# Gleichungen verstehen

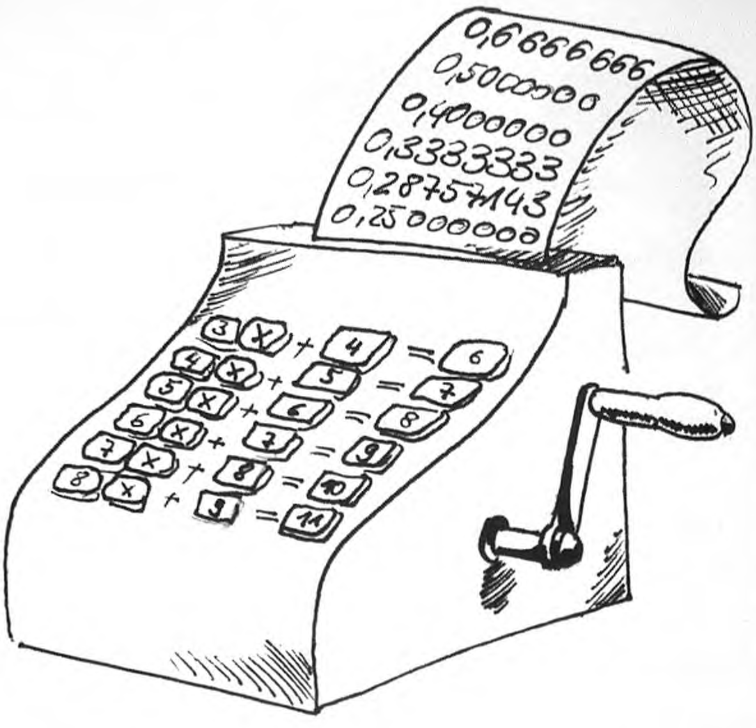



Illustration: André Klemm

**Der Umgang mit Gleichungen ist zentral für die Mathematik – und fällt Schülerinnen und Schülern oft schwer. Wo liegen die Hürden im Lernprozess? Wie kann das Thema sorgfältig und fundiert unterrichtet werden?**

BÄRBEL BARZEL, LARS HOLZÄPFEL

Gleichungen durchdringen die Schulmathematik von Anfang bis Ende. Lange, bevor in der Sekundarstufe Gleichungen thematisiert werden, gehen die Schülerinnen und Schüler intuitiv mit Gleichungen und dem Begriff der „Gleichheit" um, zum Beispiel wenn es um einfache Rechnungen oder Sachsituationen geht. Gleichungen sind der Schlüssel zu vielen inner- wie auch außermathematischen Fragen. Kurz: Mathe ohne Gleichungen – unvorstellbar!

Obwohl die Gleichungslehre eine sehr lange Tradition in der Schulmathematik hat, ist es ein schwieriges Thema, das im Unterricht sorgfältig und fundiert behandelt werden muss. Die Probleme und Herausforderungen lassen sich von verschiedenen Perspektiven her formulieren, etwa:

- Kann ich Schülerinnen und Schülern vermitteln, wozu man Gleichungen überhaupt braucht, ohne nur immer wieder auf den späteren Matheunterricht zu verweisen? (*Sinnstiftung und Motivation*)
- Wie erkläre ich die Äquivalenzumformungen, ohne dass sie nur zu einem Rezept-Werk verkommen? (*Verständnis*)
- Wie vermeide ich, dass es heute gelernt und morgen vergessen wird? (*Nachhaltigkeit*)

Vielleicht stellen Sie sich ähnliche Fragen oder Sie machen täglich Beobachtungen in Ihrem Unterricht, die weitere Fragen aufwerfen. Wir möchten mit diesem Beitrag primär Denkanstöße geben und hilfreiche Erkenntnisse aus Forschung und Praxis mitteilen. Vor allem möchten wir Ideen für den Unterricht vermitteln, wie Gleichungen erarbeitet werden können. Wichtig ist uns, dass Schülerinnen und Schüler nicht nur lernen, wie Gleichungen umgeformt werden, sondern die Struktur einer Gleichung verstehen und Gleichungen als wesentliches Element beim Modellieren wahrnehmen und nutzen können.

Im Fokus der Schulalgebra stehen traditionellerweise die syntaktischen Fertigkeiten beim Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen. Es geht dabei im Wesentlichen um die Technik der Äquivalenzumformungen. Ein Darmstädter Primaner beschreibt in diesem Zusammenhang das „kreuzweise Multiplizieren" beim Lösen von Bruchgleichungen mit den Worten „Riwwer ruff – niwwer nunner!" (Zitiert nach Martin Wagenschein 1970, S. 418), oder wie es vielleicht Schüler heute sagen würden: „Solange umformen, bis $x$ links alleine steht und rechts nur Zahlen!". Diese Merkhilfen reichen oft nur bis zur nächsten Klassenarbeitsind und sind bedenkliche Krücken, wenn mit ihnen kein grundlegendes Verstehen dafür verbunden ist, was eigentlich mit einer Gleichung anzufangen ist und welche Idee dahinter steckt. Wer verstanden hat, was eine Gleichung ist und warum das Umformen dazu führt, die Unbekannte zu finden, braucht solche Merkregeln nicht.

## Was sind Gleichungen und wozu dienen sie?

Gleichungen sind – mathematisch gesprochen – eine Aussageform aus zwei gleich gesetzten Termen (wobei diese Terme in der Regel Variablen enthalten). Die Aussageform kann durch Belegung der Variablen mit Werten in eine wahre oder falsche Aussage überführt werden. (Gleichheit ist dann also nur unter bestimmten Bedingungen gegeben.) In der Mathematik werden Gleichungen zu verschiedenen Zwecken genutzt, zum Beispiel:

### Gleichungen als Beschreibung

*Mathematische Objekte* (z. B. ein Kreis) können durch eine Gleichung ($x^2 + y^2 = 9$) beschrieben werden (Grundidee: alle Elemente der zu beschreibenden Menge genügen dieser Gleichung). Auch *Zusammenhänge* können durch Gleichungen ausgedrückt werden, etwa Formeln ($A_{Kreis} = \pi\, r^2$), geometrische Sätze ($a^2 + b^2 = c^2$) oder naturwissenschaftliche Gesetze ($F = m \cdot a$).

#### Gleichungen als Heuristik

Gleichungen drücken einen Sachverhalt aus, der sich aus einer inner- oder außermathematischen Frage ergibt. Nach einer Variablen aufgelöst, liefert die Gleichung die gesuchte Größe. (Wie lange muss ich sparen, um bei monatlicher Rücklage von 20,– € und einem Zins von 2 % auf 100 000,– € zu kommen? Wie groß kann bei 20 cm Umfang die Fläche eines Rechtecks maximal werden? Ab welchem Verbrauch ist ein Tarif günstiger als ein anderer? Oder: Wo liegt der Schnittpunkt von zwei Funktionen?)

Gerade dieser Aspekt, die Gleichung als Heuristik zu verstehen und flexibel damit umgehen zu können, fällt Schülerinnen und Schülern oft schwer. Dabei steht die Suche nach „Gleichheit" im Zentrum vieler (schulmathematischer) Probleme.

Gleichungen, die es zu lösen gilt, können – je nach Kontext – sehr unterschiedlich aussehen. In **Kasten 1** finden Sie eine zum Vorgehen in Bildungsplänen passende Klassifikation. Die Kriterien sind hier rein aus dem Stoff heraus gewählt. Welche Form der Gleichung gerade im Unterricht vorkommt, ergibt sich aus dem gestellten Problem und hängt natürlich auch vom Vorwissen der Lernenden ab.

1 WISSENSWERT

### Mit welchen Gleichungen bestimmen wir die Unbekannte?

Die in der Schule vorkommenden Gleichungen lassen sich klassifizieren:

- **Nach der Anzahl der weiteren Variablen**
- **Nach der Art der Unbekannten**
  Ist es eine beliebige reelle Zahl, eine ganze Zahl (diophantische Gleichung), eine Funktion (bei Differential- und Funktionalgleichung), eine Matrix, …?
- **Nach der Art, wie die Unbekannte verknüpft ist**
  In welcher Potenz steht die Variable (ist es eine lineare, quadratische, kubische, … Gleichung), ist es eine trigonometrische Gleichung, eine Exponential- oder logarithmische Gleichung …?
- **Nach der Art der Frage: Wonach sucht man?**
  Nach der Nullstelle [rechts steht 0: $f(x) = 0$] oder nach einem bestimmten Wert [rechts steht eine explizite Zahl, $f(x) = y_0$], nach dem Schnittpunkt [$f(x) = g(x)$], nach dem Fixpunkt [rechts steht $x$, Form: $f(x) = x$], nach dem Eigenwert [rechts steht $ax$, Form: $f(x) = ax$]?
- **Nach der Anzahl der Gleichungen**
  Liegt nur eine Gleichung oder ein Gleichungssystem vor?
- **Nach der Art der Lösung**
  Gibt es einen Wert, keine Lösung, eine allgemeingültige Lösung (linearen Gleichung) oder keine Lösung, einen Wert, zwei Werte (quadratischer Fall)?

## Schwierigkeiten beim Umgang mit Gleichungen

#### Was heißt „gleich"?

Eine erste Schwierigkeit liegt schon in der Bezeichnung „gleich". Auch wenn „Gleichheit" laut Wörterbuch nur die Übereinstimmung in bestimmten Merkmalen (und nicht die Objektidentität) bedeutet, so wird damit im allgemeinen Sprachgebrauch eher eine völlige Übereinstimmung assoziiert. Wir begegnen diesem Phänomen im Alltag, wenn nicht genau zwischen „dem gleichen" und „demselben" unterschieden wird. Man sagt: „Wir sind mit dem gleichen Auto gefahren", meint aber eigentlich, dass alle in einem (demselben) Auto saßen.

Ein ähnliches Phänomen tritt bei Termen auf: Die Terme $2(x + 2)$ und $2x + 4$ sind nicht „alltagsgleich", denn sie sehen sehr unterschiedlich aus. Mathematisch sind sie jedoch „gleich", da hier die „Gleichheit von Termen" deren Äquivalenz bedeutet. Die Terme nehmen für alle eingesetzten Zahlen bei $x$ den gleichen Wert an, sie sind aber nicht identisch. Die Terme könnten deshalb auch „einsetzungsgleich" oder „beschreibungsgleich" (nach Fischer/Hefendehl/Prediger 2010) genannt werden.

Die Sprache soweit auszudifferenzieren, ist für den Unterricht sicher nicht alltagstauglich, macht aber zwei wichtige Aspekte deutlich: Zum einen kann die unterschiedliche Sicht auf „gleich" für Schülerinnen und Schüler irreführend sein (und dies zu wissen, kann uns die Diagnose von Schülerfehlvorstellungen erleichtern). Zum anderen sind mit dem Einsetzen und dem Beschreiben wichtige verständnisfördernde Aktivitäten verknüpft, die dem Umformen von Gleichungen voraus gehen sollten.

- Das *Einsetzen* mit dem Ziel, eine richtige Aussage zu erhalten, ist in allen Lernstufen eine wichtige Handlung und macht die Gleichung als Aussageform sehr plastisch.
- Das *Beschreiben* einer Situation/eines Objekts mit gleichwertigen Termen, die auf unterschiedliche Sichtweisen zurückgeführt werden können, liefert eine beschreibende Gleichung.

Eine weitere Schwierigkeit liegt bereits im Gleichheitszeichen selbst begründet (vgl. Prediger 2008): Es kann als Operationszeichen dienen [$(31+7):2 =$ … „ergibt"], als Relationszeichen zum Verbinden gleichwertiger Terme [$(31 + 7) : 2 = 31 - 12$], als Setzung [$\varphi := (1 + \sqrt{5}) : 2$ oder beim Belegen einer Variablen wie: $a = 3$, $b = 5$].

### Wie gehe ich mit Variablen um?

Die Idee, was eine Gleichung bedeutet, ist eng mit der Vorstellung von Variablen verbunden (Barzel/Herget 2006, Fischer/Hefendehl/Prediger 2010). Dient die Gleichung dazu, ein Objekt oder einen Zusammenhang zu beschreiben, kann die Variable eine Veränderliche sein (Veränderlichenaspekt, vgl. Malle 1993), eine allgemeine Zahl (z. B. bei einer Regel wie dem Distributivgesetz) oder ein Platzhalter (z. B. in einer geometrischen Formel).

**Beispiel**

Die Formel $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ beschreibt den Flächeninhalt eines Trapezes.

1. Veränderlichenaspekt der Variablen $h$:
   Wie ändert sich die Fläche, wenn ich die Höhe $h$ verdopple?
2. Variable $h$ als allgemeine Zahl/Platzhalter:
   Wenn ich die Fläche ausrechnen will, muss ich für $h$ die Höhe des Dreiecks einsetzen.
3. Variable $h$ als Unbekannte:
   Wie groß ist die Höhe $h$ im Trapez mit den Seiten $a = 8\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$ und der Fläche $A = 28\,\text{cm}^2$?

Diese verschiedenen Aspekte von Variablen weisen schon auf die Schwierigkeiten hin, die beim Lernen entstehen können. Da algebraische Fertigkeit nicht nur vom Wahrnehmen des einzelnen Symbols, sondern auch von deren Kombinationen abhängt (English/Sharry 1995), kann man ermessen, welch große Herausforderung das Erlernen dieser abstrakten Welt darstellt. Auch müssen die Schülerinnen und Schüler unterscheiden können, wann sie mit Termumformungen arbeiten und wann mit Äquivalenzumformungen. So macht es für sie bei der Flächeninhaltsformel für Trapeze durchaus einen Unterschied, ob sie die Fläche $A$ berechnen (wenn alle Größen geben sind durch Einsetzen und „Ausrechnen" der rechten Seite) oder ob sie bei gegebener Fläche und Seitenlängen die Höhe bestimmen (jetzt muss die Formel erst nach $h$ „aufgelöst" werden).

### Wie forme ich Gleichungen um?

In verschiedenen Studien wurde das Vorgehen von Schülerinnen und Schülern beim Lösen von Gleichungen untersucht (etwa mit den Testaufgaben in **Abb. 1**, aus Falle 2005). Welche Strategien wenden die Schüler bei den einzelnen Testaufgaben an? Viele lösen eine Gleichung wie $4 \cdot y = 20$, indem sie darin die Multiplikation $4 \cdot 5 = 20$ erkennen und sogar die Gegenoperation $20 : 4$ angeben. Aber dieses Vorgehen hilft nicht, wenn nicht-ganzzahlige Lösungen auftauchen: So wird $6 \cdot y = 7$ als nicht lösbar wahrgenommen, weil man keine passende Zahl „sieht". Und entsprechend wird $a \cdot x = 4$ als mit Abstand am Schwierigsten eingestuft. (Dass Brüche in Gleichungen zu Schwierigkeiten führen, verwundert kaum, erst recht nicht, wenn die gesuchte Variable im Nenner erscheint.)

Es hat sich herausgestellt, dass selbst sehr erfolgreiche Schülerinnen und Schüler beim Umformen von algebraischen Gleichungen im Wesentlichen auf bekannte arithmetische Rechenmuster zurück greifen und selten algebraische Strukturen wahrnehmen. Dies zeigt, wie wichtig es ist, ein Verstehen der algebraischen Umformungen aufzubauen. Nur so kann die Verwandtschaft zwischen $4 \cdot x = 20$, $6 \cdot x = 7$ und $a \cdot x = 5$ bewusst gesehen und damit auch die Verwandtschaft der verwendeten Lösungswege wahrgenommen werden.

## Was macht Aufgaben schwierig?

**arithmetische Gleichungen**

Einfacher Zusammenhang, ganzzahlige Lösung
- *Wenn $x - 7 = 5$, dann ist $x = \ldots$?*
- *Wenn $4y = 20$, dann ist $y = \ldots$?*

Einfaches Zahlenwissen nötig, ganze Zahl oder einfacher Bruch als Lösung
- *Wenn $10\,y = 5$, dann ist $y = \ldots$?*
- *Wenn $\frac{x}{4} = 12$, dann ist $x = \ldots$?*

Einfache Rechnung, ganzzahlige Lösung
- *Was ist $t$, wenn $2t - 23 = 49$?*
- *Löse: $4(p + 3) = 32$.*
- *Wenn $\frac{x+3}{2} = 7$, welchen Wert hat $x$?*
- *Wenn $x + \frac{x}{3} = 4$, welchen Wert hat $x$?*

**algebraische Gleichungen**

Algebraische Begründung/Zahlverständnis
- *Wenn $\frac{63}{x} = 180$, dann ist $x = \ldots$?*
- *Löse: $5a - 4 = 2a + 8$.*
- *Löse: $x + (x + 2) = (x - 1) + 8$.*

Algebraische Begründung; Bruch als Lösung
- *Wenn $ax = 5$, dann ist $x = \ldots$?*

**Abb. 1:** Aufgabenbeispiele aus der Studie von Falle 2005

Beim Umformen von Gleichungen lassen sich typische Fehler ausmachen. Manche resultieren aus mangelndem Verständis (die Grundidee der Gleichung ist nicht abrufbar). Die häufigsten syntaktischen Fehler liegen darin begründet, dass die Struktur der Terme nicht richtig erfasst wird und die Wahl der Gegenoperation dann nicht zielführend ist.

## Grundsätze für den Unterricht

Wie kann nun ein Unterricht aussehen, der das Aufstellen und Verstehen von Gleichungen mit seinen Detailstrukturen zum Ziel hat? Ein Unterricht, der die verschiedenen Aspekte integriert (ohne rein auf algorithmisches Umformen zu fokussieren) und der die möglichen Schwierigkeiten im Lernprozess antizipiert und für den Lehrprozess mitbedenkt? Die drei Aspekte *Sinnstiftung/Motivation – Verständnis – Nachhaltigkeit* weisen einen guten Weg.

### Sinnstiftung und Verständnis: Leitlinie für die gesamte Algebra

In der Grundschule beginnt die Reise durch die Algebra, bei der Schülerinnen und Schüler über die Jahre hinweg lernen, mit Zahlen und Variablen, mit Termen und Gleichungen umzugehen. Entsprechend sollten Denkhandlungen, die zentral für algebraisches Denken sind, schon früh gefördert werden. Dazu gehören u. a. Verallgemeinern und Abstrahieren, Strukturieren, der Wechsel von Darstellungen, das Deuten und Umdeuten von Termen sowie selbst Regeln finden oder Kalkül selbst entwickeln (Fischer/Hefendehl-Hebeker/Prediger 2010).

In verschiedenen Kontexten können Variablen sinnvoll angebahnt und aufgebaut werden:

- Erstes Kennenlernen von Variablen als allgemeine Zahl (z. B. bei einer Folge figurierter Zahlen).
- Bewusstmachen von Variablen in Rechengesetzen und geometrischen Folgen (sie werden wie eine Zahl behandelt oder sie stehen als Platzhalter für eine zu ermittelnde Unbekannte).
- Erfahren der Gleichwertigkeit von Termen über das inhaltliche Beschreiben und Einsetzen („Gleichheit" im mathematischen Sinne als Voraussetzung für das Umformen erleben).
- Eigenständiges Setzen von Variablen und Aufstellen von Termen und Gleichungen beim Modellieren von Alltagsproblemen.

Einsetzen und Beschreiben sollen als kognitive Tätigkeiten immer wieder (auch bei der „Probe") genutzt werden. Gerade das Einsetzen steht eng mit dem Verstehen von Gleichungen in Verbindung (vgl. Strukturanalysen von Oldenburg 2009).

In der Fachdidaktik wird u. a. diskutiert, Funktionen vor dem Lösen von Gleichungen zu behandeln. Ein sinnvoller Einstieg in das Thema Funktionen ist durchaus ohne das explizite Lösen von Gleichung möglich, da die Idee der Funktion (mit den verschiedenen Aspekten der Zuordnung und Kovariation) nicht vom exakten Bestimmen einzelner Werte abhängt. In den meisten Kontexten reicht das Bestimmen von Größen via Graph oder Tabelle aus (zum Beispiel ist zu gegebenem $y$-Wert der $x$-Wert gesucht, …).

Funktionale (lineare) Zusammenhänge tauchen oft in Situationen auf, die es ermöglichen, Fragen zu stellen wie: „Wann ist …?" oder „Wie viel benötigt man, um …?" oder „Ab wann lohnt sich … ?". Diese Suche nach einem bestimmten Wert ist von der Idee her genau das, was eine Gleichung zum Ausdruck bringt. Ein Beispiel sind Stromtarife (vgl. **Kasten 2**). Werden die Schülerinnen und Schüler unvorbereitet mit einem solchen Problem konfrontiert, brauchen sie Zeit und Muße, um auf ihre Vorkenntnisse zurückgreifen und verschiedene Wege gehen und vergleichen zu können. Dabei sind grundsätzlich verschiedene Strategien denkbar:

❷ ZUM AUSPROBIEREN

## Einstiegsaufgabe zum Lösen von Gleichungen

### Stromtarife

Peter ist von Zuhause ausgezogen und bekommt seine erste Stromrechnung der städtischen Stromversorgung „StadtStrom" in Höhe von 419,– EUR.

| *StadtStrom* | |
|---|---|
| *Grundpreis im Jahr* | *65,00 EUR* |
| *Arbeitspreis (je kWh)* | *24 Cent* |

1. **Wie viel Strom hat Peter verbraucht?**
   Peter überlegt, den Stromanbieter zu wechseln. Er vergleicht mehrere Angebote.

| *EinfachWasserkraft* | |
|---|---|
| *Grundpreis:* | *0,00 EUR pro Jahr* |
| *Arbeitspreis (Beispiel):* | *389,10 EUR für 1500 kWh* |
| *Preis pro kWh: 25,94 Cent. Alle Preise sind Brutto-Preise (inkl. Abgaben und Steuern) Mindestlaufzeit: 12 Monate, Preisgarantie: 12 Monate* | |

| *Das Stompaket* | |
|---|---|
| *Paketpreis für 1200 kWh/Jahr:* | *213,60 EUR pro Jahr* |
| *Mehrverbrauch (Beispiel):* | *99,00 EUR für 1500 kWh* |
| *Jede weitere kWh kostet 33,00 Cent. Alle Preise sind Brutto-Preise (inkl. Abgaben und Steuern)* | |

2. **Bei welchem Verbrauch ist für Peter der *StadtStrom-Tarif* günstiger, wann *Das Strompaket* und wann der Tarif von *EinfachWasserkraft*?**
   Arbeitet in Zweiergruppen. Es gibt mehrere Lösungswege, arbeitet mindestens einen aus. Vergleicht mit der Lösung anderer Gruppen.

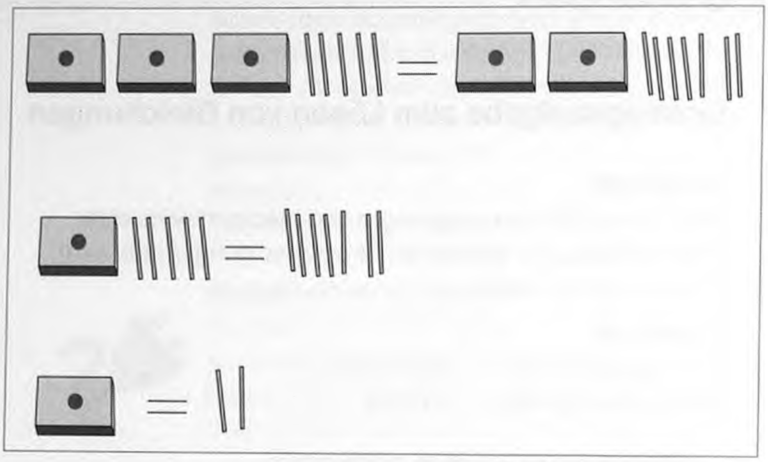


**Abb. 2:** Umformen im Modell „Knack-die-Box“: Welche Rechnung passt dazu?

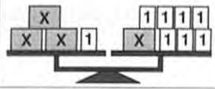
| Waage | Handlung | Gleichung | Umformung |
|---|---|---|---|
|  | $-\boxed{1}$ | $3 \cdot x + 1 = x + 7$ | $-1$ |
|  | $-\boxed{x}$ | $3 \cdot x = x + 6$ | $-x$ |
|  | $:2$ | $2 \cdot x = 6$ | $:2$ |
|  | | $x = 3$ | |

**Abb. 3:** Erklärung mit dem Waage-Modell

- Es werden (un-)systematisch mehrere Werte probiert und in einer Liste zusammengestellt.
- Es werden Rechnungen angestellt und Terme umgeformt.
- Es wird ein Graph aufgezeichnet, wenn Funktionen schon bekannt sind.
- Es wird die Wertetabelle betrachtet, wenn Funktionen schon bekannt sind.
- Es wird inhaltlich argumentiert (Die Grundgebühr von 65,– € wird auf jeden Fall gezahlt, es bleiben 354,– €, die werden durch 0,24 € geteilt).

Das Beispiel sollte so konzipiert sein, dass die Lösung nicht einfach „gesehen“ werden kann und auch das Ablesen aus Schaubildern bzw. Tabellen nicht immer ein exaktes Ergebnis liefert. Genau hier liegt die Motivation für das Umformen von Gleichungen, die man also nicht mehr „für später“ lernt. Jetzt müssen also Strategien eingesetzt und Verfahren entwickelt werden; der Lernprozess läuft genetisch (vom Problem zur Mathematik).

Die Schüler probieren zunächst möglichst vielfältige Ansätze aus (die auch alle zum Ziel führen können), um dann den Mehrwert der Äquivalenzumformungen zu erfahren. Dabei erkennen sie auch, dass es ab und zu einfachere Wege als das algorithmische Umformen gibt – und diese Wege verdeutlichen sehr gut, was es heißt, eine Gleichung zu verstehen.

## Visualisierungen und Medien nutzen

Modelle unterstützen das Verstehen der jeweiligen Situation (z. B. durch konkrete Handlungen, Medien) und ermöglichen es den Lernenden, die Prozeduren beim Lösen von Gleichungen (also Äquivalenzumformungen) auch selbst zu entdecken oder zu reflektieren, wenn sie bereits eingeführt wurden.

Modelle können jedoch auch einen „cognitive overload“ erzeugen: Das Modell bzw. die Visualisierung an sich ist „Zusatzstoff“, der zunächst einmal nachvollzogen werden muss. Dies ist grundsätzlich bei Modellen zu bedenken (Sweller 2003). Die „Lernhürde“ durch das Modell ist vor allem dann groß, wenn es auch mögliche Fehlvorstellungen oder zusätzliche Irritationen in sich birgt.

*Knack die Box*

Mit Streichhölzern und Schachteln, mit Plättchen und Dosen lassen sich Rätsel oder Situationen veranschaulichen, die das Bilden von Termen vertiefen und als Einstieg in das Thema Gleichungen dienen können (vgl. **Abb. 2**). Bei solchen Aufgaben ist die Variable festzulegen (etwa die Anzahl der Hölzchen in einer Schachtel) und eine Gleichung aufzustellen, die die Situation beschreibt ($3x + 5 = 2x + 7$).

*Das Waage-Modell*

Beim Waage-Modell wird das äquivalente Umformen handelnd erfahrbar bzw. bildlich veranschaulicht. Die Seiten der Gleichung werden (samt Variablen) als „Gewichte“ einer Balkenwaage betrachtet. Äquivalente Umformungen sind dann Veränderungen, bei denen die Waage stets im Gleichgewicht bleibt: „Auf beiden Seiten das Gleiche tun“ (**Abb. 3**).

Das Waage-Modell wird international viel diskutiert (Vlassis 2002). Die Kritik lautet, dass heutzutage Kinder solche Waagen nicht mehr kennen und dass das Modell nur Gleichungen darstellen kann, bei denen neben der Variablen nur positive Zahlen vorkommen. Die Befürworter betonen die Symbolik der Waage als gutes Modell, um tragfähige Vorstellungen von Äquivalenzumformungen aufzubauen. Erwiesen ist: Das Waage-Modell unterstützt die syntaktischen Fertigkeiten und hilft, das Gleichheitszeichen als solches besser erfassen zu können.

Es gibt Versuche, auch negative Zahlen sichtbar zu machen: etwa mit „Luftballons“ (als negative Gewichte) oder mit einer Doppelwaage (im Internet gibt es Videos dazu, „Youtube, Gleichung, Doppelwaage“). Diese Modelle sind komplex und können irritieren (wenn z. B. eine negative Zahl als Ballon und eine positive als Kiste symbolisiert wird). Viele

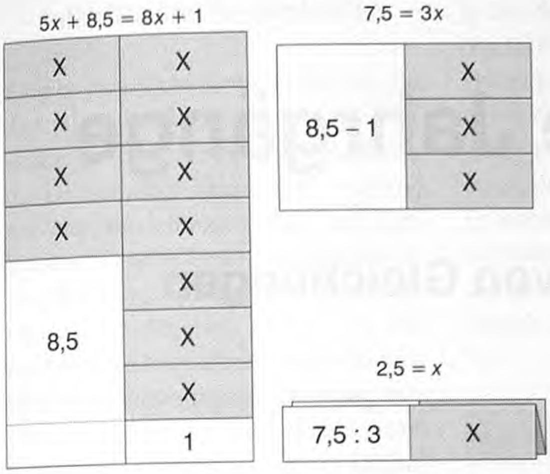



**Abb. 4:** Auf beiden Seiten das Gleiche tun – im Faltmodell

Informationen müssen zusätzlich zur Idee des „auf beiden Seiten das Gleiche tun“ verstanden werden.

Wir empfehlen, das Waage-Modell für den Einsatz mit natürlichen Zahlen auf jeden Fall zu nutzen, um das Prinzip der Äquivalenzumformungen zu erläutern. Einfache Gegenstände erleichtern dabei die Abstraktion auf $x$ und absolute Werte. Wichtig ist, den Schülern die Grenzen des Modells zu erklären und herauszuarbeiten, dass es im Prinzip so weiterfunktioniert. Erfahrungsgemäß verstehen sie die rein symbolische Erweiterung auf negative Zahlen problemlos.

*Das Falt- bzw. Streifen-Modell*

Das Falt-Modell soll die Schrittigkeit der Äquivalenzumformungen beschreiben und plausibel machen. Bei diesem Modell können Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$ (mit $a, b, c, d, x \geq 0$) veranschaulicht werden (**Abb. 4**). Ein Blatt wird erst längs gefaltet. Dann werden (auf beiden Seiten) für $x$ entsprechend viele gleich große Streifen gefaltet oder markiert. Die Größen $b$ und $d$ veranschaulichen jeweils den „Rest“ auf beiden Seiten. Das Lösen der Gleichung besteht dann im „nach hinten wegfalten“ gleich großer Flächen auf beiden Seiten.

Allerdings kann beim Faltmodell die Vorstellung entstehen, dass $x$ nun immer eine Fläche darstellt oder dass die gesuchte Größe bekannt sein müsste, um die richtigen Faltabstände zu wählen.

### Vielfältige Übungen und Reflexionen als festen Bestandteil integrieren

Wie vermeide ich, dass das Lösen von Gleichungen „heute gelernt und morgen vergessen“ wird? Nachhaltiges Lernen erreicht man, wenn beim Einstieg und Systematisieren der neuen Inhalte das Verstehen im Mittelpunkt steht. Dies wird beim Vertiefen ebenfalls gefestigt, auch wenn das alleinige „Lösen können“ durchaus auch ohne Verstehen der algebraischen Zusammenhänge erfolgen kann (Falle 2005).

Neben dem unmittelbaren Training sollte man stets auch Reflexionsmöglichkeiten und Gesprächsanlässe anbieten. So können wir so schon im unmittelbaren Gespräch oder den Aufschrieben mögliche Schwierigkeiten wahrnehmen und darauf reagieren. Wir enden mit einer Übungsaufgabe, die in diesem Sinne viel Potenzial beinhaltet – es ist die Frage:

→ *Was kann die Gleichung $20x + 500 = 3000$ alles bedeuten?*

Mögliche Antworten sind zum Beispiel:

- Ich will wissen: Wo nimmt die Funktion $f$ mit $f(x) = 20x + 500$ den Wert 3000 an?
- Wo sind die beiden Funktionen gleich, die lineare und die konstante?
- Als Paul sagt, er habe zum Zwanzigfachen einer Zahl 500 addiert und 3000 erhalten, wusste ich, dass seine Zahl 125 war.
- Ich bezahle 20 ct pro Gesprächsminute und 5,– € Grundgebühr und bekomme eine Rechnung von 30,– €. Wie lange habe ich telefoniert?

Das Schöne an solchen Verbalisierungen ist: Sie bieten neben einem Rahmen für kreative Ideen Gelegenheit, mögliche Schwierigkeiten aufzudecken und darüber zu sprechen. Die Aufgabe macht deutlich, wie universell eine solche Gleichung sein kann – sie passt für ganz verschiedene Situationen und Fragestellungen, die aber alle eine bestimmte Struktur gemeinsam haben. Vielleicht fallen Ihnen und Ihrer Klasse weitere Interpretationen ein. Es lohnt sich, einmal gemeinsam darüber nachzudenken!

**Literatur**


Barzel, B. / Herget, W. (2006): Zahlen, Symbole, Variablen – abstrakt und konkret. – In: mathematik lehren, Heft 136, S. 4–9.

English, L. / Sharry, P. (1995): Analogical Reasoning and the Development of Algebraic Abstraction. – In: Educational Studies in Mathematics 30, Kluwer Academic Pub. S. 135–157.

Falle, J. (2005): From Arithmetic to Algebra – In: Clarkson u. a. (Hrsg.): Building Connections: Research, Theory and Practice. Conference proceedings of MERGA 28, S. 337–344.

Fey, J. (1989): School algebra for the year 2000. – In: Wagner, S./ Kieran, C. (Hrsg.): Research issues in the learning and teaching of algebra. NCTM, Reston S. 199–213.

Fischer, A. / Hefendehl-Hebeker, L. / Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. – In: PM 52/33, Aulis, S. 1–7.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. – Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

Oldenburg, R. (2009): Structure of Algebraic Competencies. – In: Proceedings of Cerme 6 Lyon. S. 579–588.

Prediger, S (2008): „---nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“ – In: Barzel, B. u. a. (Hrsg.): Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker, Franzbecker, S. 89–99.

Sweller, J. (2003): Evolution of human cognitive architecture. – In: The Psychology of Learning and Motivation, 43, S. 215–266.

Vlassis J. (2002): The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. – In: Educational Studies in Mathematics 49. Kluwer, S. 341–359.

Vollrath, H.-J. (1974): Didaktik der Algebra – Klett Studienbücher.

Wagenschein, M. (1970): Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I, II – Klett Stuttgart, S. 418.