

KOMPETENZEN | inhaltlich

- Gleichungen aufstellen und lösen
- Beziehungen zwischen Zahlen in Tabellen darstellen

KOMPETENZEN | prozessbezogen

- Argumentieren
- Kommunizieren
- Darstellen

ZEITBEDARF

- 3-4 Unterrichtsstunden

ZUSÄTZLICHES MATERIAL

- Streichholzschachteln

MATERIALPAKET

- kopflose Streichhölzer
- Klebpunkte
- Checkliste
- Test
- Quartett

Knack die Box

Gleichungen mit Schachteln und Hölzern spielerisch lösen

Lars Heckmann



Terme und Gleichungen bereiten Lernenden immer wieder Probleme. Die Herangehensweise eines schweizer Lehrwerkes bietet einen ganzheitlichen, geradezu spielerischen Ansatz, um den Variablenbegriff aufzubauen und Gleichungen richtig zu interpretieren (**Ein innovatives Algebrakonzept**, Seite 40). Wie sieht das aus? Zunächst einmal braucht man Streichholzschachteln und Zündhölzer ohne Kopf. Man benötigt zwei Sorten von Schachteln. Daher beklebe ich sie mit blauen und roten Punkten **M**.

Der Einstieg in das Thema

Meinen Siebtklässlern sind Variablen bereits bekannt, sie kennen Terme. Aber auch ohne diese Kenntnisse lässt sich das Material im Unterricht einsetzen. Zu Beginn präsentiere ich eine Anordnung von großen Boxen und Bleistiften. In der Mitte liegt ein Gleichheitszeichen, links davon zwei blaue Boxen, rechts davon eine rote Box und zwei Bleistifte (**Materialien**). „Wie viele Stifte sind in den blauen und roten Boxen?“ Generell müssen zwei Regeln beachtet werden:

- ▶ Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens liegen gleich viele Hölzer.
- ▶ In den Boxen gleicher Farbe liegen gleich viele Hölzer.

Zur Veranschaulichung und gemeinsamen Lösung zeichne ich die Situation an die Tafel.

Die Lernenden gehen verschiedene Zahlenpaare durch. Manche kommen ohne große Umschweife auf eine der richtigen Lösungen. Richtige Zahlenpaare werden tabellarisch notiert und rechnerisch geprüft.

| | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|----|----|
| blau | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| rot | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |

Anschließend lüfte ich das Geheimnis und präsentiere den Inhalt meiner Schachteln.

Füllen von Boxen

Das Interesse ist geweckt. Ausgestattet mit Streichholzschachteln und kopflosen Zündhölzern bearbeitet die Klasse ein Arbeitsblatt mit weiterführenden Aufgaben. Das Aufgabenformat der ersten Aufgabe ist ihnen bereits aus dem Einstieg bekannt (**Knack die Box 1**, Aufgabe 1, Seite 22). Sie legen die vorgegebene Anordnung nach und lösen sie durch Probieren. Das kann unterschiedlich aussehen: Einige legen die Hölzer in die Schachteln, andere zeichnen die Schachteln und legen die Hölzer in die Zeichnung. Manche gehen systematisch vor, andere raten. Je nach Strategie brauchen sie unterschiedlich lange. Um die Ergebnisse miteinander vergleichen zu können, halte ich alle Lösungen in einer Tabelle fest.

Bevor die Lernenden weitere vorgegebene Aufgaben dieser Art lösen, gebe ich ihnen

die Möglichkeit, sich paarweise eigene Aufgaben für die Klasse auszudenken. Hierbei wird schnell deutlich, wie gut die Aufgabe verstanden wurde. Gleichzeitig entsteht ein Aufgabenpool unterschiedlichen Niveaus, den man im weiteren Unterricht und für Hausaufgaben nutzen kann. Für diese Phase sollte genügend Zeit zur Verfügung stehen, damit sich die Lernenden mit dem Material vertraut machen und eigene Erkundungen anstellen können. Auch bei den folgenden Aufgabenformaten gebe ich den Lernenden immer wieder die Möglichkeit, eigene Aufgaben der gleichen Art zu entwickeln.

Im nächsten Schritt werden zwei Gleichungen vorgegeben, die gleichzeitig erfüllt sein sollen (**Knack die Box 1**, Aufgabe 2, Seite 22). Wie die Lernenden das Gleichungssystem lösen, bleibt ihnen überlassen. Zwei Mädchen probieren beispielsweise aus: „Lass uns einfach irgendwelche Zahlen nehmen, vielleicht erstmal ein Holz, das ist einfach.“ „Dann sind in der hellen Schachtel vier Stück.“ „Das passt aber nicht bei der anderen Anordnung. Schade.“ Sie probieren systematisch weiter und finden die Lösung. Ein Schüler dagegen macht sich für jedes Bild eine Tabelle und sucht nach Übereinstimmungen. Die unterschiedlichen Strategien werden im Plenum vorgestellt und diskutiert. Auch hier sollen noch keine allgemeinen Lösungsverfahren besprochen werden.

Bild, Gleichung, Tabelle

Im Anschluss geht es daran, eine vorgegebene Anordnung in eine Gleichung zu „übersetzen“ (**Knack die Box 1**, Aufgabe 3, Seite 22). Dies ist eindeutig möglich, wenn man sich darauf einigt, dass etwa hell für die Variable x und dunkel für die Variable y steht. Somit steht jede Variable für die Anzahl von Hölzern in einer bestimmten Schachtel. Für die blaue Schachtel sollte man auf keinen Fall die Variable b einsetzen. Dadurch könnte der Eindruck entstehen, sie stünde für die blaue Schachtel und nicht für die Anzahl der Hölzer. In der ersten Teilaufgabe sollen die Lernenden im Ausschlussverfahren jedem Bild die passende Gleichung zuordnen. Im nächsten Schritt stellen sie selber Gleichungen zu Boxenanordnungen auf und umgekehrt. Dies sollte noch mit weiteren Aufgabenbeispielen geübt werden, welche die Klasse auch wieder selbst entwickeln kann. In Aufgabe 4 müssen die Schülerinnen und Schüler den umgekehrten Weg gehen (**Knack die Box 2**, Aufgabe 4, Seite 23): Vorgegebene Tabellen sollen der jeweils passenden Boxenanordnung zugeordnet werden, beziehungsweise fehlende

Boxen und Hölzer müssen gezeichnet werden. Dieses Aufgabenformat birgt einige Probleme. Das Übertragen von Zahlenpaaren in eine Zeichnung erscheint schwieriger als der umgekehrte Weg. Den Jugendlichen muss zudem klar sein, dass die Anordnung für die gesamte Tabelle und nicht nur für ein Zahlenpaar erfüllt sein muss. Wenn sich die Lernenden untereinander helfen, ist die Aufgabe aber auch für Lernschwächere lösbar. Danach soll die passende Gleichung gefunden werden. Diese Aufgabe ist anspruchsvoller, da die Übersetzungen nicht immer eindeutig sind. Dies wird deutlich, als eine Gruppe für die erste Tabelle die Gleichung $x = y + 2$ aufstellt, während eine andere $x - 2 = y$ notiert. Beide Gleichungen passen zu der Tabelle, nicht aber zum Bild. Die verschiedenen Lösungswege und Lösungen müssen auch hier im Plenum gemeinsam besprochen werden.

Text

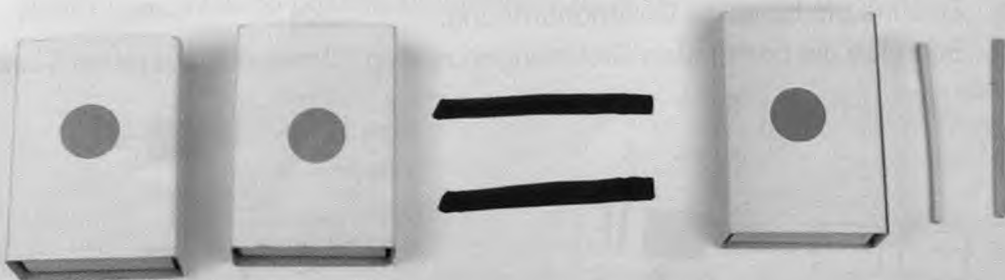
Neben Bild, Gleichung und Tabelle sollen nun auch Texte übersetzt werden (**Knack die Box 2**, Aufgabe 5 und 6, Seite 23). Einen vor-

gegebenen Text in eine Tabelle zu übertragen, erscheint noch machbar. Die direkte Ableitung von Gleichung und Bild aus dem Text ist neu und weitaus schwieriger. Lernschwächeren kann man eine Auswahl von Bildern und Gleichungen anbieten. So können sie mittels Ausschlussverfahren die Lösung finden.

Das letzte Aufgabenformat fasst nun alle bisherigen Aufgaben zusammen (**Knack die Box 2**, Aufgabe 7, Seite 23). Es kann vereinfacht werden, indem man auf die Texte verzichtet. Die Lösung tragen die Schülerinnen und Schüler auf dem Blatt ein. Solche Aufgaben kann man aber auch als Quartett bearbeiten lassen. Dazu werden die einzelnen Elemente auf Karten übertragen. Die vier verschiedenen Komponenten können dann durch Verschieben und Anlegen einander zugeordnet werden **M**. Dieses Vorgehen hat sich für viele als hilfreich erwiesen und bietet zudem vielfältige Einsatzmöglichkeiten. Zum Abschluss verteile ich eine Checkliste, in der die Schülerinnen und Schüler ankreuzen, wie gut sie die einzelnen Schritte ihrer Meinung nach beherrschen **M**. Anschließend können sie ihre Einschätzung in einem Test überprüfen **M**. ◀

Materialien

I INFO



Jede Gruppe benötigt mindestens...

- ▶ 30 kopflose Streichhölzer **M**.
- ▶ 4 Streichholzschachteln. Blanko Schachteln kann man beim Lehrmittel-Service unter folgender Internetadresse bestellen: www.lms.de.

- Mit den kopflosen Streichhölzern können aber problemlos auch normale Streichholzschachteln verwendet werden.
- ▶ blaue und rote Klebpunkte **M**.

Name: _____

Datum: _____

Knack die Box (1)



Regeln:

- ▶ Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens liegen gleich viele Hölzchen.
- ▶ In Boxen gleicher Farbe liegen gleich viele Hölzchen.

1. =

- a) Legt mit den Schachteln und Streichhölzern das obige Bild nach. Füllt die Schachteln mit Hölzchen. Beachtet dabei die Regeln!
- b) Wie viele Hölzchen können in den hellen und dunklen Boxen liegen?
- c) Überlegt euch selbst solche Aufgaben und stellt sie euch gegenseitig.

2. =

- a) Legt das obige Bild nach. Füllt die Boxen mit Hölzchen. Diesmal müssen beide Anordnungen gleichzeitig erfüllt sein.
- b) Überlegt euch selbst solche Aufgaben und stellt sie euch gegenseitig.
- c) Es gibt auch Aufgaben, die keine oder mehrere Lösungen haben. Findet solche Aufgaben.

3. Jede Boxenanordnung kann in eine Gleichung übersetzt werden. Benutze für die Anzahl der Hölzchen in der hellen Box die Variable x . Schreibe für die Anzahl der Hölzchen in der dunklen Box die Variable y .

a) Welche Gleichung gehört zu welcher Boxenanordnung?

b) Zeichne die fehlende Boxenanordnung.

c) Schreibe die passenden Gleichungen zu den Bildern der Aufgaben 1 und 2.

A

① $x = 2 \cdot y$

B

② $2 \cdot x = 2 + y$

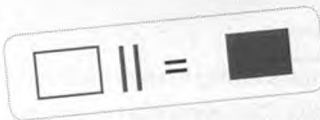
C

③ $x = 2 + y$

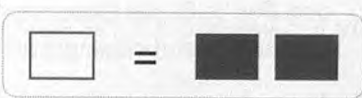
④ $2 \cdot x = 2 \cdot y$

Knack die Box (2)

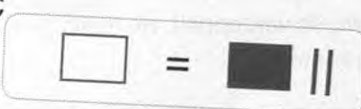
4. Hier siehst du Tabellen, wie du sie in Aufgabe 1 bereits selbst erstellt hast.
- Welche Boxenanordnung gehört zu welcher Tabelle?
 - Zeichne die fehlende Boxenanordnung.
 - Schreibe jeweils die passende Gleichung auf. Hast du dich dabei an der Tabelle oder am Bild orientiert?

A  ①

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

B  ②

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| y | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

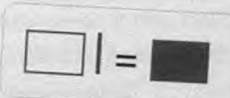
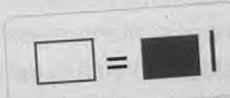
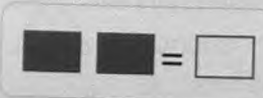
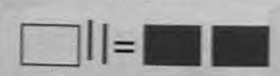
C  ③

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| y | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |

④

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|----|----|
| x | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

5. Erstelle zu jedem Text die passende Tabelle.
- In der hellen Box liegen drei Hölzer mehr als in der dunklen.
 - In der hellen Box liegen drei Mal so viele Hölzer wie in der dunklen.
 - In der hellen Box liegen halb so viele Hölzer wie in der dunklen.
 - In der hellen und dunklen Box liegen zusammen zwölf Hölzer.
6. a) Zeichne zu jedem Text die passende Boxenanordnung.
b) Schreibe jeweils die passende Gleichung auf.
7. Es gehören jeweils eine Boxenanordnung, eine Gleichung, eine Tabelle und ein Text zusammen. Welche passen zusammen? Male sie in einer Farbe an.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---------------------|--|---|---|----|----|---|----|----|---|---|---|---|---|---|---|--|
|  | $2 \cdot y = x$ | <table border="1" style="font-size: small;"><tr><td>x</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table> | x | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | In der hellen Box liegt ein Holz mehr als in der dunklen. |
| x | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | | | | | | | | | | | |
| y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | | | | | | | | |
|  | $x + 2 = 2 \cdot y$ | <table border="1" style="font-size: small;"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr></table> | x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | y | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | In zwei dunklen Boxen liegen insgesamt zwei Hölzer mehr als in einer hellen. |
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | | | | | | | | |
| y | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | | | | | | | | | | |
|  | $x + 1 = y$ | <table border="1" style="font-size: small;"><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table> | x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | In der hellen Box liegen doppelt so viele Hölzer wie in der dunklen. |
| x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | | | | | | | | | | | |
| y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | | | | | | | | |
|  | $x = y + 1$ | <table border="1" style="font-size: small;"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table> | x | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | In der dunklen Box liegt ein Holz mehr als in der hellen. |
| x | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | | | | | | | | | | |
| y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | | | | | | | | |

Ein- und Auspacken

Wilfried Jannack



Bisher wurden Gleichungen mit zwei Unbekannten bearbeitet. Jetzt soll es um Boxenanordnungen mit nur einer Schachtelart gehen. Das Arbeitsblatt zeigt eine Anordnung aus blauen Schachteln und einzelnen Hölzern (**Knack die Box (3)**, rechts). Schritt für Schritt wird diese verändert. Zunächst werden auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zwei Schachteln entfernt, danach verschwinden jeweils auch noch fünf Streichhölzer. Zum Schluss liegt auf der linken Seite nur noch eine blaue Schachtel und rechts zwei Hölzer. Demnach müssen zwei Streichhölzer in einer Box liegen. Die Probe bestätigt es. Nachdem die Lernenden die Aufgaben alleine bearbeitet haben, besprechen wir die Ergebnisse im Plenum. Gemeinsam suchen wir nach einer Erklärung, warum man einfach Schachteln und Hölzer entfernen darf. Die Anordnung ist anders, die Lösung ist jedoch immer dieselbe. Das Gleichheitszeichen ist in allen Boxenanordnungen erfüllt, solange man auf beiden Seiten gleich viel entfernt oder dazulegt. Im nächsten Schritt stellen die Lernenden eigene Anordnungen als Übungsmaterial her (**Eigene Aufgaben herstellen**, rechts).

Um sich vom konkreten Material zu lösen, werden anschließend Zahlen statt Hölzer ein- und ausgepackt. Damit sind auch negative Lösungen und Subtraktionen möglich. Im Unterricht erinnere ich an das Prinzip der Spaßverpackungen. Jeder kennt das: Man öffnet die äußere Verpackung und findet darunter die nächste, darunter die nächste und so weiter. Gleiches gilt auch für Matroschkas. Dieses Prinzip wenden wir mathematisch an. Nach und nach nenne ich Verpackungsanweisungen.

Einpacken:

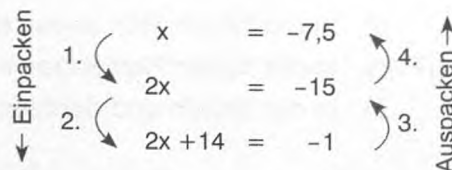
| | | |
|-----------------------------|----------------|------|
| „Ich denke mir eine Zahl.“ | x | |
| „Die Zahl wird verdoppelt.“ | $2x$ | |
| „Es werden 14 addiert.“ | $2x + 14$ | |
| „Heraus kommt -1.“ | | -1 |
| Also: | $2x + 14 = -1$ | |

Die Mathematisierung in der rechten Spalte ist anfangs noch gar nicht nötig. Die Lernenden versuchen, sich den Vorgang im Kopf zu merken. Im nächsten Schritt soll alles ausgepackt werden. Das heißt, das Einpacken muss wie beim Spaßpäckchen von außen her rückgängig gemacht werden.

Auspacken:

| | |
|---|------------|
| „Zuletzt wurden 14 addiert, die ziehen wir ab.“ | -14 |
| „Davor wurde verdoppelt, wir teilen durch 2“ | $:2$ |
| „Heraus kommt -7,5.“ | $-7,5$ |
| Also: | $x = -7,5$ |

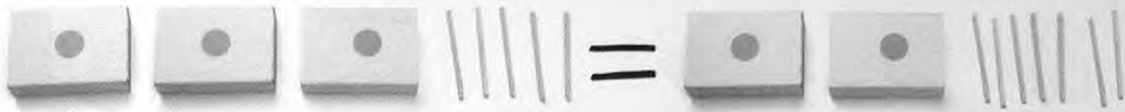
Die Abfolge schreiben wir nun noch einmal übersichtlich an die Tafel. Während man beim Einpacken in der ersten Zeile beginnt, startet man beim Auspacken in der letzten.



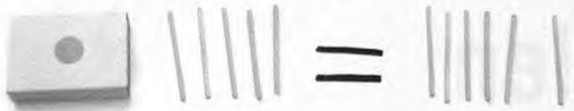
Auf dieser Grundlage können sich die Lernenden in Partnerarbeit oder auch in der gesamten Lerngruppe eigene Aufgaben stellen. Jemand denkt sich eine Zahl und schreibt sie als x in die erste Zeile. Schritt für Schritt verändert er oder sie diese Zahl. Das Ergebnis jeder Rechenoperation wird dabei in einer neuen Zeile notiert. Die anderen haben dann die Aufgabe, die rechte Spalte auszufüllen und x herauszufinden. Die Verschriftlichung ist für die Schülerinnen und Schüler zunächst eine angeleitete Gedächtnisstütze. Daraus wird jedoch bald ein Mittel zur Lösung einer Gleichung. Ach ja, und warum nennt man das eigentlich Äquivalenzumformungen? Der Begriff ist zunächst Ballast. Viel später kann man in der Reflexion deutlich machen, was eine Äquivalenzumformung überhaupt bedeutet, wie man sie durchführt und aufschreibt.



Knack die Box (3)



1. Wie hängt diese Anordnung mit der vorherigen zusammen? Welche Gleichung passt dazu?



2. Wie hängt diese Anordnung mit der vorherigen zusammen? Welche Gleichung passt dazu?



3. Wie viele Streichhölzer müssen in einer Schachtel sein?
4. Überprüfe die Lösung bei allen drei Boxenanordnungen.



Eigene Aufgaben herstellen

Am besten gehst du so vor:

1. Zeichne das Gleichheitszeichen auf ein Blatt Papier.
2. Lege eine bestimmte Anzahl von Streichhölzern in eine Schachtel. Lege sie auf die linke Seite des Gleichheitszeichens.
3. Lege die gleiche Anzahl von Streichhölzern offen auf die rechte Seite.
4. Befülle weitere Schachteln der Farbe mit derselben Anzahl an Streichhölzern.
5. Ergänze die Boxenanordnung um weitere Boxen und Hölzer.



- ▶ Wenn du eine Box auf die linke Seite legst, musst du auf die rechte Seite genauso viele Streichhölzer dazulegen. Diese können in einer Schachtel sein. Du kannst aber auch einzelne Hölzer legen.
- ▶ Wenn dir die Boxenanordnung zu lang geworden ist, kannst du einzelne Schachteln und Hölzer wegnehmen. Du musst aber auf beiden Seiten gleich viele entfernen.