Unredigierte Vorversion des Beitrags:
Zwetzschler, Larissa & Prediger, Susanne (2013): Der lange Weg zum Herstellen von Beziehungen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung zur Gleichwertigkeit algebraischer Terme. In: Komorek, Michael & Prediger, Susanne (Hrsg.): Der lange Weg zum Unterrichtsdesign: Zur Begründung und Umsetzung genuin fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme. Münster u.a.: Waxmann, 141-156.

Larissa Zwetzschler & Susanne Prediger

Der lange Weg zum Herstellen von Beziehungen

Fachdidaktische Entwicklungsforschung zur Gleichwertigkeit algebraischer Terme

Der Umgang mit algebraischen Termen ist für viele Lernende eine Herausforderung: Warum ist zum Beispiel 10n+3 nicht gleich 13n? Was bedeutet es überhaupt, dass zwei Terme gleichwertig sind? Selbst Lernende, die Terme umformen können, verfügen oft nicht über die dem Kalkül zugrunde liegenden inhaltlichen Vorstellungen. Zwar wird die Priorität des Aufbaus inhaltlicher Vorstellungen vor dem Umformungskalkül seit langem gefordert (z.B. Malle 1993), doch stützt die empirische Forschung die Umsetzung dieses Ziels nur begrenzt, indem sie noch immer vorrangig auf die Dokumentation von diesbezüglich defizitären Lernständen fokussiert (Überblick bei Kieran 2007).

Begrenzt ist dagegen das empirisch abgesicherte Wissen über lernförderliche Lehr- und Lernarrangements, über typische Verläufe, Herausforderungen und Ressourcen der initiierbaren Lehr-Lernprozesse und über daraus abgeleitete fokussierte Unterstützungsmöglichkeiten. Dieser Beitrag gibt Einblicke in ein Entwicklungsforschungsprojekt im Dortmunder Modell (allgemein Prediger et al. 2012, Hußmann, Prediger, Hinz, Ralle & Thiele in diesem Band), das diese Entwicklungs- und Forschungslücken bearbeitet (zum Projekt Prediger & Zwetzschler 2013, Zwetzschler i.V.). Am exemplarischen Teilaspekt der Studie, dem Herstellen von Beziehungen zwischen Termen und geometrischen Figuren, wird aufgezeigt, inwiefern theoretisch und empirisch abgesicherte Unterrichtsdesigns einen langen (fünf Design-Experiment-Zyklen umfassenden) Weg der iterativen Verknüpfung von Forschung und Entwicklung erfordern. Die Wendung „Der lange Weg“ bezieht sich dabei sowohl auf die Prozesse der Lernenden, als auch auf die Entwicklungsforschungsprozesse, die dazu dienen, diese Prozesse zu verstehen und Unterstützungsmöglichkeiten zu entwickeln.

1. Aspekte des Forschungs- und Entwicklungsstands zur Gleichwertigkeit von Termen

1.1 Spezifizierung des Lerngegenstandes

Breiter Konsens herrscht in der deutschsprachigen Didaktik der Algebra zur Spezifizierung des Lerngegenstandes im Allgemeinen, insbesondere zu verschiedenen Bedeutungen und Handlungssituationen mit Variablen und Termen (Kieran 2007, Malle 1993).

Terme beschreiben graphische und verbal gegebene Zusammenhänge – Beispiel

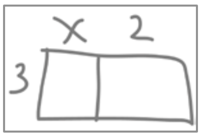
Terme:	Bild:	Sachzusammenhang:
Term A: $3 \cdot x + 3 \cdot 2$ Term B: $3 \cdot (x+2)$		Sachzusammenhang: Die Blumen für Blumensträuße haben wechselnde Preise x €. Hinzu kommen jeweils 2 € Kosten für die Bindung. Wie viel kosten 3 Sträuße?

Abb. 1: Besipiel für Beschreibungsgleichheit zweier Terme

Zahlreiche Studien zeigen Schwierigkeiten von Jugendlichen nicht nur beim Umformen algebraischer Terme und Gleichungen (Tietze 1988, Demby 1997), sondern auch beim Aufstellen und Interpretieren von Termen und Gleichungen (Malle 1993). Dem zugrunde liegen oft nicht tragfähige inhaltliche Deutungen von Variablen, Gleichungen und Termen (Usiskin 1988, Malle 1993, aktueller Überblick in Kieran 2007).

Eine wichtige Bedeutung der Gleichwertigkeit von Termen taucht in der Handlungssituation des Beschreibens und Verallgemeinerns auf: Wenn zwei Terme den gleichen Zusammenhang allgemein beschreiben, sind sie gleichwertig (wie in Abb. 1). Um dieses inhaltliche Verständnis zur Gleichwertigkeit als *Beschreibungsgleichheit* aufbauen zu können, dürfen Terme nicht nur als Aufforderung zum Ausrechnen verstanden werden (eine rein *operationale* Perspektive), sondern müssen in Beziehung zu graphisch oder verbal gegebenen Zusammenhängen gesetzt werden (in Zwetzschler und Prediger 2013 genannt *relationale* Perspektive). Neben der Beschreibungsgleichheit gibt es zwei weitere Deutungen der Gleichwertigkeit zweier Terme wie $3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3 \cdot (x + 2)$, die jeweils je nach Deutung der Variable aktiviert werden (vgl. Malle 1993, S. 239, Prediger 2009, S. 229):

– *Beschreibungsgleichheit*: Werden die Variablen als unbestimmte (nicht näher bestimmte) Zahlen gedeutet (Gegenstandsaspekt der Variablen, Malle 1993, S. 46), so gelten zwei Terme dann als gleichwertig, wenn sie denselben allgemeinen Sachzusammenhang oder dieselbe allgemeine Figur auf unterschiedliche Weise beschreiben.
– *Einsetzungsgleichheit*: Werden die Variablen als Platzhalter für das potenzielle Einsetzen von Zahlen gedeutet (Einsetzungsaspekt, vgl. Malle 1993, S. 46), so gelten zwei Terme dann als gleichwertig, wenn sie für alle einsetzbaren Zahlen denselben Wert ergeben.
– *Umformungsgleichheit*: Werden die Variablen als interpretationslose Zeichen angesehen, mit denen ohne explizite Deutung nach bestimmten Regeln gearbeitet werden kann (Kalkülaspekt der Variablen, Malle 1993, S. 46), gelten zwei Terme als gleichwertig, wenn sie sich durch Termumformungsregeln (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität) ineinander überführen lassen.

Während dem Aufstellen von Termen in den letzten Jahren viel Entwicklungsarbeit gewidmet wurde (z.B. Mason, Graham & Johnston-Wilder 2005, Wieland 2003, Berlin & Hefendehl-Hebeker 2011), wurden Lernwege zum Vorstellungsaufbau der Gleichwertigkeit von der Beschreibungsgleichheit zur Einsetzungs- zur Umformungsgleichheit (Malle 1993, S. 239, Mason, Graham, Pimm & Gowar 1985, S. 29ff.) zwar skizziert, aber kaum systematisch beforscht (Ausnahme Kieran & Sfard 1999, zur Einsetzungsgleichheit: Solares & Kieran 2012, Rittle-Johnson, Matthews, Taylor & McEldoon 2011, Pilet 2012).

1.2 Allgemeine Design-Prinzipien und Ansätze zur gegenstandsspezifischen Umsetzung

Wie können Lehr-Lernarrangements den Aufbau inhaltlicher Vorstellungen fördern? Dazu wurden zahlreiche allgemeine, gegenstandsübergreifende Design-Prinzipien formuliert, von denen das hier beschriebene Projekt vor allem auf die drei folgenden zurückgreift:

- *inhaltliches Denken vor Kalkül* (Freudenthal 1983, vom Hofe 2003, Prediger 2009): Zu jedem mathematischen Lerngegenstand sind zunächst inhaltliche Vorstellungen zu entwickeln, bevor ein Übergang zum Kalkül erfolgt. Auch im weiteren Lernprozess sind Kalkül und inhaltliche Vorstellungen immer wieder zu verknüpfen. Dieses mathematikspezifische Prinzip konkretisiert das allgemeinere, fachübergreifende Prinzip der Priorität konzeptuellen Verständnisses vor prozeduralem Wissen.
- *Darstellungswechsel* (Lesh 1979, Duval 2006): Da Bedeutungskonstruktion stets im Zusammenspiel verschiedener Darstellungsformen erfolgt, sollte die Vernetzung symbolisch-algebraischer, graphischer, numerischer und verbaler Darstellung immer wieder angeregt werden. Dies wird auch z.B. für die Physik gefordert (Leisen 2005).
- *Anknüpfen an mitgebrachte Vorstellungen* (Gerstenmaier & Mandl 1995): Für alle Fächer wird davon ausgegangen, dass Lernen sich stets durch Anknüpfen und Umbilden existierender kognitiver Strukturen vollzieht, daher müssen Lehr-Lernarrangements lernförderliche individuelle Vorstellungen aktivieren und daran gezielt anknüpfen.

Auch wenn die allgemeinen gegenstandsübergreifenden Design-Prinzipien bereits handlungsleitend klingen, erfordert ihre Umsetzung in konkreten Lehr-Lernarrangements jeweils gegenstandsspezifische Ausdifferenzierungen, die spezifische diesbezügliche Entwicklungsforschung notwendig machen. So war z.B. für die ersten zwei Prinzipien erst die Spezifikation erforderlich, *welche* inhaltlichen Vorstellungen und Darstellungen für den spezifischen Lerngegenstand Gleichwertigkeit von algebraischen Termen tatsächlich zentral und lernförderlich sind. Das Projekt konnte hier auf eine alte Idee zurück greifen, die Beschreibungsgleichheit von Termen durch einen Vergleich geometrischer Flächen zu erarbeiten: „Im Rahmen des Aufstellens und Interpretierens von Formeln in bedeutungsvollen Situationen (Rechensituationen, geometrischen Situationen, Sachsituationen) ergeben sich solche [Umformungs-]Regeln zwanglos, wenn ein Sachverhalt auf zwei verschiedene Arten beschrieben wird“ (Malle 1993, S. 239, ähnlich Mason et al. 2005). Dass dieser Zugang und die intendierte individuelle Vorstellungsentwicklung nicht immer so „zwanglos“ sind, wird Abschnitt 3 genauer zeigen: Insbesondere für schwächere Lernende ergaben sich in den ersten Design-Experimenten Hürden, die zunächst genauer untersucht werden mussten, um die Lehr-Lernarrangements im Hinblick auf den gewünschten Lernerfolg zu optimieren. Auch für das dritte Prinzip des Anknüpfens an mitgebrachte Vorstellungen waren weitere empirische Erhebungen notwendig, um nicht nur Fehlvorstellungen, sondern auch lernförderliche Anknüpfungspunkte aufzufinden und damit eine gegenstandsspezifische Ausdifferenzierung zu ermöglichen (Smith, diSessa & Rochelle 1993). Mit Fokus auf Herausforderungen und Anknüpfungspunkte im Lernprozess ergaben sich für die empirischen Analysen der verschiedenen Design-Experiment-Zyklen zwei Fragen:

– Welche individuellen Vorstellungen zu Variablen, Termen und zur Gleichwertigkeit haben die Lernenden, und inwiefern können diese weiterentwickelt werden?
– Wie kann die Vorstellungsentwicklung hin zu verschiedenen Bedeutungen der Gleichwertigkeit gefördert werden, wie mögliche Hürden überwunden werden?

2. Überblick über fünf Design-Experiment-Zyklen und Methoden

Der komplexe Prozess des Entwicklungsforschungsprojekts hatte insgesamt fünf Zyklen mit je unterschiedlichen Akteuren und leicht variierenden Zielen. Tabelle 1 gibt einen Überblick über das gesamte fünf-zyklige Entwicklungsforschungsprojekt, das eingebettet war in das zehnjährige Forschungs- und Entwicklungsprojekt KOSIMA (Hußmann, Leuders, Barzel & Prediger 2011), und dessen Ergebnis in einem Kapitel des Schulbuchs Mathewerkstatt 8 (Leuders, Prediger, Hußmann & Barzel 2015) mündet. Die Autorinnen dieses Beitrags sind in der Tabelle als die zwei Didaktikerinnen in jeder Phase aufgeführt. Die Forschungssubstanz der Zyklen 2-4 ist im Rahmen eines Dissertationsprojekts (Zwetzschler i.V.) entstanden. Die dabei weiter entwickelten lokalen Theorien zur Vorstellungsentwicklung zur Gleichwertigkeit mit ihren Wirkungsweisen und Bedingungen fundieren auch die gemeinschaftliche Weiterentwicklung und Optimierung des Lehr- und Lernarrangements in den andauernden, über die Dissertation hinausgehenden Fertigstellungsarbeiten im Design-Zyklus 5.

Zyklus 1 bis 4 des Projekts umfasste jeweils alle vier Arbeitsbereiche der Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Prediger et al. 2012, Hußmann, Prediger, Hinz, Ralle & Thiele 2013): 1. Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstands, 2. Design-Entwicklung, 3. Durchführung und Analyse von Design-Experimenten und 4. Entwicklung von lokalen Lehr- und Lerntheorien. In den Zyklen 1 bis 4 wurden jedoch je nach Ziel unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt, verschiedene Erhebungs- und Auswertungsmethoden genutzt und damit auch verschiedene Ergebnisse erzeugt.

Tab. 1: Fünf Zyklen der Design-Entwicklung und der Design-Experimente

Zyklus 1 Designteam (zwei Didaktikerinnen und erfahrene Lehrerin) (Sep 10 – Jan 11)	Ziele	Problem- und Anforderungsspezifikation, Entwicklung der Pilotierungsfassung
	Methoden	Problem- und Anforderungsanalysen mit Literaturrecherchen zur Spezifikation des Lerngegenstands und tragfähiger Design-Prinzipien, erste Umsetzungen in Lehr-Lernarrangements. Mehrfache Expertenevaluation der Entwürfe von vier erfahrenen Designern (Kosima-Projektleitung) unter Berücksichtigung konzeptioneller Kohärenz, Passung zu übergreifenden Design-Prinzipien, …
	Ergebnisse	Erste Pilotierungsfassung des Lehr-Lernarrangements (Prediger, Zwetschler & Schmidt 2011)
Zyklus 2a Design- und Forschungsteam (zwei Didaktikerinnen) (Jan 11 – Apr 11)	Ziele	Pilotierung zentraler Aufgaben; erste Einsichten in Lernwege & Herausforderungen
	Methoden	Design-Experimente in Laborsituationen (mit 2 x 2 Lernenden, 3 x 45 Min. lang) Ad-hoc-Videoanalysen zum Auffinden von Herausforderungen / Ressourcen
	Ergebnisse	Erste Erkenntnisse zu typischen Herausforderungen -> Vertiefte Spezifizierung des Lerngegenstandes, Überarbeitetes Lehr- und Lernarrangement
Zyklus 2b Design- und Forschungsteam und studentische Hilfskraft (Apr 11 – Nov 12)	Ziele	Vertiefte Analyse ausgewählter Stellen in den Lernwegen
	Methoden	Design-Experimente in Laborsituationen (mit 2 x 2 Lernenden, 3-4 x 60 Min. lang) i) Ad-hoc-Videoanalysen zum Auffinden weiterer Herausforderungen / Ressourcen ii) Vertiefte qualitative Analyse der Transkripte (von Zyklus 2a und 2b) mit Blick auf typische Herausforderungen, Ressourcen und schwierigen Momenten im Prozess, mit Vergnauds (1996) analytischen Konstrukten
	Ergebnisse	i) Herausarbeitung und Begrenzung des Forschungsinteresses & Prototyp des gesamten Lehr- und Lernarrangements ii) Erste Ergebnisse zur lokalen Theorie des Lehrens und Lernens algebraischer Gleichwertigkeit von Termen (Strukturierung des Lerngegenstandes, typische Herausforderungen, Ressourcen, erste Einblicke in Lernwege und die Auswirkungen des Elemente des Lehr- und Lernarrangements) (→Zwetzschler & Prediger 2013)
Zyklus 3 Design- und Forschungsteam und studentische Hilfskraft und Erprober (reguläre Lehrkräfte) (Sep 11 – Nov 12)	Ziele	Erprobung des kompletten Lehr- und Lernarrangements im regulären Unterricht Vertiefung empirischer Einblicke in individuelle Lernwege und ihre Bedingungen
	Methoden	Feld-Design-Exp. in 2 Klassen (20 / 32 Stunden à 45 Min.); trianguliert mit Labor-Design-Exp.(mit 6 x 2 Lernenden) zu Aufgabenauswahl (3-5 Sitzungen à 45 Min.) i) Evaluation mit Blick auf Lernergebnisse und Praktikabilität durch Videoanalysen, Lehrertagebüchern, schriftlichen Schülerprodukten und Tests zu Vorstellungen ii) Vertiefte Analyse von Transkripten bzgl. Lernwegen, Wirkungen, Bedingungen
	Ergebnisse	i) Praktisch erprobtes, teilweise überarbeitetes Lehr- und Lernarrangement ii) Weitere Erkenntnisse zur lokalen Theorie des Lehr- und Lernarrangements zur algebraischen Gleichwertigkeit (insbesondere im Lernweg) (→Zwetzschler, i.V.)
Zyklus 4 Design- und Forschungsteam und studentische Hilfskraft und Erprober (reguläre Lehrkräfte) (Dez 11 – Mär 12)	Ziele	Ausgewählte überarbeitete Aufgaben in Design-Experimenten testen (im Übergang zur Umformungsgleichheit); Evaluation des Arrangements bzgl. Lernerfolg
	Methoden	Feld-Design-Experimente mit einer Klasse (16 x 45 Min. lang); trianguliert mit Labor-Design-Exp.(mit 2 x 2 Lernende) zu Aufgaben-Auswahl (3 Sitzungen à 45 Min.) Evaluation der schriftlichen Tests und Videos mit Blick auf kognitive Anforderungen und Lernerfolg in der Vorstellungsentwicklung bei den neuen Aufgaben
	Ergebnisse	Praktisch und empirisch bewährtes Lehr- und Lernarrangement, das den intendierten Vorstellungsaufbau ermöglicht; Einblicke in Bedingungen für Wirksamkeit
Zyklus 5 Designteam, Verlagsredaktion & Herausgeber (Jan 13 – Dez 14)	Ziele	Finalisieren des Lehr- und Lernarrangements für den regulären breiten Einsatz
	Methoden	letzte Überarbeitungen bzgl. sprachlicher Hürden, Strukturtransparenz, kognitiver Sprünge etc.; Sammeln aussagekräftiger Beispiele für Lehrer-Handbuch
	Ergebnisse	Kapitel eines Schulbuches für Lernende des mittleren Schulabschlusses sowie eines Lehrer-Handbuchs zu typischen Lernwegen, Herausforderungen, Ergebnissen (→ Mathewerkstatt 8, Leuders et al. 2015)

Während man z.B. in Design-Experimenten in Laborsituationen (mit nur je zwei Lernenden) besser Lernwege in ihren Verläufen und Hürden in der Tiefe erforschen kann (Komorek & Duit 2004), dienen Design-Experimente mit ganzen Klassen und deren regulären Lehrkräften eher der Evaluation des Gesamtarrangements, auch im Hinblick auf praktische Nutzbarkeit unter Normalbedingungen; die Forschungsergebnisse zu Lernwegen und Bedingungen werden dabei einer Überprüfung im Hinblick auf ökologische Validität unterzogen.

Für die Tiefenanalyse der Lernwege wurde Vergnauds (1996) Theorie der konzeptuellen Felder herangezogen, mit der aus expliziten Äußerungen und sichtbaren Handlungen methodologisch abgesichert auf mentale Vorstellungen geschlossen werden kann; diese werden bei Vergnaud als Theoreme-in-Aktion und Konzepte-in-Aktion konzeptualisiert (vgl. Zwetzschler & Prediger 2013).

Vergnauds Konstrukte für die spezifischen Analysezwecke adaptierend wurden individuell für wahr gehaltene (oft implizite) Theoreme-in-Aktion in den empirischen Rekonstruktionen durch <…> markiert und systematisch mit um-zu formuliert, z.B. <Um die Richtigkeit eines Terms zu prüfen, kann ich diesen auf die Graphik beziehen>, die dahinter liegenden Konzepte-in-Aktion, mit denen die Individuen kategoriell die Phänomene fokussieren, werden durch ||..|| symbolisiert, z.B. ||relationale Darstellungsvernetzung||.

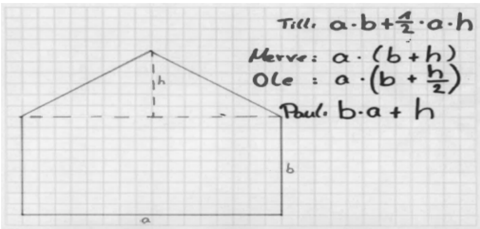
3. Längsschnitt durch die Zyklen am Beispiel des Herstellens von Beziehungen zwischen Termen und Figuren

Aus der Komplexität des Gesamtprojekts wird für diesen Artikel ein Teilaspekt herausgegriffen, um im Längsschnitt durch die Zyklen typische Vorgehensweisen und Zwischenergebnisse exemplarisch zu zeigen, und zwar die inhaltlichen Herausforderungen des Herstellens von Beziehungen zwischen Termen und Figuren. Thematisiert wird auch das unterrichtsmethodische Design-Element Hilfskarten, das zeitweilig eingesetzt wurde.

3.1 Design-Zyklus 1: Entwicklung des Lehr- und Lernarrangements

Eingebettet in das langfristige Forschungs- und Entwicklungsprojekt KOSIMA erfolgte die Entwicklung einer Serie aufeinander bezogener Lehr- und Lernarrangements (Prediger et al. 2011), an deren Kohärenz auch in Bezug auf weitere Design-Prinzipien (Hußmann et al. 2011) in der Kosima-Projektleitung intensiv in mehreren Design-Minizyklen gearbeitet wurde. Dabei wurde in Zyklus 1 zunächst auf empirische Befunde aus der Literatur zurückgegriffen (Teilaspekte skiziert in Abschnitt 1) statt auf eigene Design-Experimente. Das Ergebnis war eine erste Pilotierungsfassung des Lehr-Lernarrangements (Prediger et al. 2011), die für die Erhebungen in Zyklus 2a bis 4 und für das Dissertationsprojekt leitend waren.

(I) Unterschiedliche Terme für die gleiche Figur?
Welche Kinder berechnen die gleiche Fläche?
Und welche der Terme berechnen den
Flächeninhalt der gegebenen Figur richtig?



(II) Testen mit unterschiedlichen Werten
Setze unterschiedliche Werte
für die Variable ein.
Finde heraus, welche Terme gleichwertig sind.

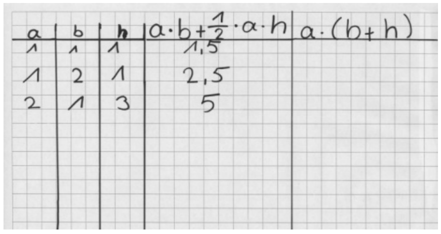


Abb. 2: Aufgabe (I) als Zugang zur Beschreibungsgleichheit, (II) zur Einsetzungsgleichheit

Aufgabe I (in Abb. 2) zielt auf die Entwicklung einer inhaltlichen Vorstellung zur *Beschreibungsgleichheit*, die erste der drei in Abschnitt 1.1 aufgeführten Bedeutungen der Gleichwertigkeit: Beim Prüfen der vier gegebenen Terme auf Passung zum Flächeninhalt der Figur können die Lernenden entdecken, dass Terme unterschiedlich aussehen und trotzdem dasselbe beschreiben können. Aufgabe II fordert das erneute Überprüfen der Gleichwertigkeit durch das Einsetzen unterschiedlicher Werte und knüpft so die algebraischen Terme an das mitgebrachte arithmetische Verständnis der Lernenden im Umgang mit Zahlen an (drittes Design-Prinzip). Diese Aufgabe II dient der Erweiterung des Vorstellungsrepertoires zur Gleichwertigkeit um die *Einsetzungsgleichheit*. Die dritte Erweiterung hin zur *Umformungsgleichheit* im anschließenden Lehr-Lernarrangement ist nicht mehr Teil des Dissertationsprojekts.

So erfolgten durch Aufgabenkonstruktion und Auswahl der Kontexte die Konkretisierungen der allgemeinen Design-Prinzipien *Inhaltliches Denken vor Kalkül* (hier Beschreibungs- und Einsetzungs- vor Umformungsgleichheit) und *Darstellungsvernetzung* zwischen symbolischer (algebraische Terme), graphischer (geometrische Figuren) und numerischer Darstellungsform (Zahlenterme nach Einsetzung) für den Gegenstand Terme.

3.2 Design-Experiment-Zyklus 2a: Pilotierung zentraler Aufgaben

In ersten empirischen Pilotierungen wurden *Design-Experimente* mit zentralen Aufgaben (wie in Abb. 2) in Laborsettings mit 2 x 2 Lernenden durchgeführt, weil die Laborsettings eine intensivere Beforschung der individuellen Lernwege, Ressourcen und Herausforderungen ermöglichen. Die Videos der Design-Experimente wurden zunächst grob analysiert hinsichtlich zentraler Eckpunkte im Lernprozess. Verfolgt wurde dabei das Ziel, das Lehr-Lernarrangement für weitere Design-Experimente optimieren zu können.

Analysiert wurde als erste Fallstudie der Lernweg von Paula und Daniel (Klasse 9). Der rekonstruierte Lernweg zeigte unterschiedliche Herausforderungen für den Bearbeitungs- und Lernprozess. So entwickelte sich der Teilaspekt „Herstellen relationaler Beziehungen zwischen Darstellungsformen“ als wichtiger Forschungsfokus in den Zyklen. Im Folgenden werden nur kleine Ausschnitte aus Paulas und Daniels Lernweg in Aufgabe I und II mit Fokus auf diesen Teilaspekt diskutiert, andernorts werden weitere Teilaspekte herausgearbeitet (Zwetzschler & Prediger 2013, Zwetzschler i.V.).

Einblicke in die empirische Analyse der Lernwege: Wie alle Lernenden bearbeiteten Paula und Daniel zum Einstieg Aufgaben, in denen sie den Flächeninhalt einfacher geometrischer Figuren bestimmen und arithmetische Terme in den Figuren interpretieren mussten, um anschließend die oben vorgestellten Aufgaben (Abb. 2) zu bearbeiten. In Aufgabe I (aus Abb. 2) gelang es ihnen, die zwei Terme $a \cdot (b + h/2)$ und $b \cdot a + h$ auf die Graphik zu beziehen, doch bei Tills Term $a \cdot b + ½ \cdot a \cdot h$ tauchte eine Hürde auf, die sie erst später durch wiederholte Impulse seitens der Interviewerin überwanden:

Zyklus 2a, Paula und Daniel, Sitzung 2, Aufgabe I, Zeit zu Beginn des Ausschnittes: *05:06Min.*

P	58	Ja ich weiß nicht, ob das funktioniert deswegen
D	59	Wären da jetzt ’n paar Werte drin, dann könnt man’s ausrechnen
P	60	Ja dann – aber *[schauen 10 Sek auf das Blatt]* doch das geht oder? *[deutet auf den Term von Till]* nein geht, ach ich weiß es nicht, also hier wird ja a · h gerechnet *[zeigt auf den Term und dann auf die gestrichelte Linie im Hausdach (Grundseite) und dann auf das ½ im Term]* aber von a die Hälfte nur irgendwie -- ½ sind 0,5 ne?
D	61	Ja
P	62	Also 0,5 · a · h, man bräuchte Werte, um das auszurechnen
D	63	Ja

Paula versuchte in Z60 (kurz für Zeile 60), den Term auf die Graphik zu beziehen und so ihre Flächenberechnung auf Richtigkeit zu prüfen. Dieses Herstellen einer relationalen Beziehung zwischen den beiden Darstellungsformen gelang ihr allerdings nur mit dem ersten Teilterm $a \cdot b$ in Z44f. vor dem hier abgedruckten Transkriptausschnitt. In Z58-Z62 dagegen gelang es ihr nicht, die Berechnung des Dachs relational mit dem gegebenen Term zu verbinden. Stattdessen ging sie in Z62 auf Daniels Idee aus Z59 ein, ersatzweise mit konkreten Werten zu rechnen. Beide aktivierten damit nicht mehr das zuvor rekonstruierte Theorem-in-Aktion <Um die Richtigkeit eines Terms zu prüfen, kann ich diesen auf die Graphik beziehen>, sondern nun <Um die Richtigkeit eines Terms zu prüfen, kann ich den Term berechnen>. Sie wechselten damit vom zugrundeliegenden Konzept-in-Aktion ||relationale Darstellungsvernetzung|| hin zu||operationale Darstellungsvernetzung||: In *relationaler Perspektive* wurden bei Darstellungsvernetzungen einzelne Elemente in Term und Graphik in Beziehung gesetzt, in *operationaler* Perspektive erfolgte die Vernetzung nur über die Operation Ausrechnen von Werten (für den Term und den Flächeninhalt der Figur; ausführlicher zum Theoriehintergrund in Zwetzschler & Prediger 2013). Im Detail zeigten sich hier insbesondere Probleme in der Zuordnung des zum Dreieck gehörenden Teilterms $½ \cdot a \cdot h$ zur Graphik. Die Konzepte ||½ · a als halbe Kante a|| sowie die ||Gleichschenkliges Dreieck als umlegbarer Teil des Rechtecks|| konnten Paula und Daniel in der Situation noch nicht aktivieren; wohingegen die relationale, also strukturelle Interpretation des ersten Teilterms $a \cdot b$ durch das Konzept ||Multiplikation als Rechteckdarstellung|| in Z60 bei Paula gelang.

Konsequenzen für die Spezifizierung des Lerngegenstandes und das Design: Die ersten empirischen Einblicke führten dazu, für die weitere *Spezifizierung des Lerngegenstandes* insbesondere auf die Flexibilisierung des relationalen Beziehungsherstellens zu fokussieren (vgl. Zwetzschler & Prediger 2013), da sich in den analysierten Design-Experimenten von Zyklus 2a sowohl Herausforderungen in der Zerlegung der Graphik als auch in deren symbolischer Repräsentation im Term zeigten. Dies erschien insbesondere als tragfähiger Anknüpfungspunkt, da das Herstellen relationaler Beziehungen für den Lerngegenstand von zentraler Bedeutung ist und in einfacheren Beziehungen (z.B. a · b) bereits gelang. Hier ergab sich ein erster Beitrag zur lokalen Lehr-Lerntheorie (weitere in Zwetzschler & Prediger 2013).

Als *Konsequenz für das Design des Lehr-Lernarrangements* wurde das Potential der bereits vorhandenen (ursprünglich lediglich als Zerlegungs- Ergänzungsübung gedachten) Aufgabe III (Abb. 3) identifiziert, da diese das Herstellen von Beziehungen zwischen Termen und Graphiken fördert und fokussiert. Die Aufgabe entlastete die komplexe Anforderung durch Reduktion auf Zahlenterme statt Variablenterme und damit von der Anforderung eine relationale Beziehung im Allgemeinen gleichzeitig herstellen zu müssen, und zusätzlich durch Vorstrukturierungen der Figuren in verschiedenen Zerlegungs- und Ergänzungswegen, wodurch eine Brücke zur relationalen Beziehung geschaffen werden soll. Die explizite Verbalisierung der jeweiligen Zerlegungs- bzw. Ergänzungswegs sollte das Herstellen von Beziehungen zusätzlich unterstützen. Den in der ersten Erprobung beobachteten oberflächlichen Bearbeitungen einiger Lernender (durch Zuordnung über einzelne Werte und Ausschlussstrategien) sollte entgegen getreten werden durch expliziteren Fokus auf die relationale Darstellungsvernetzung.

Zusätzlich sollten die Lernenden im Herstellen von relationalen Beziehungen weiterhin komplexe Zusammenhänge erkunden und verstehen (wie in Aufgabe I). Das dazu benötigte Vorwissen zu Variablen und Termen musste adäquat aktiviert und in der neuen Lernsituation vernetzt werden.

(III) Unterschiedliche Berechnungen der gleichen Figur?
Welche Terme, Strategien und Bilder gehören jeweils zusammen?
Ergänze die fehlenden Lösungen.

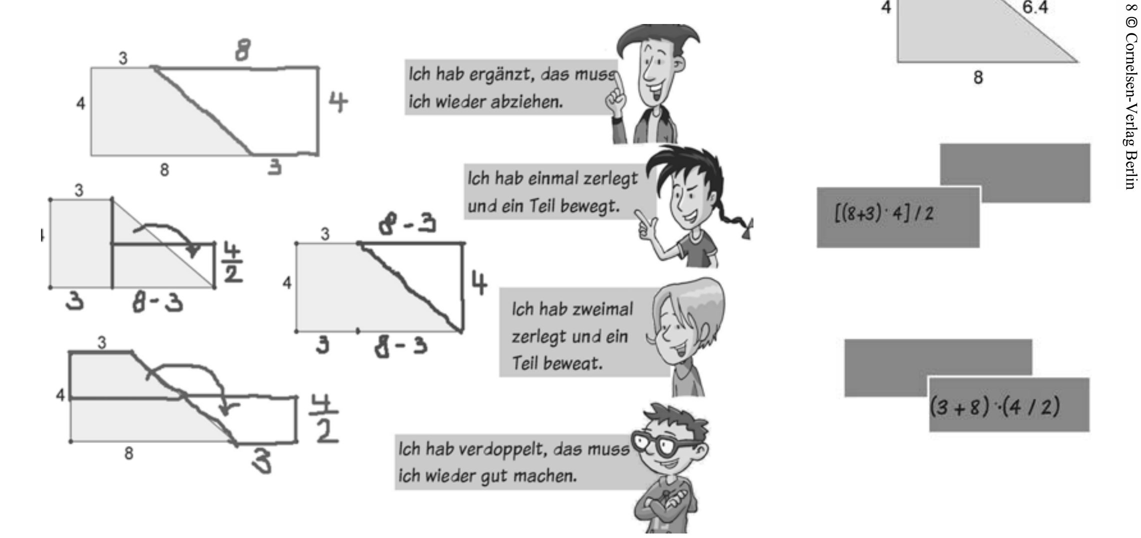


Abb. 3: Aufgabe (III) relationale Beziehungen erkennen zwischen Termen und Graphiken

(IV) Hilfskarten als Ergänzung zu Aufgabe I

Was bedeuten die Karten? Wie können sie dir weiterhelfen?

Ich habe aus der Fläche ein großes Rechteck gelegt.

Ich habe die halbe Spitze des Dreiecks abgeschnitten und dann zu jeder Seite einen Teil heruntergeklappt.

Die Pluszeichen bedeuten, dass ich Flächen zusammenfüge.

Ich habe die Fläche in ein Rechteck und 2 Dreiecke geteilt und dann die Formen umgelegt.

Ich habe in meinen Term · geschrieben. So bekomme ich die halbe Fläche oder eine halbe Strecke.

Die Fläche a · b habe ich gefunden, somit gehört der Rest des Terms zum Dreieck.

Abb. 4: Hilfskarten als Unterstützung des Bearbeitungsprozesses von Aufgabe I

Um diesen großen Anforderungen im Kontext individuell begegnen zu können und allen Lernenden einen Zugang zu ermöglichen, sollten inhaltliche und strategische Hilfen eine Unterstützung bieten. Für die unterrichtsmethodische Umsetzung sahen wir zunächst in den gestuften Lernhilfen (entwickelt von Leisen 1999, Weiterentwicklung von Wodzinski, Hänze, Schmidt-Weigand, Franke-Braun & Blum 2009) einen Rahmen, in dem das eigenständige Arbeiten an komplexen und herausfordernden Teilaufgaben ermöglicht werden kann. Die gestuften Lernhilfen, die bedarfsspezifisch von den Lernenden genutzt werden können, lassen sich dabei durch die folgenden Kategorien (im Sinne allgemeiner Lern- und Problemlösestrategien, konkretisiert von Franke-Braun, Schmidt-Weigand, Stäudel & Wodzinski 2008, S. 28f.) beschreiben: 1. Paraphrasierung (der Inhalte und Aufgabenstellung), 2. Fokussierung (auf zentrale Elemente), 3. Elaboration von Unterzielen, 4. Aktivierung von Vorwissen, 5. Visualisierung (von Inhalten und Lösungsansätzen).

Um die Herausforderung des relationalen Beziehungen Herstellens zu bearbeiten, sollten diese Funktionen in den nächsten Design-Experimenten nicht mehr allein durch Impulse der Interviewerin verfolgt werden, sondern durch Explizierung auf Hilfskarten (vgl. Abb. 4). Sie sollten je nach Bearbeitungsprozess den Lernenden zur Verfügung stehen und individuelle Perspektiven und Zugänge zu diesem Inhalt aufzeigen. Durch das Nachvollziehen spezifischer Perspektiven sollte an das Vorwissen angeknüpft und eine verstehensfördernde Bearbeitung ermöglicht werden.

3.3 Design-Experiment-Zyklus 2b: vertiefte Analyse ausgewählter Stellen in den Lernwegen

Parallel zu der vertieften Analyse der Transkripte aus Zyklus 2a wurden weitere Design-Experimente in Laborsituationen mit dem überarbeiten Lehr- und Lernarrangement in Zyklus 2b durchgeführt. Das überarbeitete Design wurde dabei getestet, um daraus einen Prototyp erarbeiten und den Forschungsfokus noch weiter zuspitzen zu können. Von besonderem Interesse war, inwiefern die Lernenden durch erhöhte Aufmerksamkeit in Aufgabe III und die Hilfskarten in Aufgabe IV die Herausforderungen zum Herstellen von relationalen Beziehungen zwischen Termen und Graphiken produktiv überwinden konnten.

Nach der Ad-hoc-Videoanalyse im unmittelbaren Anschluss an Zyklus 2a wurden ab Zyklus 2b die von Vergnaud adaptierten Analyseinstrumente (vgl. Abschnitt 2) der Theoreme-in-Aktion und Konzepte-in-Aktion durchgängig genutzt und notiert. Dies ermöglichte systematische Vergleiche von verschiedenen Transkriptstellen, durch die Verbindungen untereinander rekonstruiert werden konnten. Damit konnten zusammenhängendere und komplexere Rekonstruktionen des individuellen Verständnisses gewonnen und besondere Herausforderungen und Gelenkstellen der Lernwege auch in ihrer Entwicklung beschrieben werden, um diese Dynamik zu erfassen statt bei der Identifikation typischer Fehlvorstellungen stehen zu bleiben (vgl. Zwetzschler & Prediger 2013).

Einblicke in die empirische Analyse der Lernwege: Von der Vielzahl der dabei gewonnen empirischen Einsichten sollen hier aus der Fallstudie zu Jans und Niclas' Bearbeitung der Aufgabe I einige herausgegriffen werden, die für den Teilaspekt des Herstellens von Beziehungen besonders bedeutsam waren. Die beiden Jungen versuchten zunächst einen eigenen Berechnungsweg zu finden, was ihnen auch nach einigen Anläufen gelang. Dadurch waren sie in der Lage, den Flächeninhalt zu berechnen und die Richtigkeit der gegebenen Terme durch Ergebnisgleichheit zu überprüfen: ||Gleichwertige Terme als ergebnisgleich||. Als sie anschließend aufgefordert wurden, die Terme graphisch zu erklären, stellte sich dies wiederum als besondere Herausforderung dar. Entgegen der oben beschriebenen Intention boten dabei die Hilfskarten wenig Unterstützung, wie sich exemplarisch für mehrere Szenen mit verschiedenen Lernenden in der folgenden Szene zeigt:

Zyklus 2b, Jan und Niclas, Sitzung 2, Aufgabe I, Zeit zu Beginn des Ausschnittes: *13:18*

J	191	…Hier steht… *[liest Hilfskarte„Die Pluszeichen bedeuten, dass ich Flächen zusammenfüge." aus Abb. 4]*
N	192	…ach so…
J	193	…hier steht, dass die Pluszeichen bedeuten, dass ich Flächen zusammenfüge, das heißt „+" muss ja ein halb muss ja irgend ne Fläche sein… *[tippt mit der Karte auf die Ausgangsgraphik]*

Ebenso wie Paula und Daniel hatten Jan und Niclas Schwierigkeiten, im gegebenen Term $a \cdot b + ½ \cdot a \cdot h$ den zweiten Teilterm zu deuten. Den Tipp der Hilfskarte bezog Jan nur auf den ersten Faktor ½, nicht auf $½ \cdot a \cdot h$, bei abweichender syntaktischer Strukturierung, auf was sich das Plus alles bezieht (vgl. Malle 1993, S. 196f. für abweichende Termstrukturierungen). Der Tipp erwies sich als nicht hinreichend adaptiv angepasst, um auf die individuellen Hürden einzugehen, daher konnte die Herausforderung nicht überwunden werden. Insbesondere die Abweichungen in der Strukturierung des Terms in Teilterme verhinderte die Handlungsabsicht <Um die Richtigkeit eines Terms zu prüfen, kann ich diesen auf die Graphik beziehen>. Bei anderen, weniger konzeptionellen Schwierigkeiten hätten die Hilfskarten vermutlich strategische Unterstützungen für die Lernenden bieten können. Die nicht tragfähige Interpretation von ||1/2 als Fläche|| in Z193 zeigt allerdings die Tiefe des Problems.

Konsequenzen für die Entwicklung der lokalen Lehr-Lerntheorie, die Spezifizierung des Lerngegenstandes und des Designs: Die empirische Einsicht in die Komplexität der fachlichen Anforderung wurde als Teil der weiterentwickelten lokalen Lehr- und Lerntheorie aufgenommen, die unmittelbare Rückwirkungen auf die Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes hatte: Das Verständnis der *relationalen* Verbindung zwischen den Darstellungsformen kann nicht vorausgesetzt werden, sondern muss systematisch aufgebaut werden. Operationale Darstellungsvernetzungen und Termvergleiche (über gleiche Ergebnisse) liefern erste Zugänge, die aber nicht dauerhaft tragfähig sind (vgl. Zwetzschler & Prediger 2013). Die Untersuchung des Nichtfunktionierens der Hilfskarten ermöglichte zudem Einsichten in die Bedingungen der Wirksamkeit des oft postulierten Design-Elements gestufte Lernhilfe: Bei solch grundlegenden Annäherungen an ein konzeptionelles Verständnis erwiesen sich die Hilfskarten als kein geeignetes Mittel aufgrund ihrer fehlenden Adaptivität. Andere Untersuchungen zeigen, dass einheitliche Tipps den Lernprozess durchaus unterstützen können (Wodzinski et al. 2009, Franke-Braun et al. 2008). Doch die Befunde dieser Untersuchung lassen sich auf die Bedingung zuspitzen, dass dies nicht möglich ist, wenn die Wissenskonstruktion inhaltlich unterschiedliche individuelle Lernwege zulässt und daher in ihrem Verlauf nicht vorhersehbar ist, denn dann ist die Adaptivität von Hilfskarten nicht gewährleistet.

Im Zuge der *Weiterentwicklung des Lehr-Lernarrangements* wurden daher die Hilfskarten weggelassen und individuelle, flexibel einsetzbare mündliche Impulse vorgesehen. Diese umfassten auch die Frage, welche Teilterme auf symbolischer Ebene man eigentlich bilden kann: für den Term $a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ bindet das Plus + nicht $a \cdot b$ und $\frac{1}{2}$, sondern $a \cdot b$ und $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ als Flächen zusammen. Damit sollte den Lernenden ein Zugang zur allgemeinen Einsicht in das Strukturieren von Termen ermöglicht werden, über die sie zu diesem Zeitpunkt vermutlich noch nicht verfügten. Um das Verständnis der Termstrukturierung im Kontext der Flächenberechnung aufbauen zu können, wurde zudem Aufgabe V (in Abb. 5) ergänzt, in der die Lernenden Teilterme durch Bezug auf einen einfacheren geometrischen Kontext strukturieren sollten, um dann die Konsequenzen auf symbolischer Ebene zu durchdenken.

(V) Klammern beim Terme aufstellen

Lisa hat für den Flächeninhalt der L-Figur diesen Term aufgestellt:

$$7 \cdot y + x - 7 \cdot y + 3 \cdot x - 7$$

- Erkläre wie Lisas Term zustande gekommen sein könnte: Welcher Teilterm gehört zu welcher Teilfläche?
- Wie hätte Lisa ihren Term richtig aufschreiben müssen?

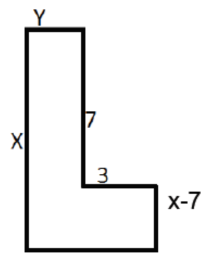
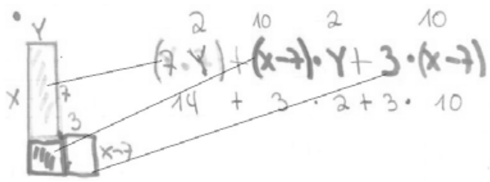


Abb. 5: Inhaltliche Erkundung der Beziehung zwischen Termstrukturierung und Figurzerlegung

3.4 Design-Experiment-Zyklus 3: Erprobung des kompletten Lehr- und Lernarrangements im regulären Unterricht

Die oben beschriebenen Design-Veränderungen flossen ein in das überarbeitete Lehr-Lernarrangement für Zyklus 3, das als Prototyp in zwei Klassen mit ihren regulären Mathematiklehrkräften über einen längeren Zeitraum erprobt wurde. Anhand von Videohospitationen im Unterricht und schriftlichen Produkten der gut 55 Lernenden wurde die Wirksamkeit des Designs unter unterrichtlichen Normalbedingungen geprüft. Zur Weiterentwicklung der lokalen Theorie des Lehrens und Lernens des Herstellens von Beziehungen sind jedoch nicht reine Aussagen zur Wirksamkeit relevant (Wie viel Prozent haben am Ende die angestrebte Vorstellung entwickelt?), sondern auch genaue Einsichten in die Lehr-Lernprozesse in ihren typischen Verläufen und Hürden sowie Wirkungsweisen und Bedingungen der einzelnen Design-Elemente. Für diese Vertiefung wurden die Klassenerprobungen durch Design-Experimente in Laborsituationen trianguliert.

Gülcans Bearbeitung der Aufgabe V:



(Linien nachträglich eingefügt, um Gülcans eigentlich farbliche Zuordnungen sichtbar zu machen)

Saras Bearbeitung der Aufgabe V:

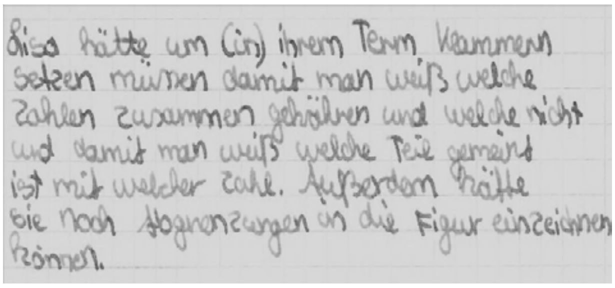


Abb. 6: Belege der Wirkungen der Aufgabe V aus der Klassenerprobung

Die Analyse der Produkte aus den Klassen- und Laborerprobungen gibt Hinweise, wie die Aufgaben die Lernenden auf ihrem Weg zum Herstellen von Beziehungen unterstützen. So zeigen die beiden individuellen Bearbeitungen der Aufgabe V in Abb. 6, dass die Lernenden durch die Fokussierung auf einfache Terme und Figuren den gegebenen Term auf die Graphik bezogen und durch die inhaltliche Anbindung auch richtig strukturieren konnten. Gülcan verwendete (hier nicht mehr sichtbare) Farben, um die Beziehungen zu den Teiltermen darzustellen, Sara erläuterte explizit die Bedeutung der Klammern, um anzuzeigen, was im symbolischen Term zusammen gehört. In ihrer Verbalisierung wird zudem ein hohes Maß an reflektiertem Wissen über den Nutzen von Termstrukturen deutlich, was einen anschlussfähigen Lernerfolg vermuten lässt.

Die empirischen Einsichten zeigen, dass die Realisierung des Design-Prinzips ‚systematische Anknüpfung an Vorwissen' hier gelungen ist, ohne das vorherige Problem der fehlenden Adaptivität. Sie stützen die lokale Lehr-Lerntheorie im Hinblick auf die Bedeutung des Beziehungen-Herstellens und der Möglichkeit, das regelkonforme Strukturieren von Teiltermen im direkten Zusammenhang damit zu bringen.

Neben oben beschriebenen Ergebnissen zur gegenstandsspezifischen Lehr- und Lerntheorie waren auch formale und organisatorische Aspekte im Fokus der Design-Experimente, die für Zyklus 4 nochmals überarbeitet wurden.

3.5 Ausblick auf Zyklus 4 und 5

Für den vierten Design-Experiment-Zyklus wurden Aufgaben sowohl im Hinblick auf die Verständlichkeit als auch weiter auf andere Teilaspekte des Entwicklungsforschungsinteresses hin optimiert (wie z.B. die Stimmigkeit in der Sequenzierung des Lernprozesses) und in Ausschnitten erprobt. Der derzeit laufende Zyklus 5 diente ausschließlich der Aufbereitung des Lehr- und Lernarrangements für den regulären breiten Einsatz. Dabei stehen Merkmale wie sprachliche Hürden oder Strukturtransparenz im Vordergrund, um die Materialien für die Einbindung in ein Schulbuch (Leuders et al. 2015) redaktionell zu finalisieren. Die empirischen Einsichten und Produkte aus den Design-Experimenten fließen in ein Handbuch für Lehrkräfte ein, das eine sensible Begleitung der individuellen Lernprozesse unterstützen soll.

4. Rückblick und Ausblick

Obwohl sowohl die Problemlage (defizitär entwickelte inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit) als auch die Design-Prinzipien für ihre Behebung (Anknüpfungen an individuelle Vorerfahrungen, inhaltliches Denken für Kalkül, Darstellungsvernetzung) seit langem in der Didaktik der Elementaren Algebra wohl bekannt sind, zeigen die kurzen Einblicke in ein dreijähriges Entwicklungsforschungsprojekt an dem exemplarischen Teilaspekt ‚Herstellen von Beziehungen', dass die Umsetzung allgemeiner Erkenntnisse und Prinzipien in konkrete Lehr-Lernarrangements eine sehr herausfordernde Aufgabe darstellt, die erst in mehreren Iterationen zu zufriedenstellenden Lernergebnissen führt. Dabei wird deutlich, dass mit einer reinen Erhebung von defizitären Lernständen und der Postulierung von allgemeinen fachdidaktischen Prinzipien allein noch kein Unterricht entwickelt werden kann, der allen Lernenden gerecht wird. Im Gegenteil hat sich gezeigt, dass die „Realisierung" von allgemeinen Prinzipien ein schwieriger Entwicklungsakt ist, der Kreativität und intensives Hinsehen auf fachdidaktischer Ebene erfordert und nicht etwa durch rein methodische Design-Elemente wie dem der Hilfskarten gelöst werden kann.

Dass wir über Wirkungsweisen und Bedingungen gelingender Lehr-Lernarrangements relativ wenig Gegenstandsspezifisches wissen, liegt auch daran, dass der Schwerpunkt der empirischen Forschung immer noch auf der Erhebung von Lernständen liegt, während Lehr-Lernprozesse zu wenig im Blick sind. Eine Beforschung von Lehr-Lernprozessen wird allerdings auch nur dann fruchtbar, wenn sie unter bestmöglichen Bedingungen erfolgt. Untersucht werden im hier exemplarisch konkretisierten Forschungsprogramm daher nicht defizitärer Normalunterricht, sondern Lehr-Lernprozesse, die durch gezielt gestalteten Lehr-Lernarrangements auf dem Stand der Disziplin angeregt werden. Eine intensive Entwicklungsarbeit ist daher Voraussetzung für bedeutungsvolle Lernprozessforschung.

Am hier skizzierten exemplarischen Teilaspekt des Entwicklungsforschungsprojektes zeigt sich dabei etwa, dass das immer wieder als fruchtbar herausgestellte Design-Prinzip der Darstellungsvernetzung kein Selbstläufer ist, sondern für die Lernenden viele Hürden mit sich bringt, die durch fokussierte Unterstützung bearbeitet werden müssen. Das Herstellen von Beziehungen zwischen Termen und Graphiken erfordert den Aufbau relationaler Perspektiven, ein Teilaspekt des Lerngegenstands, der in der bisherigen Forschung völlig unterschätzt wurde. Und so ist es relativ typisch für Entwicklungsforschungsprozesse, dass ein zentrales Resultat auch in der Ausweitung bzw. Ausdifferenzierung des Lerngegenstands liegt.

Literatur

Berlin, T. & Hefendehl-Hebeker, L. (2011). Stufen der algebraischen Denkentwicklung. *Der Mathematikunterricht*, *57* (2), 16-22.

Demby, A. (1997). Algebraic Procedures used by 13-to-15-Year-Olds. *ESM, 33* (1), 45-70.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Franke-Braun, G., Schmidt-Weigand, F., Stäudel, L. & Wodzinski, R. (2008). Aufgaben mit gestuften Lernhilfen – ein besonderes Aufgabenformat zur kognitiven Aktivierung. In Kasseler Forschergruppe (Hrsg.), *Lernumgebung auf dem Prüfstand – Zwischenergebnisseaus den Forschungsprojekten.*Kassel: Kassel university press GmbH, 27-42.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical structures.* Kluwer: Dordrecht.

Gerstenmaier, J. & Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. *Zeitschrift für Pädagogik*, *41* (6), 867-888.

Hußmann, S., Leuders, T., Barzel, B., & Prediger, S. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 419-422.

Hußmann, S., Prediger, S., Hinz, R., Ralle, B. & Thiele, J. (2013, in diesem Band). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.) *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung genuin fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme*. Münster u.a.: Waxmann, 25-42.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning*. Information Age Publishing: Greenwich, CT, 707-762.

Kieran, C. & Sfard, A. (1999). The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(1), 1-17.

Komorek, M., & Duit, R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems. *International Journal of Science Education*, *26* (5), 619-633.

Leisen, J. (1999). *Methodenhandbuch deutschsprachiger Fachunterricht*. Bonn: DFU.

Leisen, J. (2005). Wechsel der Darstellungsformen. Ein Unterrichtsprinzip für alle Fächer. *Der Fremdsprachliche Unterricht Englisch, 78*, 9-11.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, M.G. Kantowski (Hrsg.), *Applied mathematical problem solving. Columbus*, OH, 111-180.

Leuders, T., Prediger, S., Hußmann, S. & Barzel, B. (2015) (Hrsg.), *Mathewerkstatt 8*. Berlin: Cornelsen.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg: Braunschweig.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1985). *Routes to / Roots of Algebra*. Milton Keynes: University Press.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Sage.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire: modélisation, implémentation dans une platforme en ligne et évaluation.* Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot Paris 7.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I.* Beltz: Weinheim, 213-234.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht*, *65* (8), 452-457.

Prediger, S. & Zwetzschler, L. (2013). Topic-specific design research with a focus on learning processes: The case of understanding algebraic equivalence in grade 8. Erscheint in T. Plomp & N. Nieveen (Hrsg), *Educational Design Research: Illustrative Cases.* Enschede, The Netherlands: SLO, Netherlands Institute for Curriculum Development.

Prediger, S., Zwetzschler, L., & Schmidt, U. (2011). Preise des Fensterbauers – Flächenberechnungen automatisieren und Terme vergleichen. Erprobungsfassung eines Kapitels für Leuders, T., Prediger, S., Hußmann, S., Barzel, B. (2015) (Hrsg.), *Mathewerkstatt 8*. Berlin: Cornelsen.

Smith, J. P., diSessa, A. A. & Roschelle, J. (1993). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115-163.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 85-104.

Solares, A., & Kieran, C. (2012). Equivalence of rational expressions: Articulating syntactic and numeric perspectives. In T.Y. Tso (Hrsg.), *Proceedings of 36th PME Conference* (Vol. 4). PME : Taipei, Taiwan, 99-106.

Tietze, U.-P. (1988). Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *9* (2/3), 163-204.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A.F. Coxford & A.P. Shulte (Hrsg.), *The ideas of algebra, K-12.*, VA: NCTM, Reston.

Vergnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. In L.P. Steffe & P. Nesher (Hrsg.), *Theories of mathematical learning*. Lawrence Erlbaum: Mahwah, NY, 219-239.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren, 118*, 4-8.

Wieland, G. (2003). Lernprozesse in der elementaren Algebra als Vernetzung von Inhalt und Form. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, Hildesheim, 653-656.

Wodzinski, R., Hänze, M., Schmidt-Weigand, F., Franke-Braun, G. & Blum, S. (2009). *Selbstständigkeitsorientiertes fachliches Lernen in den Naturwissenschaften mit gestuften Lernhilfen*. Abschlussbericht zum DFG-Projekt: Kassel.

Zwetzschler, L. (i.V. für 2013). Gleichwertigkeit von Termen − Konstruktion und Erforschung eines diagnosegeleiteten Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse (Arbeitstitel). Dissertation: IEEM Dortmund.

Zwetzschler, L. & Prediger, S. (2013, im Druck). Conceptual obstacles for understanding the equivalence of expressions – A case study. In B. Ubuz (Hrsg.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8), Antalya 2013.