KAYE STACEY

# Eine Reise über die Jahrgänge

## Vom Rechenausdruck zum Lösen von Gleichungen

| | |
|---|---|
| **LERNGRUPPE:** | 1–8. Schuljahr |
| **IDEE:** | Impulse im Lehr- und Lernprozess unterstützen notwendige Änderungen im konzeptionellen Verständnis von „gleich" und „Gleichung" |
| **ONLINE-MATERIAL:** | Homepage des Projektes (engl.): http://www.education.vic.gov.au/studentlearning/teachingresources/maths/mathscontinuum/structure/default.htm |

Bis Schülerinnen und Schüler Gleichungen aufstellen und lösen können, haben sie eine mehrjährige Reise durch die Algebra hinter sich, beginnend beim Rechnen mit natürlichen Zahlen in der Grundschule. Dabei wird das bereits Gelernte immer wieder genutzt; teils müssen aber auch bewusst konzeptionelle Veränderungen vorgenommen werden. Für Lehrpersonen ist es daher wichtig, diese Lernschritte hinter den mathematischen Themen zu kennen.

Betrachten wir die ersten Schritte des Algebra-Lernens: Wie bauen die verschiedenen Themen aufeinander auf und wie sind sie verknüpft? Die Basis wird in der Grundschule gelegt, auch wenn viele Sekundarstufenschüler auf diese oft nicht mehr zurückgreifen können. Deshalb ist es wichtig, potenzielle Lücken im Vorwissen der Lernenden zu identifizieren und zu beheben, um ihnen den Einstieg in die elementare Algebra zu erleichtern.

Die hier beschriebenen Ideen sind Teil des Projekts „mathematics development continuum" (Stacy u. a., 2006) welches im Auftrag des Bildungsministeriums Victoria, Australien entwickelt wurde.[1] (Vgl. Online-Material, dort finden sich auch weitere Anregungen in englischer Sprache.)

### Schritte des Algebra-Lernens

Wir unterteilen die Algebra in fünf Themengebiete. Das Lösen von Gleichungen beginnt mit der Konstruktion von Rechenausdrücken und geht über zum Bestimmen fehlender Zahlen, was auf immer ausgeklügelteren Wegen mit Variablen geschieht. **Tab. 1** zeigt die wichtigsten Schritte in diesem Prozess und welche konzeptionellen Veränderungen dabei notwendig sind. (Die Altersangaben sind nur als ungefähre Größen zu betrachten.) Zu den Schritten passende Aufgaben werden im Folgenden hier vorgestellt; diese und weitere Aufgaben finden Sie im Internet.

### Die Bedeutung des Gleichheitszeichens

Die Gleichheit stellt zwar ein einfaches Konzept dar, wird aber dennoch von vielen Kindern oft nicht verstanden, was das spätere Lernen formaler Algebra schwierig macht (Kieran, 1992; Stacey/MacGregor, 1997). Diese Kinder deuten das Gleichheitszeichen als Aufforderung, eine Antwort geben zu müssen oder bloß als Rechenanweisung.

Dass das Gleichheitszeichen auch zeigt, dass die Terme rechts und links des Gleichheitszeichens gleichwertig sind, muss zusätzlich gelernt werden. Die Idee der Gleichheit sollte daher von Beginn an mitgelernt werden. Bereits das Aufschreiben von Gleichungen mit Zahlenausdrücken auch in der Form $12 = 3 \cdot 4$ und nicht nur als $3 \cdot 4 = 12$, kann hier ein wichtiger Impuls sein. Der tiefere Blick auf Gleichheit kann auch durch Visualisierungen angeregt werden (etwa wie die in **Abb. 1**).

**Rechnungen zur Zahl 12**

$3 \cdot 4 = 12$ (Reihe 1)
$4 \cdot 3 = 12$ (Reihe 2)
$3 + 3 + 3 + 3 = 12$ (Reihe 3)
$7 + 1 + 4 = 12$ (Reihe 3)
$12 - 7 = 1 + 4$ (Reihe 3)
$4 + 4 + 4 = 10 + 2$ (Reihe 1 u. 4)
$3 + 3 + 3 + 3 = 7 + 1 + 4$ (Reihe 2 u. 3)

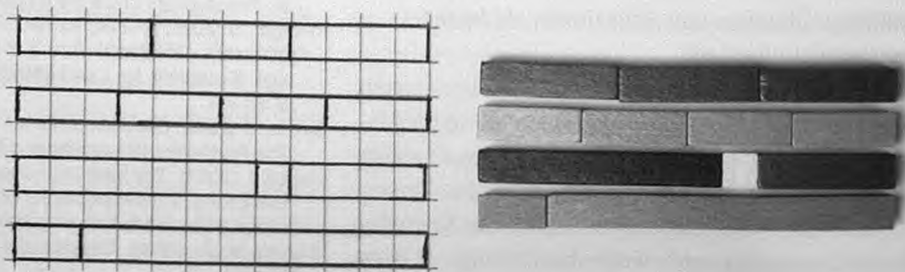

**Abb. 1:** Die Idee der Gleichheit numerischer Ausdrücke graphisch (oder real mit Cuisenaire-Stäben) bewusst machen.

### Aufstellen von Rechentermen

Es gibt zwei gute Gründe, die für das Aufstellen von Rechentermen zu Situationen sprechen: Erstens stellen Terme das Denken über Zahlen dar – sie sind ein Weg, Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen auszudrücken. Das Rechnen, speziell zur Heranführung an die Algebra, sollte nicht nur das Ergebnis fokussieren, sondern auch diese Zusammenhänge bewusst machen. Zweitens ist das Aufstellen von Rechenausdrücken zu realen Sachsituationen eine wichtige Anwendung von Mathematik.

Lernende haben oft Schwierigkeiten, algebraische Gleichungen aufzustellen und Sachaufgaben zu lösen – das Aufstellen von Rechenausdrücken ist für beides die grundelegende Fertigkeit. Ein einfaches Beispiel bietet die Übersetzung des Rechenausdruckes $10 + 10 = 3 + 8 + 9$ in „2 Boxen mit jeweils 10 Chips enthalten 3 rote, 8 grüne und 9 gelbe Chips." Die Schwierigkeit besteht darin, neben den Zahlen die zugehörigen Operationen in der Situation oder dem Text zu identifizieren.

Gleich in welchem Jahrgang und bei welchem Thema, das Aufstellen von Rechentermen sollte bewusst vollzogen werden. Vor allem sollte übersetzt werden: Von der (realen) Sachsituation zum Term und auch umgekehrt. Ein in der Grundschule häufig zu findender Weg ist es, das wechselseitige Übersetzen zwischen Geschichten oder Sachproblemen, realen Modellen und Rechenausdrücken zu vollziehen (vgl. **Abb. 2**). Bei solchen Aufgaben sollten jedoch die mathematischen Strukturen im Vordergrund stehen und nicht die sorgfältig ausgearbeiteten Geschichten und Zeichnungen. Im Zentrum steht dabei die Erkenntnis: Es gibt keine Eins-zu-Eins-Übertragung von Modellen, Gleichungen und Geschichten. So passen zu den Situationen in Abb. 2 auch die Terme $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ und $4 \cdot 5 = 20$.

Werden die dargestellten Situationen komplexer (vgl. **Abb. 3**), können sie auch mit mehreren Gleichungen beschrieben werden. Zum Beispiel werden sich manche Geschichten, die sich die Schüler ausdenken, lediglich in der Wahl des Kontextes unterscheiden (z. B. Kekse in einer Schachtel oder Hühnchen im Gehege). Andere aber werden unterschiedliche mathematische Operationen verwenden und die zu ermittelnde Zahl wird verschieden sein: Es könnte um die Gesamtzahl der Steine (Addition und/oder Multiplikation), die Zahl der Steine in jeder Schachtel (Bruch oder Division) oder die Zahl der Schachteln („Passen/in/Situation") gehen. Diese Varianten müssen sehr sorgfältig diskutiert werden.

### Erste Wege zum Bestimmen einer Unbekannten

Über die Schuljahre hinweg (und vor dem eigentlichen Algebraunterricht)

| Lernschritt | Beschreibung | Alter |
|---|---|---|
| Bedeutung des Gleichheitszeichens erfassen | Die Schüler wissen: Das Gleichheitszeichen zeigt eine Gleichheit zwischen zwei Ausdrücken an. Es ist nicht nur eine Aufforderung, die Lösung zu bestimmen. | ca. 7 |
| Rechenausdrücke aufstellen | Rechenausdrücke werden genutzt, um reale Situationen zu beschreiben und zu interpretieren. Die Komplexität der Ausdrücke nimmt mit der Zeit zu. | ab 7 |
| Erste Wege zum Bestimmen einer Unbekannten | Das Repertoire an Strategien die Unbekannte zu bestimmen wird erweitert. Die Schüler nutzen nicht mehr nur Bekanntes, sondern stellen Vermutungen auf, überprüfen diese, begründen arithmetisch und verwenden Gegenoperationen. | ca. 8/9 |
| Äquivalenz in Rechenausdrücken erkennen | Die Tendenz, einen Term nur als Rechenausdruck wahrzunehmen, löst sich langsam auf. Erkennen erster Termstrukturen und von Zusammenhängen zwischen Operationen | ca. 10 |
| Struktur von algebraischen Ausdrücken erfassen | Erkennen: Das Zusammenspiel von Buchstaben, Zahlen und Rechenzeichen erzählt eine „Geschichte". Das Rückwärtsrechnen wird als eine nützliche, aber immer noch numerische Lösungsstrategie wahrgenommen. | ca. 12 |
| Systematisches Umformen von Gleichungen | Erweitern der Lösungsstrategien durch die systematische Strategie „auf beiden Seiten die selbe Operation ausführen". | ca. 13 |

**Tab. 1:** Schritte von Arithmetik zur Algebra im Projekt „Mathematics Developmental Continuum"

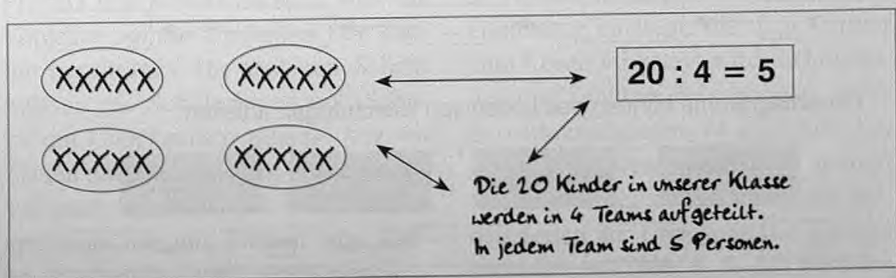


**Abb. 2:** Schüler müssen flexibel zwischen Modell, Rechenausdruck und Realsituation und ihren Geschichten wechseln können.

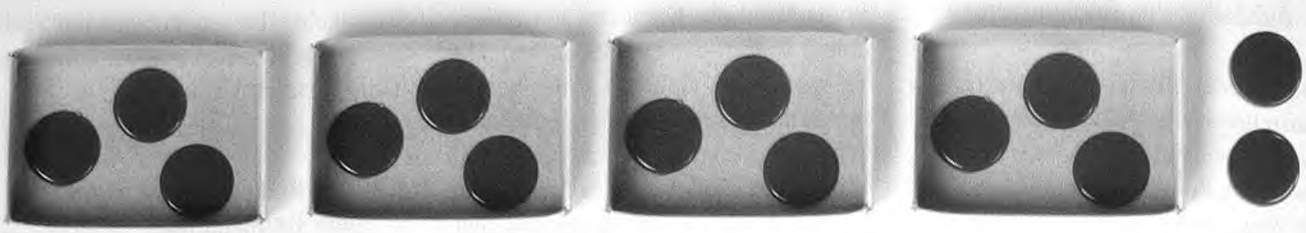

**Abb. 3:** Welche Terme und Geschichten finden Ihre Schülerinnen und Schüler zu diesem Bild?

entwickeln Schülerinnen und Schüler ein breites Spektrum an Strategien, wie sie Unbekannte innerhalb eines Rechenausdruckes bestimmen können. Die numerischen Wege in der Grundschule stellen dabei wichtige Vorerfahrungen zur Algebra dar.

Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 und 6 finden die Unbekannte, indem sie Bekanntes nutzen. Beispielsweise erkennen sie, dass in 4 + ❑ = 12, die Zahl 3 zu 4 addiert werden muss, um 12 zu erhalten. Dabei verwenden sie mehr oder weniger intuitiv die Umkehroperation zur Lösung, oder es wird Versuch und Irrtum als Strategie genutzt. Dabei wird der Gedanke unterstützt, dass die Lösung der Gleichung eine Zahl ist, die „beide Seiten gleich macht" (hier: die linke Seite gleich der rechten macht).

Leider wird diese Strategie später oft vergessen, obwohl sie bei manchen Aufgaben schneller ist als das systematische Umformen. Dabei kann die „Versuch-Irrtum-Strategie" leicht zu einer „Vermuten-Überprüfen-Verbessern-Strategie" werden, die ihrerseits eine hilfreiche Problemlösetechnik für alle Bereiche der Mathematik darstellt.

Kinder nutzen auch inhaltliche und logische Schlussfolgerungen, um die Unbekannte zu ermitteln. Das geschieht dann, wenn die Rechenausdrücke mit Modellen oder Situationen in Verbindung gebracht werden. Um die fehlende Zahl im Rechenausdruck 4 · ❑ + 2 = 14 zu bestimmen, können Lernende, die sich ein passendes Bild (wie das in **Abb. 3**) vorstellen, einfacher erkennen, dass beim Wegnehmen der 2 Steine 12 Steine verbleiben, die dann in 4 gleich große Päckchen (zu je 3 Steinen) verteilt werden. Damit wird die Bedeutung der Umkehroperation vorbereitet. Diese wird später formalisiert, wenn Symbole anstelle der realen Situation im Mittelpunkt stehen.

**Erklären und Vergleichen von Termstrukturen mit Flussdiagrammen**

Schüler erklären den Ausdruck $3(x + 4) + 2$ als eine Reihe von Operationen, die auf eine Unbekannte angewendet werden, wie:

$x \xrightarrow{\text{[addiere 4]}} x + 4 \xrightarrow{\text{[multipliziere mit 3]}} 3(x + 4) \xrightarrow{\text{[addiere 2]}} 3(x + 4) + 2$

Sie können damit erklären, wie sich $3(x + 4) + 2$ von $3x + 4 + 2$ unterscheidet:

$x \xrightarrow{\text{[multipliziere mit 3]}} 3x \xrightarrow{\text{[addiere 4]}} 3x + 4 \xrightarrow{\text{[addiere 2]}} 3x + 4 + 2$

Auch kompliziertere Terme können dargestellt werden:
$12\,e^{4x} + 11$

$x \xrightarrow{\text{[multipliziere mit 3]}} \boxed{\phantom{x}} \xrightarrow{\text{[nimm e hoch diese Zahl]}} \boxed{\phantom{x}} \xrightarrow{\text{[multipliziere mit 12]}} \boxed{\phantom{x}} \xrightarrow{\text{[addiere 11]}} \boxed{\phantom{x}}$

Flussdiagramme können das Lösen von Gleichungen anleiten:

$x \xrightarrow{\text{[multipliziere mit 4]}} \boxed{\phantom{x}} \xrightarrow{\text{[subtrahiere 1]}} \boxed{\phantom{x}} \xrightarrow{\text{[nimm den Sinus davon]}} 0{,}5 \xrightarrow{\text{[multipliziere mit 3]}} 1{,}5$

**Abb. 4:** Algebarische Strukturen visualisieren – eine Hilfe im Lernprozess

## Äquivalenz von Rechenausdrücken

Für die Algebra müssen Schülerinnen und Schüler ihren Blick vom Rechnen zum Untersuchen von Termen erweitern. Jüngere Schüler verharren oft bei der Strategie des bloßen Rechnens anstatt den Blick auf die Struktur der Rechenausdrücke zu richten. Aber gerade die Erweiterung des Blickes auf Operationen und ihre Beziehungen ist für den Übergang zur Algebra sehr wichtig. (Fujii/Stephens, 2008; Stephens, 2007).

Beispielsweise könnten Schülerinnen und Schüler nach der Unbekannten in der Gleichung 26 + 39 = 23 + ❑ gefragt werden. Manche werden hierbei einen numerischen Ansatz wählen: Sie werden die Addition 26 + 39 = 65 vollziehen, 65 in 65 = 23 + ❑ einsetzen und so herausfinden, dass ❑ = 42 ist. Lernende, die nach den Beziehungen innerhalb der Rechenausdrücke Ausschau halten, werden den Rechenausdruck als Ganzes betrachten, ihr Wissen über Zahlen und Operationen nutzen und so den Wert der Unbekannten ermitteln (etwa indem sie erkennen, dass 26 um 3 größer ist als 23 und somit die fehlende Zahl 3 mehr als 39 sein muss, um auf beide Seiten das Gleiche zu erhalten):

$$\overset{-3}{26} + \underset{+3}{39} = 23 + 42$$

Ein solches „Denken in Relationen" ist eine gute Grundlage für den Umgang mit algebraischen Ausdrücken, wie etwa „$x + 3$".

Das Denken in Relationen verstärkt das intuitive Verständnis für das, was später zu fundamentalen Regeln der algebraischen Umformungen wird. Abb. 4 zeigt ein konkretes Beispiel der Regel: $a + b = (a - 3) + (b + 3)$. Schülerinnen und Schüler, die diese verallgemeinerten numerischen Beziehungen intuitiv verstehen, können algebraische Regeln besser erlernen.

## Struktur algebraischer Ausdrücke

Die Struktur algebraischer Ausdrücke zu verstehen ist entscheidend, um Algebra flexibel nutzen zu können. – Die Kombination aus Buchstaben (unbekannten Zahlen), Zahlen und Operationen erzählt die eine „Geschichte" über eine Zahl erzählt. Diese Geschichte lebt von der Grammatik der Operationen: Klammern, Multiplikationen, Divisionen, Additionen oder Subtraktionen haben alle ihren Platz, um die symbolische Geschichte kurz und eindeutig zu erfassen.

Wenn Lernende die Struktur der Ausdrücke nicht wahrnehmen, egal ob Zahlen oder Buchstaben verwendet werden, werden sie Schwierigkeiten in allen Bereichen der Algebra haben (beim Lösen, Ersetzen, Vereinfachen etc.). Ein Weg, um den Blick für Strukturen aufzubauen, ist die Visualisierung durch ein Flussdiagramnm (**Abb. 4**). Diese Diagramme sollten in den verschiedenen Ebenen der Algebra immer wieder genutzt werden, um zu vermeiden, dass Schülerinnen und Schüler den Überblick beim Umformen verlieren.

Die Flussdiagramme können auch zum Lösen von Gleichungen benutzt werden, in dem man schrittweise von hinten nach vorne arbeitet, um mithilfe der Umkehroperationen zu der Unbekannten zu gelangen. „Lösen" meint dann, in einer Gleichung wie $3\sin(4x - 1) = 1{,}5$ in einem ersten Schritt die Multiplikation mit 3 „ungeschehen zu machen" (**Abb. 4** unten). Die vom Projekt „Mathematics Developmental Continuum" vorgeschlagenen Aktivitäten stellen die Stärken und Grenzen dieser Methode dar und zeigen Strategien für Schülerinnen und Schüler, wie sie diese kreativ und effizient nutzen können (MacGregor/Stacey, 1995). Wichtig ist, verschiedene Bedeutungen von Termen aufzubauen.

## Systematisches Umformen von Gleichungen

Obwohl die intuitive Methode aus der Grundschulzeit zum Lösen von Gleichungen später durch ein systematisches Verfahren ersetzt wird, kann das Intuitive das Verstehen der Prozeduren erleichtern. Dabei muss klar gemacht werden: Es bleibt jetzt nicht nur beim Bewegen innerhalb der Welt der Zahlen, sondern es geht auch um Variablen. Dies ist die wichtige Vorstellungserweiterung!

Auch wenn beim Lösen von Gleichungen durch Rückwärtsrechnen (z. B. im Flussdiagramm) algebraische Symbole integriert sind, bleibt dieser Prozess rein arithmetisch, da sich das Vorgehen auf das Umformen von Zahlen beschränkt. Im nächsten Schritt müssen die Schülerinnen und Schüler mit Unbekannten genauso wie mit Zahlen umgehen können. Und sie müssen auch erlernen, mit Gleichungen und nicht nur mit Termen oder Zahlen zu arbeiten. Die Strategie, das Gleiche auf beiden Seiten der Gleichung zu vollziehen, nutzt zwar das Rückwärtsrechnen bzw. die Umkehroperation, unterscheidet sich jedoch von der Idee her grundsätzlich davon.

Um Gleichungen, wie $3(3k - 14) + 22 = 48 + 3k$ zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler Operationen an dieser Gleichung als Ganzes durchführen, zum Beispiel $3k$ auf jeder Seite entfernen. Dieser Schritt verändert die Gleichung in eine andere und ändert damit nicht wie vorher nur die Zahlen. Dieser Schritt erfordert, mit Unbekannten ($3k$) umgehen zu können, im Gegensatz zu früher, als man nur mit Zahlen operierte. Einfacher zu lösen ist die Gleichung $3(3k - 14) + 22 = 48$, weil man sie in ein Flussdiagramm übersetzen kann und somit nicht in derselben Weise mit Unbekannten operieren muss (Filloy / Rojano, 1989; Herscovics / Linchevski, 1994; Stacey / MacGregor, 2000). „Das Gleiche auf beiden Seiten durchführen" kann in einem breiteren Spektrum an Gleichungen genutzt werden und führt auch eine Reihe neuer Ideen (Operieren an Unbekannten, mit Unbekannten und an Gleichungen als einzelne Einheit) ein, die für das algebraische Denken wichtig sind.

## Weitere Lernaktivitäten

Betrachtet man die Tätigkeiten, die in diesem ganzen Lernprozess vollzogen werden, so erkennt man oft allgemeine Methoden. Aus diesen lassen sich auch sinnvolle Lernaktivitäten gewinnen. Zum Beispiel ist eine häufig genutzte und erfolgreiche Methode, um das Problemlösen zu lernen, die Aufgabe, Probleme selbst zu konstruieren, also eine Umkehraufgabe zu bilden.

Man kann die Aufgabe stellen, von einer Lösung (etwa $n = 2$) auszugehen und sie in vielfältiger Weise zu verkomplizieren (**Abb. 5**, S. 12), bis eine Gleichung entsteht, die dem Partner zum Lösen vorgelegt wird. Schülerinnen und Schülern beizubringen, etwas zu verkomplizieren, ist eine gute Art, ihnen beim Vereinfachen zu helfen. Die grundlegende Strategie „auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche durchführen" (**Abb. 6**, S. 12) wird bei dieser Aktivität stark betont. In jedem Schritt ist es wichtig, dass die nächste

| | | |
|---|---|---|
| | $n = 2$ | |
| Multipliziere beide Seiten mit 3 | $3n = 6$ | Die Lösung bleibt $n = 2$. |
| Addiere $n$ auf beiden Seiten | $5n = 2n + 6$ | Die Lösung bleibt $n = 2$. |
| Subtrahiere 5 auf beiden Seiten | $5n - 5 = 2n + 1$ | Die Lösung bleibt $n = 2$. |
| Faktorisiere die linke Seite | $5(n - 1) = 2n + 1$ | Die Lösung bleibt $n = 2$. |

**Abb. 5:** „Umgekehrte" Aufgaben als sinnvoller Weg

Gleichung genau dieselbe Lösung hat, wie die Vorangegangene. Ein verbotener Schritt, beispielsweise das Multiplizieren mit 0 auf beiden Seiten, würde andere Lösungen ermöglichen.

## Fazit

Dieser Beitrag hat einige Schritte aufgezeigt, die für das Lernen des Gleichungslösens wichtig sind. Mathematik lernen verläuft niemals glatt und reibungslos. Auf jeder Ebene müssen Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten und ihr Verständnis ausbauen, um sich selbst auf das Kommende vorbereiten zu können. Das, was als nächstes kommt, stellt dabei jedoch nicht nur eine Erweiterung sondern auch eine Neuorganisation des bereits Gelernten dar. Das gilt auch beim Aufstellen und Lösen von Gleichungen.

Es gilt in den ersten Phasen, Hürden zu überwinden, um das Verstehen von Operationen, der mathematischen Notation und der Idee von Gleichheit im Zusammenhang mit den Rechenfertigkeiten aufzubauen. Und es gilt, neue Konzepte zu entwickeln, welche auf dieser Basis geschaffen werden – Variablen, Umkehroperationen, Termstruktur und Gleichungen und die Fähigkeit eine Gleichung als ein Ganzes, als Objekt, zu sehen, bei welchem auf beiden Seiten die gleichen Operationen ausgeführt werden.

Es gibt in der Mathematik weitere Beispiele für solche Entwicklungswege. Lehrkräfte, welche in jedem einzelnen Schritt auch die Bedeutung zum Verstehen des Ganzen sehen, können auch das Lehren von Mathematik als ein Ganzes begreifen.

| | |
|---|---|
| Mit einer Gleichung starten | $3x + 4 = x - 12$ |
| Das Gleiche auf beiden Seiten vollziehen<br>Eine Gleichung mit gleicher Lösung erhalten | $3x + 4 + 12 = x - 12 + 12$ |
| Jede Seite vereinfachen | $3x + 16 = x$ |
| Das Gleiche auf beiden Seiten vollziehen<br>Eine Gleichung mit gleicher Lösung erhalten | $3x + 16 - x = x - x$ |
| Jede Seite vereinfachen | $2x + 16 = 0$ |
| Das Gleiche auf beiden Seiten vollziehen<br>Eine Gleichung mit gleicher Lösung erhalten | $2x + 16 - 16 = 0 - 16$ |
| Jede Seite vereinfachen | $2x = -16$ |
| Wiederholen, bis man die einfachste Form der Gleichung erhält<br>$x$ = Ergebnis | $x = -8$ |

**Abb. 6:** Gleichungen lösen mit „das Gleiche auf beiden Seiten durchführen" besteht aus zwei abwechselnden Schritten.

### Anmerkung

1 Diese umfangreiche Studie untersucht die mathematische Entwicklung innerhalb der verpflichtenden Schuljahre und ist für Lehrkräfte auf der ganzen Welt zugänglich. Neben der Algebra (Structure) werden die Bereiche Zahl (Number), Raum und Form (Space), Daten und Zufall (Measurement, Chance and Data) sowie mathematisches Arbeiten (Working Mathematically) ananlysiert (Stand 25. 10. 2011) http://www.education.vic.gov.au/studentlearning/teachingresources/maths/mathscontinuum/structure/default.htm

### Literatur


Filloy, E. / Rojano, T. (1989): Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. – In: For the Learning of Mathematics, 9(2), S. 19–25.

Fujii, T. / Stephens, M. (2008): Using number sentences to introduce the idea of variable. – In: Greenes, C. / Rubenstein R. N. (Hrsg.): Algebra and algebraic thinking in school mathematics. Reston, VA: NCTM, S. 127–140.

Herscovics, N. / Linchevski, L. (1994): A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics, 27, S. 59–78.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. – In: D. A. Grouws (Hrsg.): Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, S. 390–419.

MacGregor, M./Stacey, K. (1995). Backtracking, brackets, BOMDAS and BODMAS. – In: Australian Mathematics Teacher, 51(3), S. 28–31. http://www.aamt.edu.au/Publications-and-statements/Journals/Journals-Index/The-Australian-Mathematics-Teacher/AMT-51-3-28

Stacey, K. / MacGregor, M. (1997): Building Foundations for Algebra – In: Mathematics Teaching in the Middle School. 2 (4, February), S. 252–260.

Stacey, K./ MacGregor, M. (2000): Learning the algebraic method of solving problems. – In: Journal of Mathematical Behavior 18 (2), S. 149–167.

Stacey, K./ Ball, L./ Chick, H./ Pearn, C./ Sullivan, P./ Lowe, I. (2006): Mathematics Developmental Continuum P – 10. Department of Education & Early Childhood Development, Victoria. (Stand 25. 8. 2011): http://www.education.vic.gov.au/student learning/teachingresources/maths/mathscontinuum/default.htm

Stacey, K. /MacGregor, M. (1999): Taking the algebraic thinking out of algebra. – In: Mathematics Education Research Journal. 11(1), S. 25–38.

Stephens, M. (2007): Students' emerging algebraic thinking in the middle school years. – In: J. Watson / K. Beswick (Hrsg.): Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Sydney. S. 678–687. www.merga.net.au/documents/RP632007.pdf