzt haben und in dieser Episode zumindest die metaphorische Verwendung ebenfalls zu beobachten ist. In Silkes Beitrag aus dem Vorfeld der Episode wird die kognitive Belastung, die die gleichzeitige Abfrage des aktuellen Befüllstands pro Box sowie die Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahl ihr abverlangen durch die langen Pausen sehr deutlich. Es ist auch Silke, die im Anschluss an ihren Beitrag zum Befüllen der Boxen zurückkehrt. Demnach ist es denkbar, dass sie selbst die Schwerfälligkeit ihres Lösungsversuchs bemerkt hat und daher beschließt, einen Teil der zu verarbeitenden Information quasi auszulagern. Allerdings würde es grundsätzlich ja ausreichen, die aktuelle Befüllungszahl zu notieren oder in der konkreten Situation durch Befüllen oder sogar nur Belegen einer Box festzuhalten, da die Schülerinnen die Gesamt-Bohnenanzahlen ja nicht durch Zählen ermitteln, sondern berechnen.[2] Aufgrund der bisherigen Analyse scheint es für die Schülerinnen eigentlich auch nicht essentiell, dass in allen Boxen tatsächlich Bohnen liegen. Vielmehr ist es vermutlich die Spannung zwischen der Sicht auf die Boxen als Stellvertreter der tatsächlich in ihnen liegenden Bohnen, welche zunächst von der Aufgabenstellung angeregt wird, und den Boxen als Metaphern, die die Schülerinnen zunächst davon abhält, nur je eine Box entsprechend zu befüllen bzw. zu belegen: wenn nur je eine Box befüllt wird, muss auch die Befüllung metaphorisch verstanden werden – nämlich als Speicherung des aktuell zu betrachtenden Wertes, und nicht mehr als konkrete Befüllung im Sinne der Aufgabenstellung. Letztere Auffassung stößt sich bei einer solchen Befüllung nämlich mit den Bedingungen, die die Aufgabe an die Befüllungen der Boxen stellt.

Wir schließen die nähere Betrachtung der Gestik für diese Episode mit der Suche nach gesture-speech-mismatches ab. Es finden sich überall dort mismatches, wo verbale Äußerungen mittels Adverbien oder Demonstrativpronomen durch (abstrakte?) Zeigegesten spezifiziert werden, sowie beim Abzählen bzw. bei der Benennung einer bestimmten Anzahl von Bohnen, da nur durch die Gesten deutlich wird, was überhaupt gezählt bzw. wovon

[2]Hier ist allerdings anzumerken, dass die Merkfunktion des Befüllens beim ersten sukzessiven Verfahren nicht so leicht durch eine einfachere Variante zu ersetzen ist, da auch nach Beendigung eines Schrittes nicht unbedingt gleich viele Bohnen in den Boxen einer Farbe liegen. Da sich dieses Verfahren in der Episode aber nicht durchgesetzt hat, kann dies nicht der Grund für das Festhalten am Befüllen der Boxen sein.

die Anzahl benannt wird. Darüber hinaus lassen sich noch die folgenden mismatches finden (falls mehrere Gesten in dem wiedergegebenen Ausschnitt eines Beitrags vorhanden sind, ist der mismatch durch Fettdruck kenntlich gemacht):

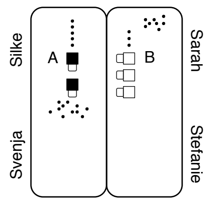
Silke, Ausschnitt aus <16> (s. S. 173)
Das sind neun, plus [mmm] *(zeigt mit ihrem Stift auf die von ihr aus betrachtet rechte schwarze Box)* sind 13, ne? ...

Silke, <38> (s. S. 180)
12 *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*.

Silke, <48> (s. S. 180)
Sind fünf und fünf *(berührt nacheinander die beiden schwarzen Boxen)*, 15 ***(deutet mit der Hand auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A****; wendet sich anschließend ihrem Heft zu)*

Svenja, <73> (s. S. 189)
15 *(deutet auf Anordnung B)*, ***(zeigt nacheinander auf zwei der weißen Boxen)*** nee, einer zu wenig ist da

Silke, <96> (s. S. 195)
(umrandet mehrmals mit Daumen und Zeigefinger die einzelnen Bohnen aus Anordnung A; ihr Daumen streicht dabei auf der einen Seite der Bohnen entlang, der Zeigefinger auf der anderen; wenn sie an einem Ende der Bohnenreihe angelangt ist, führt sie die Fingerspitzen zusammen) Ist hier auch 21?



In <16> liefert die Geste den sprachlich lediglich durch ein überlegendes „mmm" bezeichneten Summanden.

In <38> und <48> wird verbal jeweils die Gesamt-Bohnenanzahl für eine Anordnung genannt. Silke zeigt aber in beiden Fällen auf die einzelnen Bohnen der fraglichen Anordnung. Aus diesem Widerspruch zwischen verbaler Information und gestischem Verweis lässt sich schließen, dass es jeweils die einzelnen Bohnen sind, die eine bereits vorher bekannte Anzahl zur benannten Gesamt-Bohnenanzahl ergänzen. Insofern halten die Gesten über die verbalen Angaben hinausgehende Informationen bereit, die sie zu gesture-speech-mismatches machen.

Aus der fettgedruckten Geste in <73> lässt sich schließen, warum sich in Anordnung B Svenjas Meinung nach *nur* eine Bohne zu wenig befindet, obwohl die aktuelle Befüllungssituation (7 | 4) als Gesamt-Bohnenanzahl 19 für Anordnung A und 15 für Anordnung B liefert (s. auch S. 205).

In <96> fragt Silke zwar nach der Gesamt-Bohnenanzahl, umrandet aber nur die einzelnen Bohnen. Dies zeigt, dass es wohl die einzelnen Bohnen sind, die ihr Schwierigkeiten bereiten.

Die Idee der gesuchten Unbekannten ist bei der von den Schülerinnen gewählten Herangehensweise nur latent vorhanden: sie ‚probieren, ob das auch mit so und so vielen Bohnen geht'. Ihnen ist also zwar bewusst, dass sie bestimmte Befüllungszahlen suchen müssen, die zu einer Gleichheit der Gesamt-Bohnenanzahlen der beiden Anordnungen führen, der eigentliche Lösungsprozess ist aber davon geprägt, bestimmte Bohnenanzahlen für beide Anordnungen festzusetzen, und nicht dadurch, dass die Schülerinnen sich durch Ausnutzen der Gleichheitsbeziehung auf die Suche nach den/der Unbekannten machen.

In dieser Episode spielt zum einen die Denkhandlung des Strukturierens eine Rolle. Die Schülerinnen ermitteln die gesuchten Gesamt-Bohnenanzahlen der Anordnungen nicht einfach durch Abzählen, sondern durch Ausnutzung der durch die Boxen der Gesamt-Bohnenmenge einer Anordnung aufgeprägten Struktur. Bei der zweiten Variante des sukzessiven Befüllens müssen sie die ermittelten Gesamt-Bohnenanzahlen ständig nach größer/kleiner-Relationen ordnen, um herauszufinden, in welcher Anordnung weitere Bohnen zu ergänzen sind. Gemäß der bei der Rekonstruktion des Lösungsprozesses festgehaltenen Deutung der Beiträge <78> und <81> (s. S. 191) generiert Stefanie ihren dortigen Vorschlag durch systematisches Überlegen und will nicht einfach etwas probieren. Wir gehen davon aus, dass sie die Struktur der Boxensituation analysiert, um zu ermitteln, was passen könnte.

Zum anderen muss erörtert werden, inwiefern in dieser Episode auch die Denkhandlung des Konstruierens zum Tragen kommt. Die von den Schülerinnen verwendeten bzw. konstruierten Lösungsansätze orientieren sich an den Bedingungen der Aufgabenstellung. Insofern scheint also der für die

Algebra typische *way of thinking* zur Denkhandlung des Konstruierens auf: neue Objekte werden so konstruiert, dass sie vorhandenen Regeln genügen (vgl. S. 12). Da die verschiedenen Lösungsansätze aber so durchmischt zu beobachten sind, bleibt das Ergebnis des Konstruktionsprozesses – das Lösungsverfahren als Objekt (in Harels Terminologie der zugehörige *way of understanding* (vgl. S. 10)) – diffus. In gewisser Weise scheinen die Schülerinnen in dieser Episode also in der Denkhandlung des Konstruierens ‚gefangen': sie konstruieren Lösungsansätze, diese bleiben aber prozesshaft implizit.

Bereits in der zusammenfassenden Beschreibung des Lösungsverfahrens (s. S. 197 ff.) wurde festgestellt, dass die handelnde Bearbeitung der Aufgabe den Schülerinnen eine große Koordinierungsleistung abverlangt, die sie zum Teil nicht erfüllen können und die dann zu Konfusionen führt. Betrachten wir diesen Aspekt nun vor dem Hintergrund der Analyse der Rolle des Materials (also unter dem Gesichtspunkt, dass die Schülerinnen die Befüllung der Boxen wohl nur als Merk-Möglichkeit für die aktuellen Befüllungszahlen nutzen), so scheint das konkrete Befüllen aller Boxen mit Bohnen dem Lösungsprozess eher abträglich. Allerdings habe ich in Berlin et al. (2009) von einer anderen Mädchengruppe berichtet, die die aktuellen Befüllungen gar nicht festhielt und dadurch in Verwirrung geriet. Dort beruhigte sich die Situation, als die Schülerinnen die gefundenen Ergebnisse in einer Tabelle aufschrieben. Man kann vermuten, dass auch die Schülerinnen der vorliegenden Episode gut beraten wären, wenn sie die aktuellen Befüllungsstände auf einfache Art und Weise – also z. B. durch Belegen einer Box je Farbe – festhielten, da sie so Konfusionen durch wiederholtes Zählen und Überprüfen, ob gleich viele Bohnen in allen gleichfarbigen Boxen liegen, vermeiden könnten. Dazu wäre jedoch eine Lösung von der Anweisung des Aufgabentextes nötig, die Boxen tatsächlich zu befüllen. Hierin liegt für die Schülerinnen vermutlich die Schwierigkeit: Der Aufgabentext verlangt, die Boxen nach den angegebenen Regeln zu befüllen. Für die Schülerinnen ist es vielleicht akzeptabel, sich dies nur vorzustellen (wie im Vorfeld der Episode), aber nicht, die Nutzung des konkreten Materials nach ihren Bedürfnissen einfach anzupassen, also z. B. nur noch eine Box pro Farbe entsprechend zu belegen. Damit würde nämlich zwar mit dem konkreten Material gearbeitet, aber die angegebenen Regeln nicht beachtet. Sollte diese Hypothese zutreffen, würden die Schülerinnen in gewisser Weise also in ihrer Entwicklung dadurch behindert, dass sie die Aufgabenstellung und den Umgang mit dem konkreten Material zu ernst nehmen, sich also nicht die Freiheit nehmen, sich nur um das Zahlenproblem dahinter zu kümmern und das konkrete Material als Hilfsmittel zu verwenden, dessen Gebrauch den Bedürfnissen im Lösungsprozess angepasst werden darf.

Trotz allen Sträubens, sich vom konkreten Befüllen der Boxen mit Bohnen zu lösen, kann man aber auch bei dieser Gruppe erste Schritte in Richtung einer Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen ausmachen, die vom Material geleitet sind. Dies ist zum einen natürlich die metaphorische *Betrachtung* der Boxen im Vorfeld der Episode. Zum anderen ist aber auch die metaphorische *Verwendung* der Boxen durch die am Material verankerten abstrakten Zeigegesten in der Episode anzuführen: die Schülerinnen verzichten auf eine genaue Überprüfung aller Boxenbefüllungen, zählen stellvertretend für jede Farbe nur bei einer Box die Anzahl der Bohnen nach und gehen anschließend davon aus, dass sich in allen Boxen einer Farbe die ermittelte Anzahl an Bohnen befindet. Im *davon ausgehen, dass* scheint in einer rudimentären Form eine abstrakte Vorstellung von Variablen auf. Bei der Bestimmung der Gesamt-Bohnenanzahlen für die Anordnungen nutzen die Schülerinnen die Boxen durch ihre am Material verankerten abstrakten Zeigegesten als *material anchor* für ihren Lösungsprozess.

Die Ausführungen legen die Vermutung nahe, dass die Schülerinnen dieser Gruppe in großen Schritten einer abstrakten, aber sicher verankerten, Vorstellung von Variablen zustreben werden, sobald ihnen der Hilfsmittel-Charakter des Materials ganz klar (gemacht) wird.

8.3 Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander

In dieser Episode findet man keine Stelle, an der eine Schülerin eines der beobachteten sukzessiven Lösungsverfahren alleine durchführt. Die Beiträge der Schülerinnen sind sehr miteinander verschränkt. Außerdem ist eine ausgeprägte Dominanz von Kreator-Beiträgen zu beobachten. Die Episode ist demnach insgesamt sehr dicht. Man kann die Interaktion in dieser Episode wohl sogar auf der Schwelle zur kollektiven Ideenentfaltung (Brandt & Höck 2011) sehen: einerseits lässt sich zwar immer noch feststellen, von wem bestimmte Aspekte in die Diskussion / Aufgabenlösung eingebracht werden, andererseits ist die Zuordnung zu den verschiedenen Ausprägungen der Kreator-Rolle aber eher unbefriedigend. Nach den bisherigen Kriterien zur Einordnung, wären nämlich fast alle Kreator-Beiträge (bis auf sehr wenige innovative: <5>, <19>, <60>, <63>) als assistierend einzustufen, da nie von einer Schülerin allein eines der beobachteten sukzessiven Lösungsverfahren komplett durchgeführt wird, sondern stets nur einzelne Verfahrensschritte. Zwei Sorten von Beiträgen müssen dabei aber gesondert kommentiert werden. (1) Die Episode ist von vielen Kreator-Beiträgen durchzogen, in denen (nur) geklärt wird, wie viele Bohnen gerade in den Boxen liegen (z. B. <3> und <4>, <8> und <9>, <34>). Dies ist in der speziellen Bearbeitungsweise dieser Episode begründet. Es scheint passend, sie ebenfalls als assistierende Kreator-Beiträge anzusehen und das Repertoire des assistierenden Kreators entsprechend zu erweitern. (2) Einige Beiträge heben sich von den anderen assistierenden Kreator-Beiträgen ab: sie arbeiten nicht vorhergegangenen Beiträgen zu, beschäftigen sich auch nicht allein mit der aktuellen Befüllung einer Box, sondern stoßen eigenständig die Durchführung eines nächsten Lösungsschrittes an bzw. führen diesen sogar aus (z. B. <13>, <42>, <78>). Um dieses dem Lösungsprozess Richtung und Takt gebende Plus dieser Beiträge zu würdigen, sollen sie als ausführende Kreator-Beiträge aufgewertet werden.

Die dennoch verbleibende Fülle an assistierenden Kreator-Beiträgen wirft die Frage auf, wem oder was eigentlich assistiert wird. Die spärlich vorhandenen innovativen Kreator-Beiträge können diese Lücke nämlich nicht ausfüllen, und es finden sich auch nicht immer ausführende Kreator-Beiträge, die die assistierenden Beiträge anstoßen würden. Die Annahme, dass sich das Lösungsverfahren tatsächlich im Kollektiv der Beiträge konstituiert, liefert eine plausible Antwort: die Einzelbeiträge der Schülerinnen stellen nur Teile des großen Ganzen dar, und so können auch assistierende Beiträge z. T. unmittelbar eingebracht werden. Insofern zeigt sich in dieser Episode eine kollektive Ideenentfaltung (Brandt & Höck 2011).

Allerdings wird trotzdem deutlich, dass die Schülerinnen unterschiedlich viel zum Lösungsprozess beitragen. Als innovative Kreatorinnen treten nur Stefanie und Svenja auf. Stefanie führt die zweite Variante des sukzessiven Befüllens ein (<19>, in modifizierter Form auch schon in <5>), und auch ihre Anmerkung zu den krummen Zahlen (<60>) ist ein neues Datum in der Diskussion, das möglicherweise auf günstige Art und Weise aufgegriffen wird (von Svenja in <63>), auch wenn es sachlich etwas fragwürdig erscheint (s. S. 187). Svenja führt den dritten Schritt der zweiten Variante des sukzessiven Befüllens aus, indem sie von einem Gleichstand ausgehend nur in den schwarzen Boxen Bohnen ergänzt (<63>). Es sind auch Stefanie und Svenja, die in dieser Episode insgesamt in gewisser Weise Führungsrollen einnehmen – Svenja aber erst ab Szene 5. Diese gehen jedoch nicht primär auf ihre innovativen Beiträge zurück, sondern hauptsächlich darauf, dass sie ausführende Kreator-Beiträge liefern und die Durchführung der Verfahren (z. T. auch nur durch assistierende Beiträge) strukturieren. Bei Stefanie wird dies besonders deutlich: z. B. in ihrem Frage-Antwort-Spiel mit Silke in den Szenen 1 und 2 (S. 173, 177; bis auf <5> (innovativ) nur assistierende Kreator-Beiträge) sowie in ihren Anweisungen in Szene 6 (S. 189; <78> und <81>, ausführende Kreator-Beiträge) und ihrer darauffolgenden abwartenden Zurückhaltung in Szene 7 (S. 192). Interessant ist in diesem Zusammenhang auch der – von Svenja initiierte – bewusste Wechsel der ausführenden Personen in <57>. Im Anschluss an <57> übernimmt Svenja zunächst die Führungsrolle und auch Sarah wird aktiver – in produktiver Hinsicht, sie ist also nicht mehr nur mit den ‚schönen' Bohnen beschäftigt. Allerdings muss bemerkt werden, dass Stefanie und Silke sich hier trotzdem mehr beteiligen als Svenja und Sarah im ersten Teil der Episode. Als sich Svenja in Szene 6 von Sarah aus dem Konzept bringen lässt, übernimmt Stefanie wieder die Führung. Im Unterschied zum ersten Teil der Episode bleiben daraufhin aber alle Schülerinnen aktiv in den Lösungsprozess eingebunden.

Die Überprüfungen der (vermeintlich) gefundenen Lösungen (Szene 3, Szene 8), die für den erfolgreichen Ausgang dieser Episode so entscheidend sind, werden von Silke angestoßen bzw. auch durchgeführt. Hier ist sie also die Aus*führende*. Ansonsten nimmt sie zwar keine Führungsposition ein, trägt aber – insbesondere im Dialog mit Stefanie – wesentliche Informationen bzw. Zwischenergebnisse zum Lösungsprozess bei.

Neben den verschiedenen Ausformungen der Sprecherrolle Kreator findet man in dieser Episode Imitationen, die lediglich zu imitieren scheinen (<68>, S. 188; <98>, S. 195; <103>, S. 195), aber auch solche, die offenbar das Gesagte festhalten sollen: in beiden Fällen handelt es sich um die Imitation der Nennung der Gesamt-Bohnenanzahl für eine Anordnung, die für die Fortführung des Lösungsverfahrens benötigt wird (in den folgenden Transkriptausschnitten durch Fettdruck hervorgehoben).

Ausschnitt aus Szene 2 (s. S. 177)

23	Silke	Das sind eins, zwei, drei, vier, fünf # *(zeigt nacheinander mit dem Stift auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A)*, *(zeigt erst auf die von ihr aus gesehen linke schwarze Box in Anordnung A, hebt sie dann kurz an)* vier im Sinn, sind neun, *(hebt die andere schwarze Box kurz an)* sind **13** (..)
24	Stefanie	# *greift nach Bohnen aus dem Vorrat*
25	Stefanie	**13**
26		*Stefanie, Svenja und Silke reden plötzlich alle durcheinander (unverständlich); Silke greift nach Bohnen aus dem Vorrat; Stefanie legt eine Bohne in die eine schwarze Box und bewegt ihre Hand dann in Richtung der anderen, in diese hat Svenja dann aber schon eine Bohne gelegt*

Ausschnitt aus Szene 3 (s. S. 179)

36	Stefanie	# Drei, drei, neun *(zeigt nacheinander auf die weißen Boxen)*, ## 12.
37	Sarah	# In den [ganzen] Schachteln müssen auch überall gleich viele sein *(zeigt auf Anordnung B)*.
38	Silke	## **12** *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*.
39	Stefanie	Na, nur von *(zeigt mit zwei Fingern der rechten Hand auf die weißen Boxen)*
40	Silke	**12**,
41	Stefanie	Und das? *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*
42	Silke	*(greift nach Bohnen aus dem Vorrat)* Dann musst Du hier überall noch einen reintun *(bewegt ihre Hand zu einer weißen Box)*

Außerdem gibt es fünf paraphrasierende Beiträge:

- <45>: Stefanie wiederholt in ihren eigenen Worten Silkes Schlussfolgerung aus <42>, nachdem sie sich von deren Begründung hat überzeugen lassen,
- <59>: Svenja wiederholt für Sarah Silkes Erklärung aus <53> in ihren eigenen Worten,
- <61>: Silke wiederholt ihre eigene Erklärung aus <53> in neuen Worten,
- <64>: Stefanie wiederholt ihre eigene Aussage aus <60> zu den krummen Zahlen in neuen Worten, um sie noch mal in die Diskussion einzubringen und
- <95>: Svenja beendet ihre Schlussfolgerung aus <91>, die sie in der Zwischenzeit begonnen hat, handelnd umzusetzen; dabei paraphrasiert sie Stefanies Beitrag <92>, in welchem die Schlussfolgerung bereits verbalisiert wurde.

Die drei zuerst genannten paraphrasierenden Beiträge wurden im Zuge von Konfrontationen unterschiedlicher Situationsdefinitionen hervorgebracht. Alle drei Konfrontationen unterschiedlicher Situationsdefinitionen fördern das Verständnis einzelner Schülerinnen. Die paraphrasierenden Beiträge haben dabei aber unterschiedliche Funktionen.

Ausschnitt zu <45>

36	Stefanie	# Drei, drei, neun *(zeigt nacheinander auf die weißen Boxen)*, ## 12.
37	Sarah	# In den [ganzen] Schachteln müssen auch überall gleich viele sein *(zeigt auf Anordnung B)*.
38	Silke	## 12 *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*.
39	Stefanie	Na, nur von *(zeigt mit zwei Fingern der rechten Hand auf die weißen Boxen)*
40	Silke	12,
41	Stefanie	Und das? *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*
42	Silke	*(greift nach Bohnen aus dem Vorrat)* Dann musst Du hier überall noch einen reintun *(bewegt ihre Hand zu einer weißen Box)*
43	Stefanie	Nein, nein, hier sind doch noch *(zeigt auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B)*
44	Silke	*(legt die Bohnen wieder zum Vorrat)* Ja, # hab ich dazu gerechnet,
45	Stefanie	# *(greift nach Bohnen aus dem Vorrat)* Ja, dann tu mal eins, zwei *(legt in zwei der drei weißen Boxen eine Bohne dazu)*, *(nimmt noch eine Bohne aus dem Vorrat und legt sie in die verbliebene weiße Box)* drei ...

Stefanie meint, die einzelnen Bohnen in Anordnung B in der dafür ermittelten Gesamt-Bohnenanzahl bisher nicht berücksichtigt zu haben. Sie wird damit konfrontiert, dass Silke weitere Bohnen in den Boxen der Anordnung ergänzen will, und verweist mit Nachdruck darauf, dass die einzelnen Bohnen noch zu berücksichtigen seien. Silke legt daraufhin die Bohnen, die sie in die Boxen füllen wollte, wieder weg (dies kann man als ihre Reaktion auf die Konfrontation mit Stefanies Äußerung werten), sagt aber, dass sie die einzelnen Bohnen bereits „dazu gerechnet" hätte. Stefanies paraphrasierender Beitrag <45> schließt die Auseinandersetzung mit Silke ab, da sie dadurch zum Ausdruck bringt, dass sie sich mit dieser Auskunft zufrieden gibt.

Der zweite und dritte oben genannte paraphrasierende Beitrag (<59> und <61>) stammen beide aus Szene 4, in welcher Svenja und Sarah nacheinander ihre Irritation darüber zeigen, dass ihre Mitschülerinnen eine Befüllung als Lösung akzeptieren, bei welcher nicht in allen Boxen gleich viele Bohnen liegen. Hier dienen die paraphrasierenden Beiträge dazu, die bereits auf Svenjas Nachfrage hin gegebene Begründung für Sarah zu wiederholen.

In dieser Episode lassen sich zwei weitere Konfrontationen unterschiedlicher Situationsdefinitionen finden, die nicht das Verständnis einzelner Schülerinnen fördern, sondern den kollektiven Lösungsprozess voranbringen. (1) Silkes Verwirrung über die aktuellen Boxen-Befüllungen und das daraus resultierende In-Frage-Stellen derselben in <27> und <34> führen dazu, dass die vermeintlich gefundene Lösung noch einmal überprüft wird und so korrigiert werden kann. (2) Während Svenja in <73> – wie bereits erörtert wurde – eine Aussage über gedanklich weiter aufgefüllte Boxen macht, bezieht Sarah diesen Beitrag offenbar auf die aktuelle, tatsächliche Befüllungssituation und ergänzt auf Svenjas Äußerung hin eine Bohne in einer weißen Box. Die Situationsdefinitionen der Schülerinnen stimmen nicht überein:

66	Svenja	*(legt in die andere schwarze Box zwei Bohnen dazu)* Sieben. … Eins, zwei, drei, vier, fünf *(zeigt nacheinander auf die einzelnen Bohnen in Anordnung A)*, fünf mal äh *(zeigt auf die schwarzen Boxen)*
67	Silke	19.
68	Sarah u. Svenja	19.
69	Svenja	Und jetzt hier sind *(wendet sich Anordnung B zu)*,
		…
73	Svenja	15 *(deutet auf Anordnung B)*, *(zeigt nacheinander auf zwei der weißen Boxen)* nee, einer zu wenig ist da
74	Sarah	Hier *(legt eine Bohne in eine weiße Box)*

Es wurde erörtert, dass Sarahs Handlung durchaus im Sinne der ersten Variante des sukzessiven Befüllens wäre, wenn Svenja denn eine Aussage über die aktuelle, tatsächliche Befüllungssituation gemacht hätte. Silke und Svenja diskutieren in den Folgebeiträgen jedoch, dass durch Sarahs Bohne die Regel zur gleichen Befüllung aller Boxen einer Farbe verletzt wird. Daran zeigt sich, dass sie das Hinzufügen der Bohne nicht als Zwischenschritt verstehen – wie es in der ersten Variante des sukzessiven Befüllens aber aufzufassen wäre. Bei Svenja gründet dies in ihrer anderen Situationsdefinition: das Hinzufügen einer Bohne in Anordnung B macht für sie schon deshalb keinen Sinn, da sie weiß, dass ingesamt vier Bohnen fehlen. Ob Silke sich über den hypothetischen Charakter von Svenjas Aussage <73> im Klaren ist und demnach vor der gleichen Situationsdefinition wie Svenja über Sarahs Bohne urteilt, oder ob sie davon ausgeht, dass Svenja in <73> eine Aussage über die tatsächliche Befüllungssituation macht, wird nicht klar. Im zweiten Fall könnte sie befürchten, dass Sarah meint, durch das Hinzufügen der Bohne eine Lösung erzeugt zu haben, und deshalb an die Regel zur Befüllung der Boxen erinnern. Stefanie sieht in <78> hingegen, dass unter der Vorraussetzung des Gleichstandes in beiden Anordnungen nach Hinzufügen von Sarahs Bohne, durch Ergänzen von je zwei weiteren Bohnen in beiden Anordnungen der Gleichstand erhalten sowie eine gleichmäßige Befüllung erreicht werden kann.

78	Stefanie	Jetzt tu mal überall noch einen rein #, in die drei *(zeigt auf die weißen Boxen)* ## und dann tust Du ### in die beiden *(zeigt auf die schwarzen Boxen)* auch noch einen jeweils rein.

Damit profitiert der kollektive Lösungsprozess von dem Missverständnis zwischen Svenja und Sarah, da die Schülerinnen Stefanies Aufforderung nachkommen und so am Ende der Episode nur noch drei Bohnen – nämlich die drei bisher lediglich von Svenja antizipierten – von der Konkretisierung einer nächsten Lösung entfernt sind.

Was lässt sich hier nun insgesamt über die Rolle der Interaktion für die individuellen Lernprozesse der Schülerinnen sagen? Sarah und Svenja profitieren, da sie durch Silke und Stefanie erfahren, dass nur in Boxen gleicher Farbe gleich viele Bohnen liegen müssen und nicht in allen Boxen. Dies ist für eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung zentral. Ansonsten finden sich lokale Begebenheiten, in denen einzelne Schülerinnen von der Unterstützung / Kontrolle durch eine Mitschülerin profitieren (z. B. <41> - <45>, S. 180; <66> / <67>, S. 188). Diese betreffen jedoch nur eine rechnerisch-ausführende Ebene und nicht die Systematik der Lösungsverfahren.

Aufgrund der kollektiven Ideenentwicklung ist es schwierig zu beurteilen, wer die Aufgabe auch alleine lösen könnte bzw. wer auf die Interaktion mit den anderen angewiesen ist. Die Schülerinnen sind letztendlich alle in den Lösungsprozess eingebunden und erscheinen am Ende auch kompetent in der Durchführung des Prozesses. Stefanie traut man den Alleingang am ehesten zu, da sie ohnehin in großen Teilen der Episode die Führung übernimmt, und ihr die Regeln zur Befüllung der Boxen von Anfang an klar sind. Allerdings nimmt ihr Silke viel Rechen- und Zählarbeit ab, die sie in Einzelarbeit selbst leisten müsste, was durchaus auch Schwierigkeiten bereiten könnte. Silke hat im Vorfeld der Episode die erste Variante des sukzessiven Befüllens eingeführt, mit deren Hilfe sie grundsätzlich alle Lösungen finden könnte. Zwei Aspekte lassen aber daran zweifeln, dass sie dies allein tatsächlich erfolgreich zu Ende geführt hätte. Zum Einen macht ihr bei der Ermittlung der ersten Lösung der Kontrollschritt Schwierigkeiten, so dass sie die Lösung (2 | 2) zwar handelnd erzeugt, aber nicht bemerkt. Zum Anderen wechselt sie, nachdem die erste Lösung gefunden wurde, zu einem Ausprobieren der Paare (4 | 4) (ohne Konkretisierung an der auf dem Tisch liegenden Boxensituation) und (3 | 3) (mit Konkretisierung). Nachdem die Schülerinnen bei der Lösungssuche die Befüllung der Boxen zu (3 | 2) modifiziert haben, will Silke einen neuen Lösungsversuch starten, scheint aber unschlüssig (<1>), obwohl sie eigentlich nur wieder ihr Verfahren aus dem Vorfeld der Episode anwenden müsste. Ob sie sich allein (insbesondere ohne Stefanies (innovativen) Vorschlag (<5>)) wieder zurecht gefunden hätte, lässt sich nur mutmaßen. Dass Svenja in der zweiten Hälfte der Episode zum Teil die Führung übernimmt und ausgehend von der Lösung (5 | 4) im (innovativen) Beitrag <63> den Schritt zur Störung des Gleichgewichts in der zweiten Variante des sukzessiven Befüllens etabliert, deutet zunächst an, dass sie auch allein mit der Aufgabe klarkommen könnte. Allerdings schlägt sie zu Beginn der Episode in <13> noch eine Fortsetzung des probierenden Vorgehens vor und ist sich bis <54> auch noch nicht im Klaren darüber, dass lediglich in Boxen gleicher Farbe gleich viele Bohnen liegen müssen. Diese beiden Aspekte sprechen eher dagegen. Sarah ist am schwierigsten einzuschätzen. Ihre Beschäftigung mit den ‚schönen' Bohnen in der ersten Hälfte der Episode sowie die Tatsache, dass ihr bis <58> die Regeln zur Befüllung unklar sind, sprechen eher gegen die Möglichkeit einer eigenständigen Bearbeitung der Aufgabe. Ihr antizipierendes Vorgehen aus dem Vorfeld der Episode sowie ihre assistierenden Beiträge zur Lösungsfindung am Ende der Episode lassen hoffen.

Mit leichten Abstufungen kann man die Frage „Könnte die Schülerin die Aufgabe auch allein erfolgreich bearbeiten?" also für alle Schülerinnen mit einem „Ja, aber ..." beantworten. Die Episode zeigt, wie sich durch die Zusammenarbeit der Schülerinnen eine kollektive Ideenentwicklung entfaltet, und wie diese die Einzelnen unterstützt.

Über die Rolle der Interaktion für die Ablösung vom Konkreten lassen sich aus dieser Episode keine Einsichten gewinnen, da die Schülerinnen bis auf eine Ausnahme (<73>) die konkreten Boxen mit den aktuell betrachteten Anzahlen von Bohnen befüllen. Sie hatten sich im Vorfeld der Episode zwar bereits kurzfristig davon gelöst, dann aber doch wieder begonnen, die Boxen zu befüllen. Bei der Erörterung der Rolle des Materials wurde dargelegt, dass die Schülerinnen dies offenbar zum Festhalten der aktuell betrachteten Belegungszahlen nutzen.

Kapitel 9

Zusammenfassung der Ergebnisse

Für die vorliegende Arbeit wurde folgende zentrale Frage formuliert:

Wie entwickeln sich Vorläuferformen zum Variablenbegriff in einer Lernumgebung zur Einführung in die Algebra, die den Schülerinnen und Schülern Erfahrungen mit Zahlenbeziehungen in einem konkret-gegenständlichen Kontext ermöglicht?

In diesem Kapitel nähern wir uns in zwei Etappen einer Antwort.

- Zunächst stellen wir die Lösungswege der Gruppen zu der Aufgabe *Knack die Box* (s. S. 78) vergleichend dar und resümieren die Ergebnisse zu den beiden Beobachtungsschwerpunkten (Kap. 9.1 bis 9.3). Im Hinblick auf die Beobachtungsschwerpunkte arbeiten wir entlang der Forschungsfragen, die in Kapitel 3 diesbezüglich konkretisiert wurden (s. S. 57). Dabei vergleichen wir zu jeder Forschungsfrage zunächst die entsprechenden Aspekte, die sich in den Interpretationen der drei Fallbeispiele gezeigt haben, um darauf aufbauend eine Antwort auf die jeweilige Frage zu geben.

- Auf dieser Grundlage können wir im abschließenden Unterkapitel (Kap. 9.4) Vorläuferformen algebraischen Denkens als flexible, epistemologische Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen charakterisieren und damit eine gebündelte Antwort auf die zentrale Frage geben.

9.1 Lösungswege

Alle drei Gruppen suchen systematisch nach Lösungen und entwickeln Verfahren, die grundsätzlich alle Lösungen in $\mathbb{N}$ erzeugen können, wenn man mit den leeren Boxen beginnt.

Die Gruppe N legt die Befüllung der Boxen einer Farbe hypothetisch fest, berechnet die daraus resultierende notwendige Befüllung der Boxen der anderen Farbe und überprüft anschließend, ob die ermittelte Zahl in $\mathbb{N}$ liegt. Die hypothetisch festgelegte Bohnenanzahl wird dabei systematisch erhöht.

Die Gruppen P und S befüllen hingegen die Boxen beider Farben sukzessive unter Beachtung der Bedingungen in der Aufgabenstellung. Sie verstehen diese Bedingungen gewissermaßen als Anweisungen, die in Schleifen zu befolgen sind, bis der gewünschte Zustand erreicht ist. Dabei sind zwei Varianten des sukzessiven Befüllens zu beobachten: Gruppe P sorgt stets dafür, dass in jedem Iterationsschritt die zweite Bedingung der Aufgabenstellung[1] erfüllt ist und überprüft, wann auch die erste Bedingung[2] erfüllt wird. Bei Gruppe S ist daneben auch noch die umgekehrte Variante zu beobachten: zunächst wird dafür gesorgt, dass beide Anordnungen gleich viele Bohnen enthalten (Bedingung 1). Dazu werden die Boxen derjenigen Anordnung mit insgesamt weniger Bohnen solange der Reihe nach mit je einer zusätzlichen Bohne befüllt, bis in beiden Anordnungen gleich viele Bohnen liegen. Falls daraufhin in allen Boxen einer Farbe gleich viele Bohnen liegen (Bedingung 2) ist eine erste Lösung gefunden. Unabhängig davon, ob Bedingung 2 an dieser Stelle erfüllt ist oder nicht, werden anschließend zwei Handlungsschritte ausgeführt, die man im Prinzip iterieren könnte, um alle Lösungen in $\mathbb{N}$ zu erzeugen. (1) In beiden Anordnungen wird je eine Bohne ergänzt. Dabei wird das Ziel der gleichmäßigen Befüllung der Boxen beachtet. Die Gleichheit zwischen den Bohnenanzahlen der Anordnungen bleibt auf diese Weise aufrecht erhalten. (2) Nach jeder Ergänzung von je einer Bohne pro Anordnung wird überprüft, ob in Boxen gleicher Farbe gleich

[1] In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen.

[2] In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt).

viele Bohnen liegen, so dass die Befüllungsstände der Boxen, die beide Bedingungen erfüllen, als Lösungen der Boxensituation festgehalten werden können.

Gruppe S wechselt in der betrachteten Episode zwischen den verschiedenen Varianten des sukzessiven Befüllens, so dass der Lösungsprozess etwas unorganisiert wirkt, obwohl die Schülerinnen eigentlich sehr wohl systematisch vorgehen.

9.2 Die Rolle des Materials

Wie wird das Material genutzt? Wie wird darauf Bezug genommen? Erscheint es in epistemologischen Analysen als zu deutendes Zeichensystem oder als Referenzkontext?

Vergleich der Fallbeispiele. Die Episode aus den Videos der Gruppe P wurde unter anderem deshalb als zweites Fallbeispiel gewählt, da diese Gruppe dem ersten Eindruck nach das konkrete Material ähnlich einsetzt wie Gruppe N (viele Zeigegesten und antizipierendes Arbeiten). Bei der Auswahl der Episode deuteten sich in dieser Hinsicht zwar auch schon kleine Unterschiede an (mehr Handlungen am Material als bei Gruppe N), durch die detaillierte Analyse des Lösungsprozesses von Gruppe P stellte sich schließlich aber doch eine substanzielle Verschiedenartigkeit trotz vorhandener Parallelen heraus. Dies soll hier nun erörtert werden.

Beide Gruppen (N und P) arbeiten in den ausgewählten Episoden antizipierend und zeigen oft auf Boxen und Bohnen. Während Gruppe N dabei aber im Laufe der Episode zu einer Betrachtungsweise gelangt, in der die Boxensituation und die Boxen selbst zu Metaphern für einen allgemeinen Zusammenhang auf Zahlenebene werden, scheint für Gruppe P die durchzuführende Befüllung der Boxen mit Bohnen zu wichtig zu sein, als dass sie die Boxensituation nur als Darstellungsmittel für ein abstraktes Problem ansehen könnten. In den Beiträgen der Gruppe P sind nämlich häufig sprachliche Konstrukte im Sinne von „da [in diese Box] kommen so und so viele [Bohnen] rein“ zu finden, und die Schüler konkretisieren zudem die gefundene Lösung am Ende durch Befüllen der Boxen mit Bohnen. Für Gruppe P wurde für die gewählte Episode demnach zunächst ein Stellvertreter-Verständnis in einem eher materiellen Sinne festgehalten.

Die metaphorische Betrachtung der Boxensituation und der Boxen selbst bei Gruppe N zeigt sich darin, dass die Schüler dieser Gruppe im Verlauf der Episode zu einem Vorgehen wechseln, bei welchem sie verbal Rechnungen äußern, aber auf dieser Ausdrucksebene keine Bezüge mehr zum Material herstellen. Teilweise nutzen sie gestische Verweise auf Boxen und Bohnen, um ihre Rechnungen zu verdeutlichen. Sie sprechen auch nicht mehr über die Befüllungen – so wie Gruppe P es macht. Sie haben erkannt, dass es eigentlich um die der Boxensituation zu Grunde liegende Struktur geht. Gefundene Lösungen werden nicht mehr konkretisiert, sondern als Zahlentupel in einer Tabelle festgehalten. Die Schüler bearbeiten ein Zahlenproblem unter Zuhilfenahme der Box als Metapher für eine sich entwickelnde Vorstellung von Variablen als Platzhalter und Unbekannte.

Auch wenn diese metaphorische *Betrachtung*[3] der Box bei Gruppe P (noch) ausbleibt, lassen sich doch am Material verankerte abstrakte Zeigegesten finden. Diese wurden als Zeichen dafür gewertet, dass die Schüler die Boxen z. T. metaphorisch *verwenden*: sie *tun so, als ob* sich eine bestimmte Anzahl an Bohnen darin befindet. Die Nutzung der Box als Stellvertreter geht bei diesen Gesten über ein Stellvertreter-Verständnis in einem rein materiellen Sinne ein Stück weit hinaus, da die Box an diesen Stellen eben keine tatsächlich eingefüllten Bohnen repräsentiert, sondern gedachte Bohnen. Es ist möglich, dass hierbei ein Grundstein für die metaphorische *Betrachtung* der Box gelegt wird, die für die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen als Platzhalter notwendig ist.

Insgesamt halten wir also fest, dass zwar beide Gruppen antizipierend arbeiten und die Boxen als Stellvertreter für Bohnenanzahlen verwenden, dies aber auf sehr verschiedenen Abstraktionsniveaus passiert.

[3]In den Analysen hat sich die Unterscheidung einer metaphorischen *Betrachtung* und einer metaphorischen *Verwendung* der Box als aufschlussreich erwiesen. Mit ihrer Hilfe lassen sich verschiedene Etappen in der Entwicklung des Variablenbegriffs herausstellen. Da diese Differenzierung hier demnach immer wieder eine Rolle spielen wird, sei an dieser Stelle auf ihre Relevanz explizit hingewiesen.

In der Episode der Gruppe S zeigt sich gegenüber den anderen beiden Gruppen noch eine weitere Variante des Umgangs mit dem Material: die Schülerinnen befüllen die Boxen während der gesamten Episode mit Bohnen und zählen diese immer wieder nach. Dies scheint zunächst darauf hinzudeuten, dass sie im ganz konkreten Umgang mit dem Material die Lösungen suchen und finden. Die ausführliche Interpretation der Episode sowie ein Blick in das Vorfeld der Episode zeichneten aber ein anderes Bild. Für das Vorfeld der Episode wurde anhand von zwei Beiträgen eine metaphorische *Betrachtung* der Boxen aufgezeigt, die auf eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen hindeutet. Daraufhin haben wir in der Episode selbst nach Anzeichen gesucht, dass sich diese Betrachtung irgendwie aufrecht erhält. Aufzeigen ließ sich dabei eine metaphorische *Verwendung* der Boxen durch abstrakte Zeigegesten gegen Ende der Episode. Zunächst befüllen die Schülerinnen zwar auch am Ende der Episode noch tatsächlich die Boxen mit Bohnen, bei der Überprüfung, ob eine Lösung gefunden ist, zählen sie aber nicht mehr in jeder Box die Bohnenanzahl nach, sondern nur noch bei einer Box jeder Farbe – stellvertretend für alle Boxen dieser Farbe. Sie *gehen* dann *davon aus, dass* sich in allen Boxen einer Farbe gleich viele Bohnen befinden. Bei der Ermittlung der Gesamt-Bohnenanzahlen für die beiden Anordnungen zeigen die Schülerinnen nacheinander auf die Boxen in den Anordnungen und verwenden sie auf diese Weise als Stellvertreter für die zugehörigen Bohnenanzahlen.

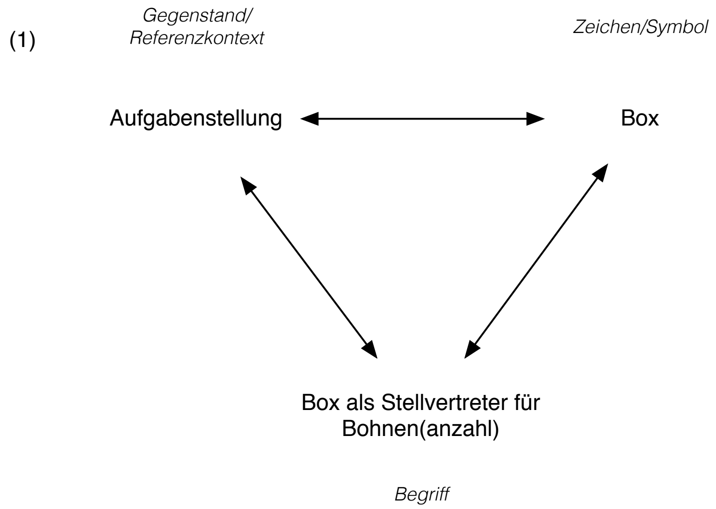
Dass die Schülerinnen das tatsächliche Befüllen der Boxen nutzen, um die aktuell betrachteten Bohnenanzahlen festzuhalten, schien ein plausibler Grund für ihre Rückkehr zum tatsächlichen Befüllen in dieser Episode zu sein (s. o.). Wir vermuteten, dass sie sich dabei keiner vereinfachten – besser zu handhabenden – Form bedienen (z. B. Belegen einer Box je Farbe), da sie zu sehr an der Aufgabenstellung festhalten, sich nicht ‚trauen' die Nutzung des Materials einfach ihren Bedürfnissen anzupassen. Am Schluss der Interpretation des Fallbeispiels der Gruppe S stand die Vermutung, dass die Schülerinnen dieser Gruppe in großen Schritten einer abstrakten, aber sicher verankerten, Vorstellung von Variablen zustreben werden, sobald ihnen der Hilfsmittel-Charakter des Materials ganz klar (gemacht) wird.

Letztlich ähneln sich also eher die Fallbeispiele der Gruppen P und S, da beide Gruppen die Boxen metaphorisch *verwenden*, aber durchaus auch noch (auf unterschiedliche Weise) an der Befüllung der Boxen festhalten. Die Gruppe N grenzt sich dadurch von den anderen beiden ab, dass sie durch die metaphorische *Betrachtung* der Boxen bei der Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen weiter voranschreitet.

Ergebnis. Das Material wird intensiv genutzt. Alle Gruppen bauen die Boxensituation mit den konkreten Boxen und Bohnen auf ihren Tischen auf. In den Lösungsprozessen sind handelnde Umgangsweisen mit den Boxen und Bohnen (z. B. tatsächliche Befüllung der Boxen mit Bohnen) und antizipierende (z. B. rein gedankliche Befüllung der Boxen) zu beobachten. Sprachlich wird hauptsächlich indirekt auf das Material Bezug genommen (z. B. durch ortsbestimmende Adverbien). Eine ausgeprägte auf das Material bezogene Gestik führt zur genaueren Bestimmung dieser verbalen Hinweise, die deren Interpretation überhaupt erst möglich macht. Die u. a. darin aufscheinende Häufung von *gesture-speech-mismatches* zeigt an, dass die Lernenden die Gestik nutzen, um Überlegungen vorzubringen, die sie sprachlich (noch) nicht ausdrücken (können).

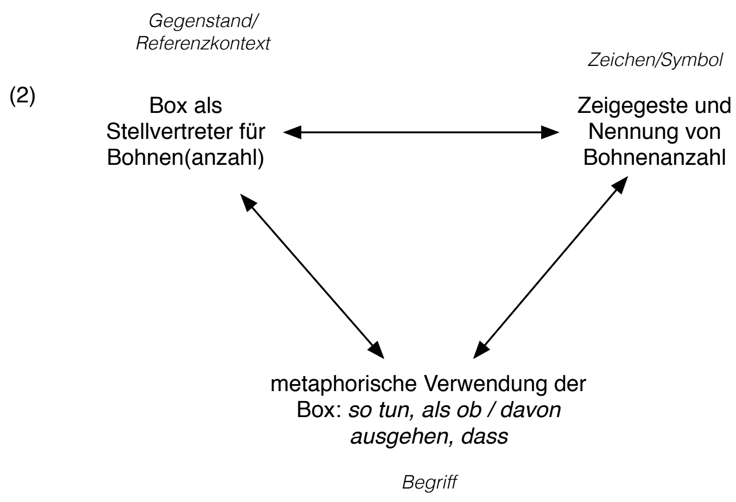
Die Box tritt als Stellvertreter für Bohnenanzahlen auf. Das Stellvertreter-Dasein fächert sich anhand der Frage, wie weitreichend es im Hinblick auf die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen ist, über die Gruppen hinweg in ein breites Spektrum auf. Dieses soll nun an fünf epistemologischen Dreiecken zusammenfassend dargestellt werden, die aus den Dreiecken der Fallbeispiele abgeleitet wurden. Dabei wird die doppelte Rolle der Boxen als zu deutendes Darstellungsmittel und Referenzkontext deutlich.

Um überhaupt zum Stellvertreter für Bohnenanzahlen werden zu können, muss die Box neu gedeutet werden – muss also als ein zu deutendes Darstellungsmittel begriffen werden. Lernende dürfen in ihr nicht mehr nur das Alltagsobjekt sehen, sondern müssen erkennen, dass sie im Kontext der Aufgabe *für etwas anderes steht* (vgl. die semiotische Funktion von Zeichen nach Steinbring (2006, S. 134), hier s. S. 37):

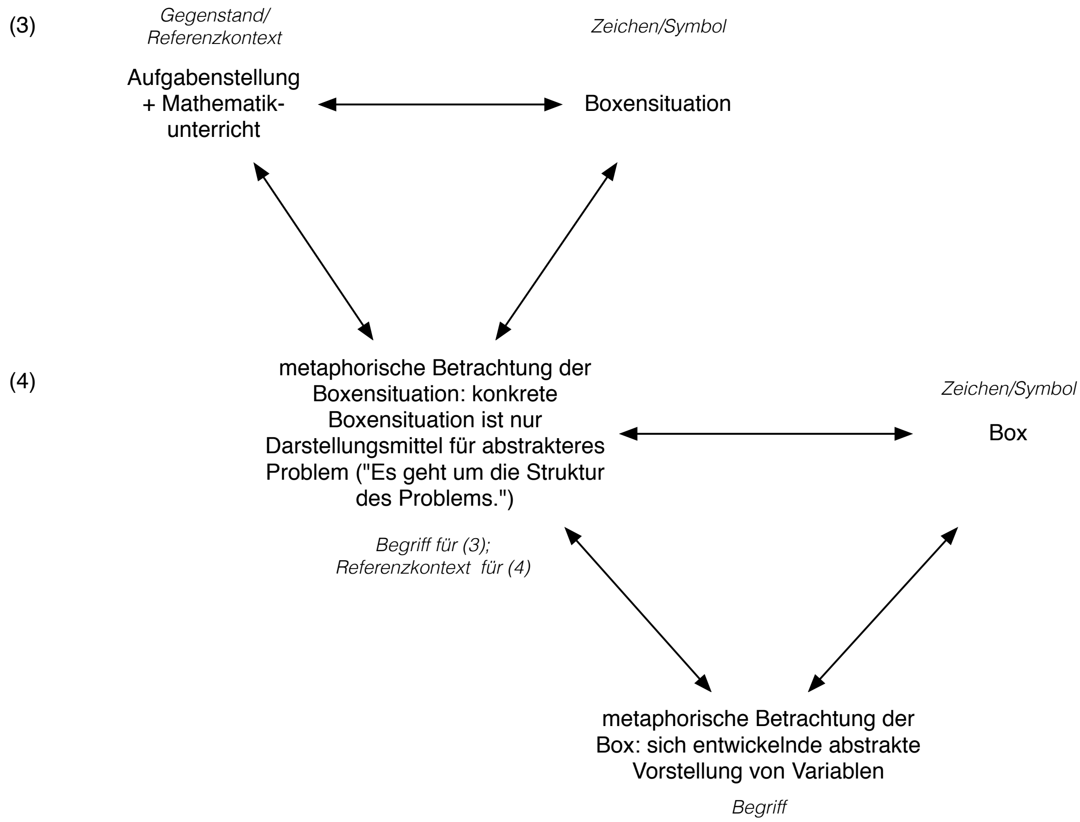


Wird auf die Box, die als Stellvertreter für eine Bohnenanzahl fungiert, gezeigt und verbal bloß eine Anzahl genannt, so wird die Box metaphorisch *verwendet*. In den analysierten Episoden traten zwei Fälle dieser Art auf:

- Die Boxen sind leer und die Schüler *tun so, als ob* sich eine bestimmte Anzahl an Bohnen darin befindet.
- Die Boxen sind während des Arbeitsprozesses alle befüllt worden. Auf der Suche nach einer Lösung wird aber nur noch für je eine Box jeder Farbe die Anzahl der Bohnen stellvertretend bestimmt und anschließend *davon ausgegangen, dass* sich in allen Boxen der jeweiligen Farbe die ermittelte Anzahl befindet.

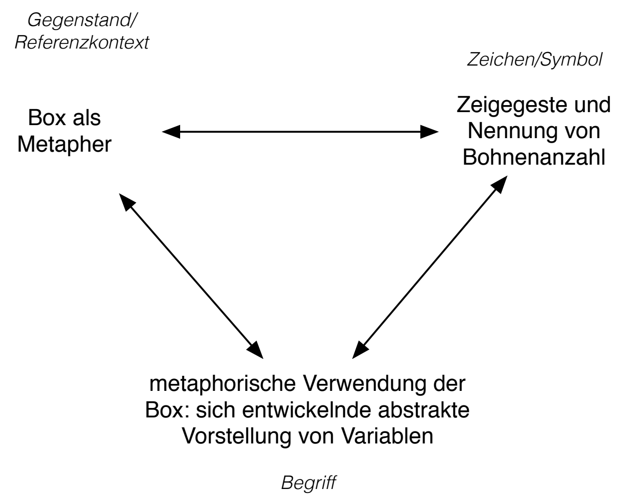


Gelingt es Lernenden darüber hinaus, die Boxensituation als Darstellung einer mathematischen Struktur zu begreifen (vgl. die epistemologische Funktion von Zeichen nach Steinbring (2006, S. 134), hier s. S.37), so können sie zu einer metaphorischen *Betrachtung* der Boxen im Sinne eines sich entwickelnden abstrakten Begriffs der Variablen gelangen:



Auch bei metaphorischer Betrachtung kann weiterhin stellvertretend auf die Box gezeigt werden, wenn auf die zugehörige (gesuchte) (Bohnen-)Anzahl verwiesen werden soll. Das Wesen des Stellvertretens hat sich aber weiterentwickelt, da der Fokus eben nicht mehr auf der konkreten Boxensituation liegt, sondern auf der durch sie dargestellten Struktur. Hier zeigt sich demnach auch in der metaphorischen Verwendung der Boxen die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen (s. fünftes epistemologisches Dreieck, vgl. zweites epistemologisches Dreieck).

(5)



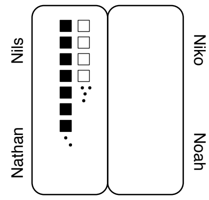
Die Auswahl der Fallbeispiele hat gezeigt, dass sich die Nutzung des Materials und die Bezugnahme darauf stets nur durch eine gemeinsame Betrachtung aller Ausdrucksmodalitäten und der Herangehensweise an die Aufgabe angemessen beurteilen lassen. Die Differenzierung von antizipierendem und handelndem Arbeiten lässt einen ersten Eindruck von einer Episode zu, es wurde aber deutlich, dass auch bei antizipierendem Arbeiten das Befüllen der Boxen noch sehr wichtig sein kann (Gruppe P), und sich auch bei einer grundsätzlich handelnden Herangehensweise eine metaphorische Verwendung zeigen kann (Gruppe S).

Welche Variablenrollen werden durch den Kontext angeregt? Nehmen Teile des Materials kontextspezifisch selbst stellvertretende Funktionen im Sinne von Variablen wahr? Falls ja, welche Rollen können für diese Stellvertreter identifiziert werden?

Bei der Beantwortung der ersten Forschungsfrage wurde bereits erörtert, wie die Box als Stellvertreter für Bohnen(-Anzahlen) auftritt und verwendet wird. Indem die Lernenden auf die Boxen zeigen und *so tun, als ob Bohnen in den Boxen lägen*, machen sie die Boxen zur Referenz von abstrakten Zeigegesten und verwenden sie metaphorisch. Dabei kann die Box sogar zur Metapher für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen werden. Dies bedeutet, dass sie im Kontext der Aufgabenbearbeitung stellvertretende Funktionen im Sinne von Variablen wahrnimmt (vgl. Thiel (1996, S. 473 ff.); hier s. S. 16). Oben wurde auch schon dargestellt, wie weit die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen in den einzelnen Gruppen reicht. Hier soll nun noch ergänzt werden, welche Variablenrollen in den einzelnen Fallbeispielen auftreten bzw. angeregt werden.

Vergleich der Fallbeispiele. Die Schüler der Gruppe N sehen in den Boxen sowohl Stellvertreter für deren gesuchte, unbekannte Befüllungen als auch Platzhalter. Durch das Festsetzen der Belegung der schwarzen Boxen zu Beginn des Lösungsprozesses erhalten diese Platzhalter-Charakter. Die passende Befüllung der weißen Boxen wird daraufhin systematisch rechnend ermittelt, so dass sie in dieser Episode hauptsächlich als Stellvertreter für ihre gesuchten, unbekannten Befüllungen auftreten. Die Schüler gelangen für beide Aspekte zu einer metaphorischen Betrachtung, da sie die Boxensituation später nur noch als Hilfsmittel zur Bearbeitung eines Zahlenproblems betrachten. In der Episode der Gruppe N beobachtet man die Entwicklung einer abstrakten Vorstellung von Variablen als Platzhalter und Unbekannte.

Zur Erinnerung die von Gruppe N betrachtete Boxensituation:



In den sukzessiven Befüllungsverfahren der Gruppen P und S wird die Box hingegen nur metaphorisch im Sinne eines Platzhalters verwendet. Die Idee der gesuchten Unbekannten ist in dieser Lösungsform nur latent vorhanden. Die Schülerinnen und Schüler suchen zwar grundsätzlich schon nach Befüllungszahlen, die zu einer Gleichheit der Gesamt-Bohnenanzahlen der beiden Anordnungen führen, geprägt wird der Lösungsprozess aber davon, dass sie bestimmte Bohnenanzahlen für beide Anordnungen festsetzen, und nicht dadurch, dass sie sich durch Ausnutzen der Gleichheitsbeziehung auf die Suche nach den/der Unbekannten machen.

Ergebnis. Die Stellvertreter-Rolle eint das semiotische System der Boxen im Kontext der Aufgabenstellung mit dem der Variablen im Kontext der ausgereiften Formelsprache und sorgt dafür, dass die Box zur Metapher für einen sich entwickelnden Variablenbegriff werden kann. Die Ausführungen zeigen, dass die aus der Betrachtung der Boxensituation als Gleichung und der Frage nach ihren Lösungen angenommene Dominanz der Variablen als Unbekannte in dieser Aufgabe empirisch nicht unbedingt anzutreffen ist, wenn Lernende die Aufgabenstellung im Sinne von Anweisungen zu einem Algorithmus ausbauen. In den so entstehenden sukzessiven Befüllungsverfahren ist diese Sicht nur latent zu beobachten. Die Box wird dabei vornehmlich metaphorisch im Sinne eines Platzhalters verwendet. Diese Herangehensweise ist bei der Verwendung der Aufgabe im Unterricht unbedingt zu bedenken. Als Stellvertreter für ihre gesuchten unbekannten Befüllungen trat die Box nur in der Episode der Gruppe N auf.

Welche Denkhandlungen und ways of thinking spielen eine Rolle?

Vergleich der Fallbeispiele. In allen Gruppen ist die Denkhandlung *Konstruieren* in ihrer speziell algebraischen Ausprägung auszumachen, da die Lernenden die Lösungsverfahren so konstruieren, dass sie den Bedingungen der Aufgabenstellung Genüge tun. Bei Gruppe S tritt allerdings das Ergebnis des Konstruktionsprozesses nicht klar zu Tage.

Die Denkhandlung des *Strukturierens* tritt ebenfalls in allen Episoden auf:

- die Schüler bestimmen die Gesamt-Bohnenanzahlen in den Anordnungen nicht einfach durch Abzählen, sondern durch Ausnutzen der ihnen durch die Boxen aufgeprägten Struktur,
- in den sukzessiven Lösungsverfahren ordnen sie die ermittelten Gesamt-Bohnenanzahlen ständig nach größer/kleiner-Relationen,
- sie analysieren zum Teil die Struktur der Boxensituation, um Erkenntnisse zu möglichen Lösungsverfahren bzw. Lösungen zu erlangen und
- sie durchlaufen die Prozesse zum Teil nur gedanklich, was dem way of thinking des Strukturierens entspricht.

Im Lösungsprozess der Gruppe N ist zudem die Denkhandlung *Deuten / Umdeuten* (die Schüler sehen die Boxen einerseits als Platzhalter und andererseits als Stellvertreter für ihre gesuchten unbekannte Befüllungen), sowie der algebraic representation approach (way of thinking zur Denkhandlung *Darstellen*; die Schüler arbeiten hypothetisch) anzutreffen.

Ergebnis. In den Analysen wurde insbesondere auf der Ebene der Lösungsprozesse untersucht, welche Denkhandlungen und ways of thinking eine Rolle spielen. Betrachtet man nun aber noch einmal die Analysen in der Gesamtschau, so wird sehr deutlich, dass die Denkhandlung Deuten / Umdeuten den aufscheinenden Begriffsbildungsprozess durchzieht und gleichsam trägt. Zu dieser Denkhandlung wurde in der theoretischen Erörterung kein zugehöriger way of thinking angegeben. Lassen sich aus den Ergebnissen dieser Arbeit Charakteristika ableiten, die für das (sich hier entwickelnde) algebraische Denken typisch sind – also einen Hinweis auf den zugehörigen way of thinking geben können? In den Analysen hat sich die *metaphorische Betrachtung* (mit dem Vorläufer und Begleiter *metaphorische Verwendung*) der Boxen bei deren Deutung als entscheidend für den Begriffsbildungsprozess herausgestellt. Wir haben gesehen, dass das Stellvertreter-Sein der Box dabei die entscheidende Ähnlichkeit zur Variablen ist, die es ihr ermöglicht, zur Metapher für den sich entwickelnden Variablenbegriff zu werden. In Ergänzung zu den Überlegungen von Lakoff und Núñez (2000, S. 74 f.; hier s. S. 21), die die Rolle-für-Individuum-Metonymie als Ermöglichungsgrund algebraischen Denkens ansehen, tritt hier also die Metapher (im engeren Sinne, vgl. S. 20) als entscheidende Denkfigur auf. Beide Denkfiguren können dem way of thinking der Denkhandlung Deuten / Umdeuten zugerechnet werden.

Die Analysen haben darüber hinaus deutlich gemacht, dass noch Prozesse von Verallgemeinerung und Abstraktion ins Spiel kommen müssen, damit Lernende die Deutung der Box als Metapher tatsächlich vornehmen können: die Lernenden müssen im Besonderen das Allgemeine sehen (das allgemeine Zahlenproblem hinter dem speziellen Bohnenproblem erkennen) bzw. von der Konkretheit der Boxensituation in mehrfacher Hinsicht absehen und sie als Darstellung eines Zahlenproblems begreifen (also bestimmte Merkmale der Boxen (Form, Material, ...) vernachlässigen und stattdessen andere hervorheben (Stellvertreter-Sein)).

Inwiefern wird das Material zum material anchor eines sich entwickelnden Variablenbegriffs?

Vergleich der Fallbeispiele. Für alle drei Gruppen wird das Material zum material anchor ihrer Lösungsverfahren. Insbesondere die Möglichkeit, auf das Material zu zeigen, scheint den Lernenden beim Ausdrücken ihrer Ideen zu helfen (vgl. Häufung von gesture-speech-mismatches, s. S. 225).

Die Gruppe N gelangt – wie bereits erörtert wurde – zu einer Betrachtung der Boxensituation als Darstellung für ein Zahlenproblem, sie lösen sich vom konkreten Auslegen der Bohnen. Die Box wird zur Metapher für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen. Zunächst werden die Boxen aber weiterhin gestisch mit in den Lösungsprozess einbezogen – als Gedankenstütze. Auf Grund dieser Verwendung bleiben sie material anchor – jetzt aber für den abstrakten Variablenbegriff, der sich durch die metaphorische Betrachtung der Boxen entwickelt. Später tritt mit dem Verschwinden der Gestik eine weitere Ablösung vom Konkreten auf: die Boxen liegen zwar noch auf dem Tisch, die Schüler nehmen aber nicht mehr explizit darauf Bezug. Es ist jedoch plausibel, dass ihnen die Darstellung der mathematischen Struktur als Boxensituation so vertraut geworden ist, dass sie weiterhin in Boxen denken, und der Anker damit gesetzt bleibt.

Bei den Gruppen P und S wird durch die metaphorische *Verwendung* der Boxen der Grundstein für ihre metaphorische *Betrachtung* gelegt. In der metaphorischen *Verwendung* zeigt sich daher auch das Potential zur Entwicklung der Box zu einem material anchor für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen.

Ergebnis. Das Material avanciert bei der Bearbeitung von *Knack die Box* zum material anchor. Dabei sind zwei Ebenen zu beobachten: zum einen werden die Lösungsverfahren insbesondere durch Gesten am Material verankert. Teilweise erscheint die Möglichkeit der gestischen Verweise überhaupt erst der Ermöglichungsgrund für die gedankliche Ausführung des Lösungsverfahrens zu sein. Zum anderen wird speziell die Box zum material anchor für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen, wenn die Lernenden zu einer Betrachtung der Box als Metapher gelangen. Dadurch, dass nämlich der Bezug zu den Boxen durch auf sie verweisende Gesten zunächst aufrecht erhalten bleibt, wird auch das sich entwickelnde abstraktere Konstrukt an der Box verankert. Auf diese Weise wird nicht nur der Lösungsprozess ermöglicht oder stabilisiert, sondern auch der Begriffsbildungsprozess der Variablen unterstützt. Der Gebrauch der Box als material anchor bedeutet eine Stärkung der Metapher der Box.

Erfolgt eine Ablösung vom Konkreten? Wenn ja, wie?

Vergleich der Fallbeispiele. Die Ablösung vom Konkreten ist in den Episoden der Gruppen P und S (noch) kein zentrales Thema. Erste Ablösungstendenzen (von den Bohnen) sind lediglich bei den am Material verankerten abstrakten Zeigegesten auf die Boxen zu beobachten.

Gruppe N löst sich hingegen im Laufe der Episode weitestgehend von der Einbeziehung des konkreten Materials in den Lösungsprozess: Zu Beginn der Episode belegen die Schüler die Boxen mit Bohnen und geben sprachlich indirekte Verweise auf das Material. Das Belegen der Boxen weicht Gesten, die sich auf lediglich antizipierte Bohnen bzw. auf die Boxen als deren Stellvertreter beziehen. Auch die indirekten sprachlichen Hinweise verschwinden, und die Schüler sprechen auf einer Zahlenebene und führen Rechnungen durch. Zum Schluss sind teilweise sogar keine auf das Material bezogene Gesten mehr zu beobachten. Die Schüler finden nach der Ablösung vom konkreten Auslegen der Bohnen eine neue (dann sprachliche) Fixierung von neuen Lösungsmöglichkeiten durch deren Imitation bzw. Paraphrase. Nils führt eine Verkürzung des Lösungsverfahrens durch, auf die er vermutlich auf der Zahlenebene gekommen ist.

Ergebnis. In einer von drei Gruppen erfolgt eine Ablösung vom Konkreten. Der Ablösungsprozess wurde beim Vergleich der Fallbeispiele zusammenfassend beschrieben.

Resümee

Da die Box im Kontext der Aufgabenstellung zum Stellvertreter für Bohnenanzahlen, zur Metapher und zum material anchor für einen sich entwickelnden Variablenbegriff werden kann, hat sie das Potential, für die Entwicklung einer tragfähigen Vorstellung von Variablen eine sinnstiftende Rolle zu spielen.

Die metaphorische *Betrachtung* der Boxen wird von einer metaphorischen *Verwendung* derselben begleitet, unter Umständen geht ihr diese auch voraus. Lernende, die die Boxen metaphorisch verwenden, aber noch nicht so betrachten, haben sich noch nicht ausreichend von der Konkretheit der Situation distanziert, um diese neue Sicht einzunehmen.

Abhängig von der Wahl des Lösungswegs werden verschiedene Variablenrollen fokussiert. Als am stärksten genutzte Rolle hat sich in den Analysen der Platzhalter gezeigt. Die Idee der Variablen als Unbekannte war in allen Lösungsprozessen latent vorhanden, sie war aber nur im hypothetischen Verfahren der Gruppe N ein Fokus des Lösungsverfahrens.

Für den Unterricht bedeutet dies, dass der Kontext der Boxen und Bohnen vielversprechend ist, die Lehrperson sich aber über ein großes Spektrum an möglichen Bearbeitungsweisen und damit verbundenen möglichen Begriffsbildungsprozessen bewusst sein muss. Lernende müssen die Möglichkeit bekommen, ihre Deutungen vorzutragen und an den Situationsdefinitionen der anderen auszuschärfen. Die Lehrperson muss im weiteren Unterricht bedenken, dass Lernenden, die vielleicht eins der beschriebenen sukzessiven Befüllungsverfahren verwendet haben, eine strukturelle Sicht, wie die der Gruppe N, fremd ist, da sie das Problem ganz anders bearbeitet haben.

Die Probleme der Gruppe N, ihr Lösungsverfahren im anschließenden Klassengespräch sprachlich darzustellen, sind auch eine Mahnung an die Unterrichtsmoderation. Die Lehrkraft sollte sich die Zeit nehmen, Lernende ihre Verfahren vormachen zu lassen, da ansonsten wertvolle Herangehensweisen den Klassendiskurs möglicherweise nicht erreichen.

Da die Gesten der Lernenden zum Teil Informationen beinhalten, die nicht sprachlich dargestellt werden (mismtaches), muss man sich hier auch klar vor Augen halten, dass der Variablenbegriff noch auf eine explizite Gebrauchsebene (vgl. Malle 1983) gehoben werden muss. Ein erster Schritt in diese Richtung wäre, dass die Lernenden üben, ihre Lösungswege rein sprachlich zu kommunizieren.

9.3 Die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander

Inwiefern wird der Lösungsprozess durch die Gruppeninteraktion vorangetrieben?

Vergleich der Fallbeispiele. Die Fallbeispiele unterscheiden sich im Hinblick auf die Interaktionsverläufe stark. Es wird ein großer Bereich im Spektrum möglicher konstruktiver Interaktionsverläufe in Gruppenarbeitsprozessen abgebildet. Dieses Teilspektrum soll im Folgenden durch die Darstellung der Ergebnisse zu den einzelnen Gruppen aufgefächert werden.

Die Episode der Gruppe N ist sehr dicht: es tritt eine Häufung von Kreatorbeiträgen auf, die aber sehr verschieden ausgeformt sind.[4] Die Interaktion wird von Konfrontationen unterschiedlicher Situationsdefinitionen geprägt. Diese bringen den kollektiven Lösungsprozess und das Verständnis des Lö-

[4] In der Analyse wurde daher die Rolle des Kreators differenziert in eine innovative, eine ausführende und eine assistierende Erscheinungsform (s. S. 136).

sungsprozesses einzelner Schüler voran. Nils trägt den kollektiven Lösungsprozess, aber auch er profitiert von der Zusammenarbeit. Man stellt fest, dass alle Beteiligten Nutznießer der Interaktion sind, jedoch auf verschiedenen Ebenen: Nathan und Niko schärfen an der Interaktion ihr Verständnis des Verfahrens aus, Nils gelingt durch die Interaktion hingegen die Weiterentwicklung des Verfahrens (dabei treten Niko und Nathan als Impulsgeber auf, s. S. 132).[5]

In der Episode der Gruppe P verfolgen Peter und Philipp nach einer Phase des Nebeneinanderher-Arbeitens zu Beginn der Episode (vgl. Naujok et al. 2008, S. 793) gemeinsam Peters Ansatz.[6] Dabei vollzieht Peter Philipps Vorschläge immer wieder in seinem Tempo und auf seine Art und Weise nach, ist also eindeutig kein Trittbrettfahrer, der einer Lösung einfach zustimmt, ohne sich damit auseinanderzusetzen (Brandt & Höck 2011, S. 255). Vielmehr ist die Episode ein Beispiel für Typ 2 der Kategorisierung von Ko-Konstruktionen in Gruppenarbeiten nach Howe (2009): „only 1 idea has to be considererd“ (ebd., S. 218). Konfrontationen unterschiedlicher Situationsdefinitionen spielen demnach hier nur eine untergeordnete Rolle. Trotzdem profitiert auch Philipp, der ja eigentlich die Führung übernimmt, von der Zusammenarbeit mit Peter, indem dieser dem Lösungsprozess die notwendige Bedachtsamkeit gibt.

Gruppe S befindet sich in der betrachteten Episode auf der Schwelle zur kollektiven Ideenentfaltung (Brandt & Höck 2011). Die Analysen machen zwar deutlich, dass die Schülerinnen unterschiedlich viel zum Lösungsprozess beitragen, und man kann auch noch erkennen, wer bestimmte Aspekte in die Diskussion einbringt, ihre Beiträge sind aber sehr stark miteinander verschränkt. Das Lösungsverfahren wird nie von einer Schülerin alleine durchgeführt, so dass nach der bisherigen Einordnung fast alle Kreator-Beiträge als assistierend einzustufen wären. Um einen differenzierteren Blick zu ermöglichen, wurden Beiträge, die nicht vorhergegangenen zuarbeiten

[5] Noah nimmt an der Interaktion nicht aktiv teil, da er gerade dabei ist, etwas zu notieren.

[6] Paul nimmt im Wesentlichen nicht am Lösungsprozess teil, da er durch heruntergefallene Bohnen abegelenkt ist. Patrick fehlt in der Stunde, aus der die betrachtete Episode stammt.

und sich auch nicht allein mit der aktuellen Befüllung einer Box beschäftigen, sondern einen nächsten Lösungsschritt durchführen oder anstoßen, als ausführende Kreator-Beiträge aufgewertet. Allerdings blieb trotzdem eine Fülle von assistierenden Kreator-Beiträgen zurück, die einer sehr geringen Anzahl von innovativen Beiträgen gegenüber stand. Dieser Zustand macht Sinn, wenn man die Einzeläußerungen der Schülerinnen als Beiträge zu einer kollektiven Ideenentfaltung versteht.

Ergebnis. Für Schüler, die noch Schwierigkeiten haben, kann die Gruppeninteraktion durch die Konfrontation unterschiedlicher Situationsdefinitionen zur Klärung der verwendeten Verfahren und der Entwicklung von passenden Deutungen des Materials beitragen. Für die innovativen Schüler, die die Führungsrollen übernehmen, halten Konfrontationen unterschiedlicher Situationsdefinitionen neue Impulse bereit, die die Entwicklung des Verfahrens stärken können. Darüberhinaus kann die Gruppeninteraktion die Sorgfalt bei der Bearbeitung der Aufgabe fördern, wenn Teilnehmer Ideen ihrer Mitschüler stets aktiv nachvollziehen. Wenn sich die Interaktion in Richtung einer kollektiven Ideenentfaltung bewegt, ist es fast zu schwach formuliert, wenn man davon spricht, der Lösungsprozess werde durch die Gruppeninteraktion vorangetrieben. Das Lösungsverfahren konstituiert sich dabei nämlich erst im Kollektiv der Beiträge – also in der Interaktion.

Was trägt die Interaktion insbesondere zur Ablösung vom Konkreten bei, die für die Entwicklung des Variablenbegriffs entscheidend ist?

Ein inhaltlicher Vergleich muss hier entfallen, da nur in der Episode der Gruppe N tatsächlich eine Ablösung vom Konkreten stattfindet. Dabei tritt aber ein Phänomen auf, welches ein interessantes Ergebnis für diese Forschungsfrage darstellt. In fast allen Lösungsversuchen nach der Ablösung vom Auslegen der Bohnen wird die Nennung der im Rahmen des hypothetischen Lösungsverfahrens aktuell anzunehmenden Befüllungszahl jeder schwarzen Box imitiert bzw. paraphrasiert. Wir haben argumentiert, dass dies eine Bedeutung für den bzw. im Ablösungsprozess vom Konkreten haben muss, da das Phänomen vorher noch nicht zu beobachten war. Wir gehen davon aus, dass darüber ein sprachliches Festhalten der anzunehmenden Belegung erfolgt, das vorher durch das Auslegen der Bohnen realisiert wurde. Das Phänomen wird hier nun der Interaktion gutgeschrieben, da es sich im Sprecherwechsel konstituiert.

Resümee

Die Ausführungen deuten darauf hin, dass die Bearbeitung der Aufgabe *Knack die Box* innerhalb von Kleingruppen vorteilhaft ist. Für alle Gruppen konnte nämlich gezeigt werden, dass alle an der jeweiligen Interaktion teilnehmenden Schülerinnen bzw. Schüler auf die eine oder andere Art und Weise von dieser profitieren. Diese Beobachtung hat eine gewisse Aussagekraft, da die Interaktionen in den einzelnen Gruppen sehr unterschiedlich ausfallen, und auch die Rollen, die die Lernenden in den Arbeitsprozessen wahrnehmen, stark differieren. Die Ausführungen zur Gruppe P legen nahe, dass es die Kombination aus Arbeit in der Gruppe und Arbeit mit konkretem Material ist, die die Kleingruppenarbeit so günstig dastehen lässt. Peter und Philipp arbeiten zunächst nämlich nebeneinanderher (vgl. Naujok et al. 2008, S. 793). Wir vermuten, dass sie letztendlich dann doch zusammenarbeiten, da sie ab einer bestimmten Stelle der Episode ihre Aufmerksamkeit beide auf die auf dem Tisch aufgebaute Boxensituation richten.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass es auch Lernende gibt, die innerhalb der betrachteten Episoden eher nicht von der Interaktion profitieren. In allen drei Gruppen nimmt je eine Person[7] (phasenweise) nicht bzw. kaum am inhaltlichen Geschehen der Episode teil.

[7]Noah, Paul, Sarah

9.4 Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff

> *„Es scheint so zu sein, dass zwischen dem (numerischen) Zahlenrechnen und dem Formelrechnen ein Sprung im Lernprozess liegt. Dafür spricht nicht nur die fachlich-epistemologische Analyse, sondern auch die empirische Realität.“*
>
> (Hefendehl-Hebeker 2001, S. 92 f.)

In der vorliegenden Arbeit wurden Gruppenarbeitsprozesse zur Aufgabe *Knack die Box* (s. S. 78) interpretativ erforscht. Diese Aufgabe wurde durch theoretische Überlegungen vorab als vielversprechend im Hinblick auf eine Erleichterung des Übergangs zwischen Arithmetik und Algebra eingestuft, da sie Lernenden Erfahrungen mit Zahlenbeziehungen ermöglicht (vgl. Hefendehl-Hebeker 2001, S. 92) und ihnen einen konkret-gegenständlichen Kontext bietet, der das Potential dazu besitzt, die begrifflichen Strukturen der Lernenden (in ihrer Entwicklung) zu stützen (vgl. Hutchins 2005).

Die interpretativen Analysen der Fallbeispiele haben gezeigt, *dass* die materiellen Boxen zu Metaphern für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen werden können (vgl. auch Berlin et al. 2009, S. 291). Auf diese Weise können sie die Ausbildung eines tragfähigen Variablenbegriffs unterstützen. Zudem haben wir gesehen, *wie* sich eine solche metaphorische Vorstellung entwickeln kann. Dies soll im Rest dieses Kapitels noch einmal überblicksartig dargestellt werden, um die zentrale Frage der vorliegenden Arbeit gebündelt zu beantworten: *Wie entwickeln sich Vorläuferformen zum Variablenbegriff in einer Lernumgebung zur Einführung in die Algebra, die den Schülerinnen und Schülern Erfahrungen mit Zahlenbeziehungen in einem konkret-gegenständlichen Kontext ermöglicht?*
Die Details wurden bereits in den Kapiteln 9.1 bis 9.3 erörtert.

In den Fallbeispielen wird das Material bei der Bearbeitung der Aufgabe handelnd (z. B. tatsächliches Befüllen der Boxen mit Bohnen) und antizipierend (z. B. rein gedankliche Befüllung der Boxen) genutzt. Auf sprachlicher Ebene beobachtet man kaum explizite Verweise auf das Material – es wird also fast nie von „Boxen“ und / oder „Bohnen“ gesprochen. Die Schülerinnen und Schüler nehmen indirekt auf das Material Bezug (z. B. durch ortsbestimmende Adverbien) oder es wird gar nur auf Zahlenebene gesprochen (d. h. bei alleiniger Betrachtung der verbalen Äußerungen wüsste man nicht einmal, *dass* es noch irgendein Material / Bezugsobjekt der genannten Zahlen / Rechnungen gibt). Die verbalen Äußerungen werden in der Regel aber durch eine ausgeprägte auf das Material bezogene Gestik genauer bestimmt bzw. für Mit-Lernende und die Beobachterin überhaupt erst interpretierbar. Erst wenn der Umgang mit dem Material soweit verinnerlicht ist, dass der Lösungsprozess auch gedanklich vollzogen werden kann, beobachtet man auch die Äußerung von Rechnungen ohne den Ausdruck irgendeines Bezugs zum Material. Wir gehen aber davon aus, dass die Boxen auch dann noch als Gedankenstütze fungieren.

Im vorigen Absatz wurden die beobachteten Nutzungsweisen des Materials beschrieben. Insbesondere am Schluss lässt sich aber schon erahnen, dass diese Nutzungsweisen nur bedingt schlicht nebeneinander existieren, sondern eher eine Entwicklung von konkreten Handlungen zu flexiblen, mathematischen Operationen beschreiben. Stark kondensiert könnte man die Etappen der Entwicklung so darstellen:

- Einbeziehung des Materials in den Lösungsprozess durch Alltags-Sprache und Handlungen
- Einbeziehung des Materials in den Lösungsprozess durch Alltags-Sprache und auf das Material bezogene Zeigegesten
- Einbeziehung des Materials in den Lösungsprozess durch am Material verankerte abstrakte Zeigegesten, die Äußerungen auf Zahlenebene verdeutlichen
- Äußerungen auf Zahlenebene und gedankliche Einbeziehung des Materials in den Lösungsprozess, die aber nicht mehr ausgedrückt wird

Diese Etappen sollen nicht als strenge Stufen verstanden werden, die eine nach der anderen bewältigt werden müssen, auch nicht als strikt voneinander getrennte Nutzungsweisen, sondern vielmehr als Beschreibung eines fortschreitenden Umdeutungsprozesses der Boxen(situation), der in der Entwicklung aber nicht unbedingt streng in einer Richtung verläuft.

Was macht diese Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen in Übergängen von konkreten Handlungen zu flexiblen, mathematischen Operationen nun aus? Als entscheidend für den Begriffsbildungsprozess der Variablen hat sich die metaphorische Betrachtung der Box herausgestellt. Das Stellvertreter-Sein ist dabei das entscheidende Charakteristikum, das die konkret-gegenständliche Box – im Rahmen der Aufgabenstellung gedeutet – mit dem gedanklichen Objekt der Variablen eint (s. S. 79) und sie zur Metapher für einen sich entwickelnden Variablenbegriff befähigt.[8] Dass die Lernenden die Box als Stellvertreter für Bohnen(anzahlen) begreifen, ist demnach der grundlegende Deutungsprozess bei der Bearbeitung von *Knack die Box* und folglich auch für die metaphorische Betrachtung der Box. Die Lernenden müssen nämlich unbedingt erkennen, dass die Box im Rahmen der Aufgabe *für etwas anderes steht* (vgl. die semiotische Funktion von Zeichen nach (Steinbring 2006, S. 134), hier s. S. 37). Lernende gelangen von der Box als Stellvertreter aber nur dann zu einer metaphorischen Betrachtung der Box im Sinne eines sich entwickelnden Variablenbegriffs, wenn sie darüber hinaus die Boxensituation als bloße Darstellung einer mathematischen Struktur begreifen (vgl. die epistemologische Funktion von Zeichen nach (Steinbring 2006, S. 134), hier s. S. 37).[9] Als Zwischenschritt in diese Richtung hat sich hier eine vorangehende metaphorische *Verwendung* der Boxen gezeigt, bei welcher durch am Material verankerte abstrakte Zeigegesten Äußerungen auf Zahlenebene auf die konkrete Boxensituation bezogen werden. Die Lernenden tun in den entsprechenden Beiträgen dann zwar bereits nur noch so, als ob Bohnen in den Boxen lägen, der sonstige Umgang mit dem Material macht aber deutlich, dass ein durchgängiges Verständnis der Boxensituation als Darstellung einer mathematischen Struktur noch ausbleibt. Die metaphorische Verwendung durch Gesten ist natürlich aber auch bei einer metaphorischen Betrachtung der Boxen zu beobachten. Auf

[8] Genau aus diesem Grund ermöglicht die Bearbeitung der Aufgabe im konkreten Setting ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff (vgl. mit dem Titel der Arbeit: *Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff*).

[9] Das *andere* im *für etwas anderes stehen* wird dadurch abstrakter.

diese Weise wird die sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen an der Box verankert. Der Gebrauch der Box als material anchor (Hutchins 2005) stärkt die Box als Metapher.

Wenn man erörtert, wie die Lernenden zu einer Deutung der Box als Stellvertreter für Bohnenanzahlen und später als Metapher für einen sich entwickelnden Variablenbegriff gelangen, wird klar, dass die Umdeutungsprozesse auch in Prozessen von Verallgemeinerung und Abstraktion verlaufen. Die Schülerinnen und Schüler erkennen im Besonderen das Allgemeine (das allgemeine Zahlenproblem hinter dem speziellen Bohnenproblem) bzw. sehen von der Konkretheit der Situation in mehrfacher Hinsicht ab und begreifen sie als Darstellung eines Zahlenproblems (vernachlässigen also bestimmte Merkmale der Boxen (Form, Material, ...) und heben stattdessen andere hervor (Stellvertreter-Sein)).

In die Untersuchung der Entwicklungsprozesse im Hinblick auf den Variablenbegriff wurde in der vorliegenden Arbeit auch die Rolle der Interaktion der Lernenden untereinander mit einbezogen. Die Interaktion scheint die Lösungs- und Umdeutungsprozesse zu begünstigen, indem sie sowohl für Lernende mit Klärungsbedarf als auch für die Innovativen immer wieder neue Impulse bereithält. Darüberhinaus haben wir ein Phänomen in den Sprecherwechseln der Interaktion entdeckt, welches eine Rolle bei der Ablösung vom Konkreten spielen muss: Nachdem die Lernenden einer Gruppe sich vom konkreten Auslegen der Bohnen gelöst haben, imitieren oder paraphrasieren sie fast alle hypothetisch genannten möglichen Befüllungszahlen. Wir gehen davon aus, dass dadurch ein sprachliches Festhalten der anzunehmenden Belegung erfolgt, das vorher durch das Auslegen der Bohnen umgesetzt wurde.

Zum Abschluss blicken wir noch einmal auf die zentrale Frage dieser Arbeit:

Wie entwickeln sich Vorläuferformen zum Variablenbegriff in einer Lernumgebung zur Einführung in die Algebra, die den Schülerinnen und Schülern Erfahrungen mit Zahlenbeziehungen in einem konkret-gegenständlichen

Kontext ermöglicht?

In den obigen Ausführungen wurde dargelegt, inwiefern die empirischen Analysen der vorliegenden Arbeit zu folgendem Ergebnis geführt haben:

Die Charakterisierung von Vorläuferformen algebraischen Denkens als flexible, epistemologische Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen (semiotischer Systeme)

- *in Übergängen von konkreten Handlungen zu flexiblen, mathematischen Operationen bzw.*
- *in Prozessen von Verallgemeinerung und Abstraktion*

unter Betrachtung ihrer Entwicklung in sozialer Interaktion.

Kapitel 10

Reflexion und Ausblick

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit werden im Folgenden zunächst in Beziehung zu Resultaten der in Kap. 1.2 vorgestellten empirischen Studien Van Amerom (2002), Berlin (2010), Radford (2010) und Akinwunmi (2012) gesetzt. Im Anschluss daran wird die Reichweite der Befunde der vorliegenden Arbeit diskutiert (hier kommt Akinwunmi (2012) noch einmal ins Spiel) und es wird dargelegt, welche weiterführenden Fragen sich ergeben.

Laut Van Amerom (2002, S. 279) entwickeln sich algebraisches Argumentieren und Darstellen unabhängig voneinander. Insbesondere die Episode der Gruppe N der vorliegenden Studie hat diesbezüglich sehr überzeugend aufgezeigt, zu welchen elaborierten (algebraischen) Verfahren Lernende in der Lage sind, ohne die algebraische Formelsprache dafür zu nutzen (vgl. S. 106 f., 114 ff.).

Berlin (2010) und Radford (2010) beschreiben die Genese algebraischen Denkens durch die Erörterung verschiedener Etappen des Entwicklungsprozesses (s. S. 26 ff.). Diese wurden in beiden Studien anhand von Videosequenzen von Schülerbearbeitungen zum Thema Musterfolgen entwickelt. Zwar legen Musterfolgen andere Aufgabenformate fest, was sich z. T. auch in den Beschreibungen der Etappen niederschlägt, dennoch wird eine grundsätzliche Passung der Beobachtungen im Rahmen von *Knack die Box* zu diesen Etappenfolgen erkennbar. Im Stufenmodell nach Berlin (2010, hier s. S. 26) kann man beispielsweise die Bearbeitung der Gruppe N auf der dritten Stufe („Erkennen von Zusammenhängen, Durchschauen von Mustern und deren strukturelle Beschreibung“) verorten, da die Lernenden systematisch die Struktur der Boxensituation für ihren Lösungsprozess ausnutzen – also einen sehr bewussten Umgang mit der Problemstellung zeigen. Da bei *Knack die Box* aber eben keine strukturelle Beschreibung gefordert ist, passt die Charakterisierung, die für die Episode der Gruppe N durch die Zuordnung zu dieser Stufe vorgenommen würde, nicht optimal. Bei einer Einordnung in die Klassifikation von Arten algebraischen Denkens nach Radford (2010) sind alle analysierten Episoden der vorliegenden Arbeit im Feld des *Factual Algebraic Thinking* zu sehen, da die Unbestimmtheit nirgendwo die Ebene des Diskurses erreicht (vgl. Radford 2010, S. XL). Auch in der Gruppe N spielt sich der Lösungsprozess letztlich nämlich auf der Ebene von konkreten Zahlen ab, obwohl das Verfahren durch ihr hypothetisches Vorgehen in algebraischer Hinsicht am weitesten fortgeschritten ist.

Es scheint demnach grundsätzlich möglich, die Beschreibungen der Etappen in der Entwicklung des algebraischen Denkens nach Berlin (2010) und Radford (2010) so zu erweitern, dass sie auch die Genese des algebraischen Denkens im Rahmen einer Aufgabe wie *Knack die Box* beschreiben. Dazu muss aber zunächst die weitere Entwicklung im Rahmen der Bearbeitung von *Knack die Box* bis zur Nutzung symbolischer Darstellungen genau untersucht werden.

Die vorliegende Studie kann die in Berlin (2010) und Radford (2010) beschriebene Relevanz von Gestik für die Entwicklung des Variablenbegriffs bestätigen, und unser Bild der Funktionen, die die Gestik übernehmen kann, weiter ausgestalten.

Die Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zum Umgang mit dem konkret-gegenständlichen Material unterstützen und erweitern Befunde von Akinwunmi (2012) „hinsichtlich des Wechsels zwischen und der Verknüpfung von ... Darstellungsebenen“ (ebd., S.280 f.; hier s. S. 28 f.), da die in den Studien betrachteten Aufgabenkontexte ganz verschiedenartig sind. In beiden Arbeiten lösen sich die Lernenden z. T. von der Ebene des Kontextes (geometrisch-visualisierte Ebene des zu betrachtenden Musters bzw. konkretes Boxen-Bohnen-Problem) und führen den Lösungsprozess auf der Zahlenebene fort. Man beobachtet aber auch immer wieder Rückbezüge auf den Kontext.

Die in dieser Arbeit vorgenommene Charakterisierung von Vorläuferformen algebraischen Denkens als flexible, epistemologische Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen fußt bislang in den Analysen der Gruppenarbeitsprozesse zur ersten Aufgabe von *Knack die Box*. Es stellt sich die Frage, ob auch bei der Arbeit mit Material, das von einer ganz anderen epistemologischen Natur als die Boxen und Bohnen ist, wie z. B. die Würfel-Bauten aus *Stein auf Stein*[1] (s. Kap. 5.1), Vorläuferformen algebraischen Denkens auf diese Weise charakterisiert werden können, und ob dieses andere Material beispielsweise auch Anker-Qualitäten im Sinne des material anchor nach Hutchins (2005) für einen sich entwickelnden Variablenbegriff hat. Akinwunmi (2012) beschäftigt sich mit der Entwicklung des Variablenbegriffs beim Verallgemeinern mathematischer Muster – in dieses Feld gehört auch *Stein auf Stein* – und konstatiert, dass eine „Entwicklung des Variablenbegriffs ... im Verallgemeinerungsprozess durch die Herstellung neuartiger Wechselbeziehungen zwischen der allgemein zu beschreibenden Struktur und den in der Kommunikation verwendeten Zeichen" (ebd., S. 278 f.) stattfindet. Diese „Herstellung neuartiger Wechselbeziehungen" (ebd.) ähnelt den epistemologischen Umdeutungsprozessen mathematischer Repräsentationen der vorliegenden Arbeit, wenn man von den verschiedenartigen Aufgaben(themen) abstrahiert, die in den Studien fokussiert werden (*Verallgemeinern von Mustern* bzw. *Knack die Box*). Eine vertiefte Analyse von Lösungsprozessen zur Aufgabe *Stein auf Stein*, die sich durch die Verwendung des konkret-gegenständlichen Materials von den in Akinwunmi (2012) betrachteten Aufgaben unterscheidet, verspricht demnach weitere Einsichten in die epistemologische Entwicklung des Variablenbegriffs, die die

[1]Der Hauptunterschied zwischen der epistemologischen Natur der Würfel-Bauten aus *Stein auf Stein* und der Boxensituation aus *Knack die Box* ist darin zu sehen, dass das Stellvertretersein der Box sie zur Metapher für einen sich entwickelnden Variablenbegriff befähigt. Bei den Würfelbauten gibt es kein Objekt, das so wirken könnte.

Erkenntnisse aus Akinwunmi (2012) und derjenigen der vorliegenden Arbeit stützen und ergänzen können.

Im Anschluss daran soll die zeitliche Entwicklung des Variablenbegriffs in den Blick genommen werden. Dazu wird eine neue Datenerhebung notwendig sein. Ausgehend von einem Einstieg in die Algebra, der die Entwicklung des Variablenbegriffs in der beschriebenen Weise anstößt, stellen sich nämlich folgende Fragen:

- Wie sehen spätere Betätigungen zur Weiterentwicklung des algebraischen Denkens aus, die die Art und Weise der Befassung geeignet fortführen? Wie lange und inwiefern sind die konkreten Anker nötig bzw. tragfähig? Wie werden sie in späteren Stadien des Lernprozesses aufgegriffen, wenn das konkrete Material von den Aufgabenstellungen nicht mehr fokussiert wird? Lassen sich Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen beobachten, die die ursprünglichen Kontexte aufleben lassen?

- Wie kann dann aber auch eine echte Ablösung vom Konkreten erfolgen (in den Lösungsprozessen zur Einstiegsaufgabe von *Knack die Box* wurden ja nur erste Ansätze der Ablösung aufgedeckt)? Wie werden die Variablen und Terme also zu Objekten eigenen Rechts (Reifikation (Sfard 2000), Objektivierung (Radford 2010))? Wie wird die Variable vom Instrument zur (bloßen) Beschreibung des Unbestimmten zum kreativen Werkzeug, mit welchem neue mathematische Objekte durch Ausnutzung von Beziehungen konstruiert werden können (Steinbring 2010)?[2] Findet man trotzdem (zunächst / zum Teil) weiterhin Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen, die die ursprüngli-

[2] Als Beispiel für die Verwendung der Variablen als kreatives Werkzeug sei die Einführung der Diskriminanten beim Lösen quadratischer Gleichungen genannt. Beim Auflösen der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ wird nämlich erkannt, dass ein bestimmter Term, der sich dabei ergibt, Aussagen über die Lösbarkeit ermöglicht bzw. ggf. auch erlaubt, für spezielle quadratische Gleichungen schnell deren Lösungen anzugeben. Dieser wird als neues mathematisches Objekt begriffen und fortan als Diskriminante bezeichnet. Hier geht die Verwendung der Variablen also über die bloße Beschreibung des Unbestimmten hinaus.

chen Kontexte in gewisser Weise aufleben lassen? Wenn ja, in welchen Situationen und wie?

Neben dem Ausdrücken von Allgemeinheit / dem Umgang mit dem Unbestimmten und der Konstruktion abstrakter mentaler Objekte machen *structure sense* (Linchevski & Livneh 1999; Hoch & Dreyfus 2004, 2006) und *symbol sense* (Arcavi 1994) das Wesen algebraischen Denkens mit aus. Mit dem Begriff structure sense ist insbesondere ein Gefühl für Termstrukturen gemeint, das es ermöglicht, Teilstrukturen eines algebraischen Terms zu erkennen und z. B. für Umformungen nutzbar zu machen. Der Begriff des symbol sense umfasst ein Gefühl für die Kraft und günstige Einsatzmöglichkeiten der Formelsprache, für verschiedene Rollen, die Symbole in verschiedenen Zusammenhängen spielen können, und für die geeignete Auswahl von Symbolen. Auch die Fähigkeiten, symbolische Ausdrücke interpretieren und manipulieren zu können, gehören dazu. Es ergeben sich folgende weitere Fragen:

- Wie entwickelt sich structure sense? Wie kann die Entwicklung schon im Setting des konkreten Anschauungsmaterials unterstützt werden? Wie wirkt sich dies auf den structure sense und seine Weiterentwicklung nach der Ablösung vom Konkreten aus?

- Während das Ausdrücken von Allgemeinheit / der Umgang mit dem Unbestimmten, die Konstruktion abstrakter mentaler Objekte sowie der structure sense auch schon während der Betätigung in Kontexten ihren Anfang nehmen können, kann sich symbol sense erst wirklich entwickeln, wenn die symbolische Ebene erreicht ist. Inwiefern zeigen aber Vorerfahrungen der beschriebenen Art auch dafür ihre Wirkung und können bewusst nutzbar gemacht werden? Wie können darüber hinaus die Anfänge eines symbol sense unterstützt werden? Von Einsichten zu den hier skizzierten Fragen kann in einem nächsten Schritt die Erforschung der Weiterentwicklung des symbol sense über ein Grund-Niveau hinaus profitieren (also nach der tatsächlichen Ablösung vom Konkreten und einer gewissen Festigung im Umgang mit der symbolischen Formelsprache).

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1980). Denken: das Ordnen des Tuns. Bd. 1 – Kognitive Aspekte der Handlungstheorie (1993- 2. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1985). Das operative Prinzip. mathematik lehren, 11, 4-6.

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R. et al. (2003). mathbu.ch 7. Bern/Zug: Schulverlag blmv AG und Klett und Balmer AG.

Akinwunmi, K. (2012). Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Arcavi, A. (1994, November). Symbol sense. Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14 (3), 24-35.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 70 (2), 97-109.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Hrsg.). (1996). Approaches to Algebra. Perspctives for Research and Teaching. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Berlin, T. (2010). Algebra erwerben und besitzen. Eine binationale empirische Studie in der Jahrgangsstufe 5. Dissertation Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, verfügbar: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-24507/main.pdf; Zugriff am 7. Nov. 2011.

Berlin, T., Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Melzig, D. (2009). Vom Rechnen zum Rechenschema. Zum Aufbau einer algebraischen Perspektive im Arithmetikunterricht. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden (S. 270-291). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Berlin, T. & Hefendehl-Hebeker, L. (2011). Stufen der algebraischen Denkentwicklung. Der Mathematikunterricht, 57 (2), 16-22.

Bertelsmann Lexikon-Verlag (Hrsg.). (1973). Das Bertelsmann Lexikon in zehn Bänden (Bd. 6). Gütersloh: Bertelsmann Lexikon-Verlag.

Brandt, B. (2006). Kinder als Lernende im Mathematikunterricht der Grundschule. In H. Jungwirth & G. Krummheuer (Hrsg.), Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht (Bd. 1, S. 19-51). Münster: Waxmann.

Brandt, B. & Höck, G. (2011). Ko-Konstruktion in mathematischen Problemlöseprozessen – partizipationstheoretische Überlegungen. In B. Brandt, R. Vogel & G. Krummheuer (Hrsg.), Die Projekte erStMaL und MaKreKi : mathematikdidaktische Forschung am „Center for Individual Development and Adaptive Education“ (IDeA) (S. 245-284). Münster: Waxmann.

Brandt, B. & Krummheuer, G. (2000). Das Prinzip der komparativen Analyse. Journal für Mathematik-Didaktik, 21 (3/4), 193-226.

Cassirer, E. (1910/1980). Substanzbegriff und Funktionsbegriff: Untersuchung über die Grundfragen der Erkenntniskritik (5., unveränd. Aufl., reprograf. Nachdr. d. 1. Aufl.). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Deutscher Taschenbuch Verlag (Hrsg.). (1997). dtv-Lexikon in 20 Bänden (Bd. 12). Mannheim/München: Brockhaus/Deutscher Taschenbuch Verlag.

Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter. Utrecht:

CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education. Dissertation Utrecht University.

Drijvers, P. (2006). Die variable Unbekannte. Facetten des Variablenbegriffs mit Computeralgebra erkunden. mathematik lehren, 136, 10-12.

Edwards, L. D. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk. Educational Studies in Mathematics, 70 (2), 127-141.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. Praxis der Mathematik in der Schule, 52 (33), 1-7.

Fischer, R. & Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe (1977- 2. Aufl.). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). Dialogische Lernen in Sprache und Mathematik. Seelze.

Goldin-Meadow, S. (2005). Hearing Gesture. How our hands help us think. Cambrigde, Massachusetts, and London, England: The Belknap Press of Harvard University Press.

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. ZDM - The International Journal of Mathematics Education, 40 (3), 487-500.

Harel, G. (2008b). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. ZDM - The International Journal of Mathematics Education, 40 (5), 893-907.

Harel, G. (2008c). What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question. In B. Gold & R. Simons (Hrsg.), Proof and Other

Dilemma: Mathematics and Philosophy (S. 265-290). The Mathematical Association of America.

Harel, G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. Seeking New Frontiers. In B. Sriraman & L. English (Hrsg.), Theories of mathematics education (S. 343-367). Berlin, Heidelberg: Springer.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. Educational Studies in Mathematics, 18, 75-90.

Hefendehl-Hebeker, L. (2001). Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.), Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe: Festschrift für Siegbert Schmidt (S. 83-98). Hamburg: Kovac.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets. In Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Bd. 3, S. 49-56). Bergen.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure Sense versus Manipulation Skills: An unexpected Result. In Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Bd. 3, S. 305-312). Prag.

Howe, C. (2009). Collaborative Group Work in Middle Childhood. Joint Construction, Unresolved Contradiction and the Growth of Knowledge. Human Development, 52, 215-239.

http://de.wikipedia.org/wiki/biologie; zuletzt aufgerufen am 14.07.2012. (o. J.).

Hutchins, E. (2005). Material anchors for conceptual blends. Journal of Pragmatics, 37, 1555-1577.

Huth, M. (2009). Redebegleitende Gestik in mathematischen Kindergesprächen. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 (S. 235-238). Münster: WTM-Verlag.

Jungwirth, H. (2003). Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik - ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel. ZDM - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35 (5), 189-200.

Jungwirth, H. & Krummheuer, G. (2008). Interpretative Forschung als Prozess: zu den Denkfiguren einer Forschungsrichtung von ihrem Beginn bis heute. In H. Jungwirth & G. Krummheuer (Hrsg.), Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht (Bd. 2, S. 145-172). Münster: Waxmann.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Hrsg.), Mathematics and cognition (S. 96-112). Cambrigde: Cambridge University Press.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. A. Grouws (Hrsg.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (S. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Hrsg.), The Future of the Teaching and Learning Algebra (S. 21-33). Boston/Dordrecht/New York/London: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2007). Learing and teaching algebra at the middle school through college levels. building meaning for symbols and their manipulation. In J. Frank K. Lester (Hrsg.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (Bd. 2, S. 707-762). National Council of Teachers of Mathematic.

Krummheuer, G. (1984). Zur unterrichtsmethodischen Dimension von Rahmungsprozessen. Journal für Mathematik-Didaktik, 5 (4), 285-306.

Krummheuer, G. (1992). Lernen mit „Format". Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie. Diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Krummheuer, G. (2007). Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. In K. Rabenstein & S. Reh (Hrsg.), Kooperatives und selbstständiges Arbeiten von Schülern. Zur Qualitätsentwicklung von Unterricht (S. 61-86). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Krummheuer, G. (2008). Inskription, Narration und diagrammatisch basierte Argumentation. Narrative Rationalisierungspraxen im Mathematikunterricht der Grundschule. In H. Jungwirth & G. Krummheuer (Hrsg.), Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht (Bd. 2, S. 7-37). Münster: Waxmann.

Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Krummheuer, G. & Fetzer, M. (2005). Der Alltag im Mathematikunterricht. München: Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag.

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung. Opladen: Leske+Budrich.

Laborde, C. (1990). Language and Mathematics. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Hrsg.), Mathematics and cognition (S. 53-69). Cambrigde: Cambridge University Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). Where Mathematics Comes From. How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. Educational Studies in Mathematics, 40 (2), 173-196.

Malle, G. (1983). Zur Fähigkeit von Schülern im Aufstellen und Interpretieren von Formeln. Mathematiklehrer, 2, 11-17.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). Developing Thinking in Algebra. London: The Open University, Paul Chapman Publishing.

McNeill, D. (1992). Hand and Mind. What Gestures Reveal about Thought. Chicago and London: The University of Chicago Press.

McNeill, D. (2005). Gesture and Thought. Chicago and London: The University of Chicago Press.

Melzig, D. (2010). „Diese Ls sind die 3 beim Kevin". Algebraische Terme anhand von Strukturen in Holzwürfelmauern deuten. Praxis der Mathematik in der Schule, 52 (33), 8-11.

Mormann, T. (1981). Argumentieren – Begründen – Verallgemeinern. Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Königstein: Scriptor.

Naujok, N., Brandt, B. & Krummheuer, G. (2008). Interaktion im Unterricht. In W. Helsper & J. Böhme (Hrsg.), Handbuch der Schulforschung (2. Aufl., S. 779-799). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Parrill, F. & Sweetser, E. (2004). What we mean by meaning. Conceptual integration in gesture analysis and transcription. Gesture, 4 (2), 197-219.

Piaget, J. (1947/1970). Psychologie der Intelligenz (4. Aufl. in d. vollst. überarb. Übers. d. 2. Aufl.). Zürich: Rascher Paperback.

Piaget, J. (1970/1973). Einführung in die genetische Erkenntnistheorie (Übers. aus dem Engl., 1. Aufl.). Frankfurt am Main: suhrkamp taschenbuch wissenschaft.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. Mathematical Thinking and Learning, 5 (1), 37-70.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. Educational Studies in Mathematics, 70 (2), 111-126.

Radford, L. (2010). Signs, Gestures, Meanings: Algebraic Thinking from a Cultural Semiotic Perspective. In F. A. Viviane Durand-Guerrier Sophie Soury-Lavergne (Hrsg.), Proceedings of CERME 6, January 28th - February 1st 2009, Lyon (France) (S. XXXIII-LIII). Institut National de Recherche Pédagogique.

Roth, W.-M. (2001). Gestures: Their Role in Teaching and Learning. Review of Educational Research, 71 (3), 365-392.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988, September). On the meaning of variable. The Mathematics Teacher, 81 (6), 420-427.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel & K. McClain (Hrsg.), Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design (S. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (Hrsg.). (2004). The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Boston/Dordrecht/New York/London: Kluwer Academic Publishers.

Steinbring, H. (1999). Epistemologische Analyse mathematischer Kommunikation. In Beiträge zum Mathematikunterricht 1999 (S. 515-518). Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (2000a). Abschlußbericht zum DFG-Projekt „Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule)“. Dortmund: Universität Dortmund, Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts.

Steinbring, H. (2000b). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. Journal für Mathematik-Didaktik, 21 (1), 28-49.

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? – An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. Educational Studies in Mathematics, 61 (1-2), 133-162.

Steinbring, H. (2009). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer.

Steinbring, H. (2010). Basic Characteristics of Algebraic Thinking: >Signs as Descriptors< vs. >Signs as Creators<. A reaction to the Plenary talk by Luis Radford: Signs, Gestures, Meanings: Algebraic Thinking from a Cultural Semiotic Perspective. In F. A. Viviane Durand-Guerrier Sophie Soury-Lavergne (Hrsg.), Proceedings of CERME 6, January 28th - February 1st 2009, Lyon (France) (S. LXXXII-LXXXVI). Institut National de Recherche Pédagogique.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. & Lins, R. (Hrsg.). (2001). Perspectives on School Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Thiel, C. (1996). Artikel „Variable“. In J. Mittelstraß (Hrsg.), Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Band 4 (S. 473-475). Stuttgart, Weimar: Metzler.

Van Amerom, B. (2002). Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Utrecht: CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education. Dissertation Utrecht University.

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. Educational Studies in Mathematics, 54, 63-75.

Voigt, J. (1994). Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), Verstehen und Verständigung: Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung (S. 77-111). Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Voigt, J. (1996). Empirische Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. In G. Kadunz (Hrsg.), Trends und Perspektiven (S. 383-398). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). Algebra in der Sekundarstufe (3. Aufl.). München: Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag.

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Hrsg.), Approaches to Algebra (S. 317-325). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Winter, H. (1989). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht (E. Ch. Wittmann, Hrsg.). Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Zazkis, R. (2001). From Arithmetic to Algebra via Big Numbers. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Hrsg.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference) (Bd. 2, S. 676-681). Department of Science and Mathematics Instruction, University of Melbourne.

Nachweis indirekt verwendeter Arbeiten

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Hrsg.), Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II (S. 1-56). Köln: Aulis-Verlag Deubner – wird verwendet in Hefendehl-Hebeker 2001.

Church, R. B. & Goldin-Meadow, S. (1986). The mismatch between gesture and speech as an index of transitional knowledge. Cognition, 23, 43-71 – wird verwendet in Goldin-Meadow 2005.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Hrsg.). (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale: Lawrence Erlbaum – wird verwendet in Krummheuer & Fetzer 2005.

Ekman, P. & Friesen, W. (1969). The repertoire of nonverbal behavioral categories. Semiotica, 1, 49-98 – wird verwendet in Goldin-Meadow 2005.

Glaser, B. & Strauss, A. (1967). The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research. New York: Aldine – wird verwendet in Brandt & Krummheuer 2000.

Glenberg, A. M. (1997). What memory is for. Behavioral and Brain Science, 20, 1-55 – wird verwendet in Goldin-Meadow 2005.

Goffman, E. (1974). Frame analysis. An essay on the organisation of experience. Cambrigde, MA: Harvard University Press – wird verwendet in Krummheuer 2008.

Goffman, E. (1981). Footing. In E. Goffman (Hrsg.), Forms of talk. Philadelphia: University of Philadelphia Press – wird verwendet in Krummheuer & Brandt 2001.

Goldin-Meadow, S. & McNeill, D. (1999). The role of gesture and mimetic representation in making language the province of speech. In M. C. Corballis & S. Lea (Hrsg.), The descent of mind (S. 155-172). Oxford: Oxford University Press – wird verwendet in Goldin-Meadow 2005.

Kendon, A. (1988). How gestures can become like words. In F. Poyatos (Hrsg.), Cross-cultural perspectives in nonverbal communication (S. 131-141). Toronto: Hogrefe – wird verwendet in McNeill 1992 und 2005.

Laborde, C. (1982). Langue naturelle et écriture symbolique: Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique. Unveröffentlichte Dissertation, Université Joseph Fourier, Institut IMAG, Grenoble, France – wird verwendet in Laborde 1990.

Lee, L. (1987). The status and understanding of generalised algebraic statements by highschool students. In J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Hrsg.), Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Bd. 1, S. 316-323). Montréal, Quebec – wird verwendet in Laborde 1990.

Lee, L. (1997). Algebraic understanding: The search for a model in the mathematics education. Unveröffentlichte Dissertation, Université du Québec, Montréal – wird verwendet in Kieran 2004.

Mandel, M. (1977). Iconic devices in American Sign Language. In L. A. Friedman (Hrsg.), On the other hand: New perspectives on American Sign Language (S. 57-107). New York: Academic Press – wird verwendet in McNeill 1992.

Sager, S. F. (2005). Ein System zur Beschreibung von Gestik. Osnabrücker Beiträge zur Sprachtheorie, 70, 19-47 – wird verwendet in Huth 2009.

Strauss, A. & Corbin, J. (1990). Basics of qualitative research. Grounded theory procedures and techniques. Newbury Park, CA; London, UK; New Delhi, India: Sage – wird verwendet in Brandt & Krummheuer 2000.

Sutter, T. (1994). Entwicklung durch Handeln in Sinnstrukturen. Die sozial-kognitive Entwicklung aus der Perspektive eines interaktionistischen Konstruktivismus. In T. Sutter & M. Charlton (Hrsg.), Soziale Kognition und Sinnstruktur (S. 23-112). Oldenburg: Universität Oldenburg – wird verwendet in Brandt 2006.

Sutter, T. & Charlton, M. (1994). Im Süden alles anders? Argumente für eine strukturgenetische Sozialisationsforschung. In T. Sutter & M. Charlton (Hrsg.), Soziale Kognition und Sinnstruktur (S. 11-22). Oldenburg: Universität Oldenburg – wird verwendet in Brandt 2006.

Voigt, J. (1984). Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Weinheim: Beltz – wird verwendet in Krummheuer 1984 und Krummheuer & Fetzer 2005.

Whitehead, A. N. (1911). An Introduction to Mathematics. London: Williams and Norgate – zitiert nach Schoenfeld & Arcavi 1988.

Wittmann, E. C. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. mathematik lehren, 11, 7-11 – wird verwendet in Fischer, Hefendehl-Heberker & Prediger 2010.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule (S. 42-65). Berlin: Cornelsen – wird verwendet in Fischer, Hefendehl-Hebeker & Prediger 2010.

Wood, T. & Cobb, P. et al. (1993). Rethinking elementary school mathematics: Insights and Issues. Reston, Vi: The National Council of Teachers of Mathematics – wird verwendet in Krummheuer & Fetzer 2005.

Anhang A

Transkriptionslegende

35	Die einzelnen Wortbeiträge sind durchnummeriert.
(.)	Pause von ca. 1 Sekunde
(..)	Pause von ca. 2 Sekunden
(...)	Pause von ca. 3 Sekunden
(15 sec. Pause)	Bei längeren Pausen ist deren Dauer angegeben.
Die	Besonders betonte Wörter werden durch Unterstreichung hervorgehoben; z. B.: „Die musst Du auch noch dazu rechnen.“
dreizehn	Besonders lang gezogene Wörter werden durch gestrichelte Unterstreichung kenntlich gemacht.
(1 Wort unverständlich)	Ist in einem Beitrag ein Wort unverständlich, so wird dies wie im folgenden Beispiel verschriftlicht: „Hier muss *(1 Wort unverständlich)* noch einer hin.“
[weißen]	Besteht bei einem unverständlichen Wort eine Vermutung, wird diese in eckigen Klammern transkribiert; z. B.: „In den [weißen] Boxen sind überall fünf.“
(zeigt entlang der Boxen in Anordnung A)	Handlungen, Gesten, Ausdruck und Anmerkungen werden in kursiver Schrift und in Klammern wiedergegeben. Hierbei markiert das Satzzeichen die Gleichzeitigkeit von Handlung und Sprechakt; z. B. „Hier sind zehn Bohnen *(zeigt entlang der Boxen in Anordnung A)*. Dann müssen hier …“

# Eingerückter Text	Ein Sprecher fällt dem anderen ins Wort. Die entsprechende Stelle im Beitrag des ersten Sprechers wird mit einer Raute markiert. Der Text des zweiten Sprechers wird ebenfalls mit einer Raute eingeleitet und soweit eingerückt, dass die Rauten untereinander stehen, um die Gleichzeitigkeit anzudeuten; z. B.: Bea Wieviel Bohnen sind # das? Bianca # 12. Bei mehr als zwei gleichzeitigen Sprechakten werden auch zwei oder mehr Rauten verwendet.
Mmh	eindeutige Bejahung
Hmhm	eindeutige Verneinung
Hm?	nachfragend
Mmm	überlegend

Anhang B

Ergänzende Transkripte

B.1 Gruppe N – Ermittlung der ersten Lösung zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation

Anordnung A	Anordnung B
■■·····	□□□···

Während der Beiträge <1>-<5> spielt Nathan mit dem Gummiring, mit dem die Tüte verschlossen war, in welcher sie die Boxen und Bohnen bekommen haben.
Die Schüler haben die Boxensituation auf dem Tisch aufgebaut. Noah hat soeben die Aufgabenstellung an der konkreten Boxensituation erläutert. Nun beginnt er, die Bedingungen noch einmal vorzulesen:

1	Noah	In den beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden,
2	Nathan	*mehrere Wörter unverständlich*
3	Nils	Nee,
4	Noah	Also insgesamt, (.)
5	Nils	Eigentlich gar nicht, oder?
6	Noah	Das heißt *(leiser werdend)*,
7	Nathan	*nimmt sich die leere Tüte, in welcher sie die Boxen und Bohnen bekommen haben*
8	Noah	Die einzelnen Bohnen und die Bohnen in der Box zusammengezählt.

9	Nathan	*macht den Gummiring um die Tüte*
10	Noah	# Ja sag' ich doch. Ja.
11	Nils	# Ach so, dann müssen jetzt hier *(legt beide Hände an die schwarzen Boxen)* zum Beispiel keine *(tippt mit der rechten Hand auf die schwarzen Boxen)* Bohne, *(führt die rechte Hand zu den weißen Boxen)* ach nee, hier müssen auf jeden Fall drei Bohnen drin sein *(tippt mehrmals mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger auf die drei weißen Boxen)*, oder? In diesen, also in jedem eine *(tippt mit dem Zeigefinger der rechten Hand nacheinander auf alle drei weißen Boxen)*, ne?
12	Niko	Ja.
13	Noah	Ja? Wieso?
14	Nils	*(nimmt die rechte Hand kurz zu sich zurück)* Ja weil in allen dieser weißen Teile *(tippt mit Zeige-, Mittel- und Ringfinger der rechten Hand auf die drei weißen Boxen und nimmt die Hand wieder zurück)* # muss doch irgendwie eine, also, hier müssen doch gleich viele Bohnen sein *(führt die rechte Hand wieder an die weißen Boxen)*, in jedem einzeln *(tippt mit dem Zeigefinger der rechten Hand nacheinander auf die drei weißen Boxen)*, oder?
15	Nathan	# *legt die Tüte zurück und fängt an, die einzelnen Bohnen bei den schwarzen Boxen einzusammeln und in eine Vorratsbox zu füllen*
16	Noah	Ja. Und in den beiden *(tippt mehrmals abwechselnd mit Zeige- und Ringfinger der rechten Hand auf die beiden schwarzen Boxen)* müssen auch gleich viele sein.
17	Nils	*(legt die rechte Hand auf die schwarzen Boxen und bewegt die Boxen ein wenig)* Ja, und insgesamt *(kreist mit der rechten Hand über den schwarzen Boxen)* müssen das gleich viele, *(schaut zu Nathan, der gerade die letzten einzelnen Bohnen bei den schwarzen Boxen entfernt hat)* warte, # lass die *(greift in Nathans Vorratsbox)* doch mal da liegen, ist doch gut.
18	Noah	# Ja.
19	Nathan	Ach so, da müssen jetzt fünf # rein *(tippt zweimal mit dem Zeigefinger der rechten Hand dort neben den schwarzen Boxen auf, wo vorher die einzelnen Bohnen gelegen haben)*
20	Noah	# *legt zwei Bohnen, die er vorher in seinen Händen hatte, zu den schwarzen Boxen*
21	Nils	Fünf ja,

22	Nathan	Jetzt muss noch drei, drei, drei, [brauchst Du noch]
23	Nils	Drei. So, *(legt die drei noch fehlenden einzelnen Bohnen zu den schwarzen Boxen)*
24	Noah	*(liest von seinem Arbeitsblatt vor)* Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen. # So, da nehmen wir mal *(nimmt Bohnen aus Nikos Hand, der sich einen Bohnenvorrat in die Hand geschüttet hat)*, so.
25	Nathan	# *nimmt die schwarzen Boxen aus der Boxensituation zu sich und öffnet sie*
26	Nils	# Ja, öh *(deutet mit der rechten Hand auf die Anordnung mit den weißen Boxen, dabei dreht er die Handfläche nach oben)*
27	Niko	Bohnen.
28	Noah	*steht auf und beugt sich über den Tisch zu der Anordnung mit den weißen Boxen*
29	Nils	Dann kommt da doch *(zeigt nacheinander mit dem Zeigefinger der rechten Hand auf die weißen Boxen)*, kommt eins rein
30	Noah	*öffnet die erste weiße Box und legt eine Bohne hinein*
31	Nathan	Was jetzt?
32	Nils	Leg das doch *(zeigt auf die weiße Box, die Noah gerade geöffnet hat)* lieber da <u>drauf</u>, oder?
33	Noah	Eins geht schon mal nicht.
34	Nils	Wieso nicht?
35	Noah	Also zwei. Ja weil eins, # geht ja dann *(abbrechend)*
36	Nils	# Ah ja stimmt, dann können die hier *(deutet mit der rechten Hand auf die schwarzen Boxen)* ja nicht [wechseln]
37	Noah	*(legt eine zweite Bohne in die geöffnete weiße Box)* Also zwei schon mal *(öffnet die zweite weiße Box und legt zwei Bohnen hinein)*
38	Nathan	Bei mir auch jetzt, oder wie?
39	Nils	Nein, noch nicht, Du noch nicht. *(greift nach der dritten weißen Box, nimmt die Hand dann aber wieder zurück)*
40	Noah	*öffnet die dritte weiße Box*
41	Nathan	Ma, ich versteh' das irgendwie nicht.
42	Noah	Eins, zwei. *(legt zwei Bohnen in die dritte weiße Box)* Ist egal, wir denken.

43	Nils	[Wir erklären das dann gleich] *(legt eine der schwarzen Boxen wieder etwas weiter in Richtung Tischmitte und der zur Anordnung gehörenden Bohnen)* Zwei. Das sind dann insgesamt # neun Bohnen, ne? *(zeigt auf die Anordnung mit den weißen Boxen)*
44	Niko	# *(an Noah gerichtet?)* Du bist der Schreiber, Schreiber können nicht denken,
45	Noah	So, und da *(zeigt auf die einzelnen Bohnen, die zur Anordnung mit den schwarzen Boxen gehören)* müssen dann #, ja das geht doch *(greift in Nathans Vorratsbox)*
46	Nils	# *(legt die schwarze Box, die er eben schon bewegt hat, von sich aus gesehen rechts neben die einzelnen Bohnen, die zu der Anordnung gehören)* Auch zwei.
47	Noah	*greift in Nathans Vorratsbox und legt zwei Bohnen in die schwarze Box, die noch vor Nathan liegt*
48	Nils	Jeweils zwei,
49	Nathan	*legt in die zweite schwarze Box zwei Bohnen*
50	Noah	Ja, dann geht das doch,
51	Nils	Nathan, soll ich Dir das mal erz- #, erklären?
52	Nathan	# Ja, erklär.
53	Noah	*nimmt beide schwarzen Boxen und stellt sie von sich aus gesehen rechts neben die zugehörigen einzelnen Bohnen, so dass die Situation im Prinzip wieder so aufgebaut ist wie zu Beginn der Lösungssuche*
54	Nils	Guck mal, hier, bei *(umfasst mit den Fingern der rechten Hand die einzelnen Bohnen bei den schwarzen Boxen)*, also *(tippt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand auf die beiden schwarzen Boxen)* zwei schwarze und dann sind da immer fünf solche Bohnen *(umfasst mit den Fingern der rechten Hand die einzelnen Bohnen bei den schwarzen Boxen)*, und bei den drei weißen *(umfasst mit den Fingern der rechten Hand die einzelnen Bohnen bei den weißen Boxen)* sind drei solche Bohnen, ähm, in-sgesamt müssen bei den schwarzen *(hält die rechte Hand mit gespreizten Fingern über die Anordnung mit den schwarzen Boxen, so dass er sowohl die schwarzen Boxen als auch die einzelnen Bohnen überspannt)* gleich viele Bohnen wie bei den weißen *(bewegt die rechte Hand über der Anordnung mit den weißen Boxen hin und her)* sein, ne?
55	Nathan	Ach so, ja,

56	Nils	Und, in den schwarzen Kästchen *(zeigt mit zwei Fingern (?) der rechten Hand in die schwarzen Boxen)* müssen in beiden *(bewegt die Hand über den schwarzen Boxen hin und her)* gleich viel Bohnen drin sein, und in den weißen *(deutet mit der Hand auf die weißen Boxen)*, auch in allen dreien *(bewegt die Hand an den weißen Boxen entlang)* # gleich viele
57	Nathan	# Ja ja, ich versteh'
58	Nils	Verstehst du jetzt?
59	Nathan	Mmh *(zustimmend)*
60	Nils	Ja warte mal, *(schaut auf sein Arbeitsblatt)* Wie viele Bohnen,
61	Nathan	*(zählt mit dem Finger zeigend die Bohnen in den beiden Anordnungen nach; dabei zeigt er jeweils zweimal auf jede Box)* Passt. (..) # Und was jetzt?
62	Nils	# Zwei in jeder Box, oder? *(tippt mit dem Finger auf sein Arbeitsblatt)*
63	Noah	Ja.

B.2 Gruppe N – Ermittlung weiterer Lösungen zu der in der Aufgabe vorgegebenen Boxensituation – Nils erläutert die zweite Hälfte seines Verfahrens für Nathan

Anordnung A	Anordnung B
■ ■ • • • • •	□ □ □ • • •

Es wird nur das Gespräch zwischen Nils und Nathan wiedergegeben, da nur dieses für diesen Anhang von Interesse ist.

Die Schüler testen gerade die Möglichkeit, jede weiße Box (gedanklich) mit acht Bohnen zu befüllen / zu belegen. Nathan hat bereits berechnet, dass sich in der Anordnung mit den weißen Boxen dann 27 Bohnen befinden. Anschließend zeigt er auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen, hält einen Moment inne und befindet, dass es nicht ginge.

1	Nils	27 geht doch auch!
2	Nathan	Warum geht das denn?
3	Nils	27, (*umfasst die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen*) was plus fünf ist 27?(*schaut Nathan an)*(.) 22. 22 kannst Du durch zwei teilen (*tippt mit Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand auf die beiden schwarzen Boxen)*
4	Nathan	Ach so. Ach man muss das ja immer, also dann subtrahieren.