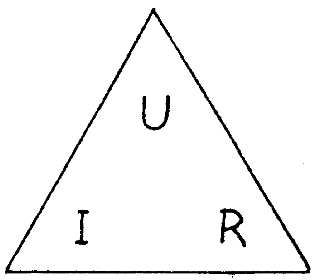
Günther Malle
Klagenfurt

ZUR FÄHIGKEIT VON SCHÜLERN IM AUFSTELLEN UND INTERPRETIEREN VON FORMELN

1. Ein wichtiges Ziel des Algebraunterrichts der Unterstufe

Zu den öfter genannten Zielen des Algebraunterrichts der Unterstufe gehört ein verständiges Umgehenkönnen mit Formeln. Wir wollen uns zunächst kurz verdeutlichen, welche Rolle Formeln im Leben eines Menschen spielen können.Eine umfassende empirische Untersuchung gibt es darüber nicht, deshalb sind wir auf Spekulationen - aufbauend auf persönlichen Erfahrungen und Detailuntersuchungen-angewiesen. Dabei stellen wir zunächst große Unterschiede fest. Während in naturwissenschaftlich-technischen Berufen Formeln an der Tagesordnung stehen und in manchen Berufen, z.B. medizinischen oder wirtschaftlichen, Formeln immerhin häufig auftreten können, gibt es auch Berufe, in denen Formeln kaum vorkommen. Im Privatleben lassen sich ähnliche Unterschiede feststellen. Daß jedoch ein Mensch heute in seinem Leben nie mit einer Formel konfrontiert wird, ist eher als ein seltener Fall zu bezeichnen. Exemplarisch seien nur drei Situationen angeführt: manche Fahrschüler lernen eine Formel für den Bremsweg kennen, manche Krankenschwestern müssen nach einer Formel aus bestimmten Körperdaten eines Patienten den Inhalt seiner Körperoberfläche berechnen und manche Elektrolehrlinge müssen mit dem Ohmschen Gesetz umgehen können.[1] Eine empirische

[1] Einige formelunkundige Elektrolehrlinge helfen sich dabei mit dem sog. "Ohmschen Dreieck". Wird in diesem eine Größe abgedeckt, ergibt sich der Zusammenhang der abgedeckten Größe mit den beiden anderen Größen.



Untersuchung, die vom Institut für Mathematik an der Universität in Klagenfurt im Jahre 1980 durchgeführt wurde, bestätigt uns in der Annahme, daß Formeln im Berufsleben doch häufiger vorkommen als man zunächst glaubt. In dieser Untersuchung wurden berufstätige Maturanten (ohne akademisches Studium) hinsichtlich der mathematischen Anforderungen an ihrem Arbeitsplatz befragt. Formeln wurden dabei recht häufig genannt, vor allem Formeln zur Flächen- und Volumsberechnung sowie einfache physikalische oder technische Formeln. [1)]

Selbst von jenen Menschen, die in ihrem Leben kaum mit Formeln in Berührung kommen, kann man manchmal sagen, daß sie nicht wissen, welche Vorteile ihnen dabei entgehen. Wieviel einfacher und wieviel weniger streitanfällig wäre beispielsweise die Interpretation mancher Gesetze, wenn die darin enthaltenen Berechnungsvorschriften durch eine Formel ausgedrückt wären. Wieviel mehr kritische Einsicht wäre möglich, wenn die Benutzer mancher Kennziffern oder Indices (z.B. Preisindex, Baukostenindex) die Formeln kennen und verstehen würden, nach der diese berechnet wurden. Wieviel leichter wäre es für manche, den Nettobetrag aus dem Bruttobetrag (inklusive Mehrwertsteuer) zu berechnen, wenn sie selbständig die Formel $B = 1{,}16.N$ aufstellen könnten usw.

All diese Überlegungen zeigen, daß ein verständiges Umgehen mit Formeln ein durchaus erstrebenswertes Ziel des Algebraunterrichts der Unterstufe darstellt.

Welche Lehrziele gehören nun zu einem verständigen Umgehen mit Formeln?

---

1) Gelegentlich können auch kompliziertere Formeln auftreten. Aus einem Fachbuch für Krankenschwestern [SCHÖLMERICH et al. 1980] entnehme ich etwa die folgende Formel:

$$\frac{\dot{Q}_{sh}}{\dot{Q}_t} . 100 = \frac{(pO_{2A}-pO_{2a}).0{,}0031}{C(a-v)O_2+(pO_{2A}-pO_{2a}).0{,}0031}$$

Dazu gehört z.B. die Fähigkeit, mit Hilfe von Formeln konkrete Zahlenwerte zu berechnen, einfache Umformungen an Formeln vorzunehmen, eine Formel zu begründen, Formeln in Nachschlagewerken zu finden, Formeln für konkrete Situationen zu adaptieren, usw. In diesem Papier wollen wir jedoch nur ein Teilziel herausgreifen, nämlich das folgende:

Der Schüler soll einfache Sachverhalte in mathematische Formeln übersetzen können und umgekehrt einfache mathematische Formeln interpretieren können.

Diesem Ziel kommt - wie die obigen Beispiele zeigen - besondere Bedeutung zu. Denn wenn ein Schüler (der nicht gerade Mathematiker wird) in seinem späteren Berufs- oder Privatleben überhaupt mit Formeln in Berührung kommt, dann haben diese im allgemeinen einen Bezug zu einem außermathematischen Kontext. Rein innermathematische Fähigkeiten wie etwa die Fähigkeit zur Termumformung nach gewissen Regeln reichen nicht aus, mit der Formel etwas anzufangen. Sie muß vielmehr im Sachkontext verstanden werden. In manchen Berufen wird es durchaus nötig sein, eine Formel selbst aufzustellen (Programmierer tun dies z.B. ständig), die Mehrzahl der Betroffenen wird aber vielleicht nur vorgegebene Formeln anwenden müssen. Man bedenke aber, daß das Aufstellen und Interpretieren von Formeln gewissermaßen "inverse" Vorgänge sind und daß anzunehmen ist, daß die Förderung der einen Fähigkeit die andere bis zu einem gewissen Grad mitfördert. Wir werden also in der Schule beiden Fähigkeiten unser Augenmerk widmen müssen.

2. Empirische Beobachtungen

Wird das obengenannte Ziel bezüglich des Aufstellens und Interpretierens von Formeln in der Schule erreicht?

Im Jahre 1980 haben zwei amerikanische Mathematikdidaktiker, P. ROSNICK und J. CLEMENT, eine Untersuchung durchgeführt, die sich mit der Übersetzung von verbal oder graphisch gegebener Information in algebraische Formeln bzw. umgekehrt von algebraischen Formeln in verbal oder graphisch gegebene Information beschäftigt [ROSNICK-CLEMENT 1980]. Die Autoren haben Versuchspersonen verschiedenen Alters (Studenten verschiedener Studienrichtungen) Aufgaben etwa der folgenden Art vorgelegt:

Es sei S die Anzahl der Studenten und P die Anzahl der Professoren an einer Universität. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie das durch eine Gleichung mit Hilfe von S und P aus!

Nur etwa 60 % der Befragten konnten die Aufgabe richtig lösen. (Dabei schnitten Studenten der Wirtschaftswissenschaften signifikant schlechter ab als Studenten der Technik.) Eine Folgeuntersuchung von J. LOCHHEAD an Lehrern und Universitätsprofessoren verschiedener Fachrichtungen ergab kein besseres Resultat. Von denen, die die Aufgabe falsch gelöst hatten,machten fast alle denselben Fehler. Sie schrieben:

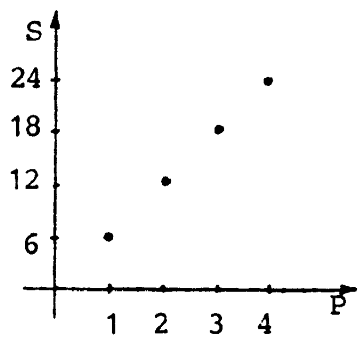
$$6\,S = P$$

Dieser Fehler wurde in der mathematikdidaktischen Literatur gelegentlich als "Rosnick-Clement-Phänomen" bezeichnet.

Bei der Übertragung ausländischer Untersuchungen auf österreichische Verhältnisse muß man natürlich sehr vorsichtig sein. In der Zwischenzeit konnten wir aber durch Untersuchungen am mathematischen Institut der Universität Klagenfurt nachweisen, daß das Rosnick-Clement-Phänomen genauso in Österreich anzutreffen ist. Bei einer informellen Untersuchungsreihe an AHS-Lehrern (Germanisten) war die Erfolgsquote sogar nur etwa ein Drittel.

ROSNICK und CLEMENT wollten dieses Phänomen nicht nur nachweisen, sondern auch untersuchen, inwieferne dieses Phänomen durch "Therapien" beeinflußt werden kann. Diejenigen Versuchspersonen, die die Aufgabe falsch gelöst hatten, wurden einer eingehenden Belehrung unterzogen, in der sieben verschiedene Therapien angewandt wurden:

a) Es wurde den Versuchspersonen die simple Mitteilung gemacht, daß das Resultat falsch sei.
b) Es wurde den Versuchspersonen erläutert, daß S die "Anzahl der Studenten" und nicht die "Studenten" bedeutet; analog für P.
c) Es wurde herausgearbeitet, daß es mehr Studenten als Professoren sind.
d) Es wurden Zahlen eingesetzt. Z.B. müssen es bei 10 Professoren 60 Studenten sein. Somit folgt aus $6\,S = P$ die Beziehung $6.60 = 10$.
e) Die Situation wurde durch Graphen oder Tabellen dargestellt.



P	S
1	6
2	12
3	18
4	24

f) Die Aufgabe wurde mittels einer Proportion gelöst, etwa $S : P = 6 : 1$.
g) Es wurde eine korrekte Lösung eines Analogproblems vorgeführt.

Nicht bei jeder Versuchsperson wurden alle sieben Therapien angewandt, aber im Durchschnitt wurde für jede Versuchsperson eine Stunde für diese Belehrung aufgewandt. Anschließend wurden die Versuchspersonen wieder getestet, indem ihnen Analogaufgaben gestellt wurden, z.B.:

Es sei Z die Anzahl der Ziegen und K die Anzahl der Kühe auf einer Weide. Es sind fünfmal so viele Ziegen wie Kühe auf der Weide. Drücken Sie das durch eine Gleichung mit Hilfe von Z und K aus!

Es zeigte sich, daß fast alle Versuchspersonen (ca. 80 %) wieder in den frühen Fehler verfielen und die Gleichung verkehrt anschrieben. Daraus schlossen ROSNICK und CLEMENT (und auf Grund unserer eigenen Erfahrungen müssen wir dem zustimmen), daß das Phänomen tief sitzt und nicht durch ein paar kurze Belehrungen beseitigt werden kann.

Um uns von der Hartnäckigkeit des Phänomens zu überzeugen, sehen wir uns drei Protokolle aus den Untersuchungen von ROSNICK und CLEMENT an:

A) STUDENTIN DAWN

Die Studentin hatte folgende Aufgabe zu lösen:

Sei E die Essigmenge und O die Ölmenge in einem Salatdressing. In dem Salatdressing ist dreimal soviel Öl wie Essig. Drücken Sie dies durch eine Gleichung mit Hilfe von E und O aus!

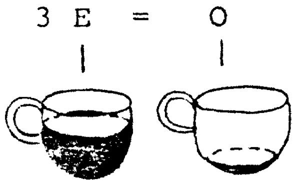
Im ersten Impuls schrieb die Studentin:

$$3O = E$$

Nachdem der Interviewer einen zweifelnden Laut von sich gab, besserte sie dies aus zu:

$$3E = O$$

Der Interviewer gab sich damit nicht zufrieden und verlangte eine Erklärung. Daraufhin erläuterte die Studentin die Gleichung mit Hilfe einer Zeichnung so:



Sie fügte noch hinzu, daß es umgekehrt grauslich schmecken würde.

B) STUDENT DON

Der Student hatte die obengenannte Aufgabe mit den Ziegen und Kühen auf einer Weide zu lösen.

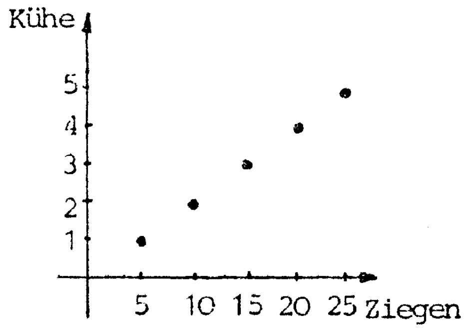
Der Student schrieb zunächst:

$$1Z = 5K$$

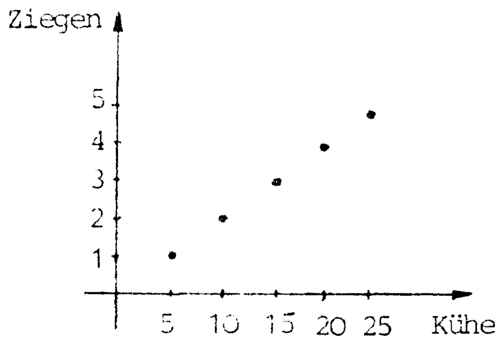
Diese Gleichung ist an sich richtig. Da der Student aber las "1 Ziege ist gleich 5 Kühe", vermutete der Interviewer, daß der Student doch nicht verstand, was er geschrieben hatte. Im darauffolgenden Gespräch ergab sich, daß die Gleichung - wenn man beide Seiten mit 5 multipliziert - übergeht in die (immer noch richtige) Gleichung

$$5Z = 25K$$

Der Student las "5 Ziegen sind 25 Kühe". Der Interviewer verlangte nun vom Studenten eine Darstellung durch einen Graphen, wonach der Student den folgenden (richtigen) Graphen zeichnete:



Auf die Frage, ob die Gleichung 5Z = 25K diesem Graphen entspreche, glaubte der Student, einen Fehler gemacht zu haben und vertauschte die Achsenbezeichnungen im Graphen:



Er interpretierte die Gleichung $5Z = 25K$ vermutlich so: "5 Ziegen entsprechen 25 Kühen", verfiel damit in den typischen Umkehrfehler und glaubte, den Graphen ändern zu müssen.

Daraufhin stellte der Interviewer die Frage, ob dieser Graph mit der ursprünglichen Problemstellung übereinstimme, nämlich daß auf der Weide fünfmal so viele Ziegen wie Kühe sind. Der Student hat die ursprüngliche Problemstellung total aus den Augen verloren und das Interview wurde an dieser Stelle abgebrochen.

C) STUDENT PETER

Der Student hatte folgende Aufgabe zu lösen:

Sei E die Anzahl der Engländer und C die Anzahl der Chinesen. In China leben 8-mal so viele Menschen wie in England. Drücken Sie das durch eine Gleichung mit Hilfe von E und C aus!

Der Student äußerte sinngemäß folgendes: Ich weiß, es muß $8E = C$ heißen, aber ich stelle mir das anders vor. Ich denke mir: 8 kleine Chinesen bilden einen großen Chinesen und jeder große Chinese entspricht einem Engländer.
Interviewer: Was bedeutet E?
Peter: Einen Chinesen
Interviewer: Was bedeutet C?
Peter: Einen Engländer ... ja, C ist England selbst.
Dieser Student schreibt zwar $8E = C$, stellt sich aber $8C = E$ vor und hält innerlich an dieser Vorstellung so fest, daß er sogar bereit ist, E als Chinesen und C als Engländer zu interpetieren.

3. Einige theoretische Erklärungsversuche

Was könnten mögliche Ursachen für das Rosnick-Clement-Phänomen sein?

Eine Erklärung drängt sich sofort auf. Die Gleichung wird als Abkürzung der verbalen Ausdrucksweise angesehen, wobei die Wortstellung beibehalten wird:

$$\underset{6}{6}\ \ \underset{S}{\text{Studenten}}\ \ \underbrace{\text{kommen auf einen}}_{=}\ \ \underset{P}{\text{Professor}}$$

Dabei ist S eine Abkürzung für "Studenten" und bedeutet nicht die "Anzahl der Studenten". Analoges gilt für P. Das Gleichheitszeichen bedeutet nicht die Gleichheit von Zahlen, sondern ist eine Abkürzung für die sprachliche Wendung "kommen auf" oder ähnliches. Es liegt also ein falsches Verständnis der Variablen und des Gleichheitszeichens zugrunde.

Die Erklärung, daß der Fehler durch die Wortstellung bedingt ist, reicht aber nicht aus, das Phänomen zu erklären. ROSNICK und CLEMENT haben nämlich in sorgfältigen Versuchen die Wortstellung variiert und die Information auch nichtverbal angeboten (z.B. durch Graphen oder Tabellen). Es zeigte sich, daß der Fehler trotzdem mit gleicher Häufigkeit und Hartnäckigkeit auftrat. Es muß also noch andere Ursachen für diesen Fehler geben.

Der amerikanische Mathematikdidaktiker R. DAVIS hat eine weitere Erklärung gegeben [DAVIS 1980]. Schüler lernen in ihrer Schulausbildung u.a. zwei "Schemata" kennen: [1)]

---

1) Statt "Schema" verwendet er das Wort "frame". Dies ist ein Fachausdruck aus der "Artificial Intelligence" und man versteht darunter eine Informationsspeicherungsstruktur im Gedächtnis eines Menschen (oder einer Maschine).

- Einheitenschema: Kürzt man etwa in der Gleichung 1 dm = 10 cm für den Moment cm mit C und dm mit D ab, ergibt sich die Gleichung

$$D = 10\ C$$

- Zahlenschema: Bezeichnet man hingegen mit C die Anzahl der cm und mit D die Anzahl der dm, so gilt

$$C = 10\ D$$

Im Zahlenschema wird die kleinere Zahl mit der Konstanten 10 multipliziert, um die andere zu erhalten. Wird dieses jedoch mit dem Einheitenschema verwechselt, so wird die größere Zahl mit der Konstanten 10 "multipliziert" [1]. Der Fehler in der Professoren-Studenten-Aufgabe kann also so erklärt werden. Man nimmt an, daß der Schüler sich der Form der aufzustellenden Gleichung bewußt ist, nämlich daß er eine der Variablen S und P mit 6 multiplizieren muß, um die andere zu erhalten, und daß er weiters weiß, daß S größer als P ist. Orientiert er sich nun am Zahlenschema, erhält er das richtige Ergebnis S = 6P; orientiert er sich am Einheitenschema, erhält er das falsche Ergebnis P = 6S.

Daß ein Schüler bei einer Aufgabe nicht das richtige Schema aufruft, kann daran liegen, daß dieses in ihm noch nicht genügend ausgebildet ist, während vielleicht ein anderes Schema so dominiert, daß es immer wieder durchschlägt. DAVIS hat verschiedene solcher Schemata untersucht und ihnen allen die Eigenschaft zugeschrieben, daß sie - wenn einmal ausgebildet - sehr beharrlich ("persistent") sind. Dies steht im Einklang mit der Beobachtung, daß der Umkehrfehler hartnäckig ist und nicht in kurzer Zeit abgebaut werden kann.

---

[1] Diese Verwechslung wird offenbar dadurch gefördert, daß der Punkt als Multiplikationszeichen nicht angeschrieben wird.

4. Weitere empirische Beobachtungen

Angeregt durch die Untersuchungen von ROSNICK und CLEMENT haben wir am Institut für Mathematik der Universität Klagenfurt selbst begonnen, Schüler und Erwachsene zu befragen. Das erste, das wir dabei feststellen mußten, war, daß sich in den Köpfen mancher Befragten noch viel ärgere Dinge abspielten. Wir waren darüber sehr erstaunt, denn obwohl manche von uns auf eine langjährige Unterrichtstätigkeit zurückblicken können, waren uns diese Dinge an den Schülern nie aufgefallen. Zum Beleg seien hier einige Auszüge aus Interviews wiedergegeben. (Man beachte dabei, daß manches wie ein Witz klingt, von den Befragten aber durchaus ernst gemeint war.)

A) AHS-LEHRERIN CHRISTA (36 JAHRE)

Die Befragte machte einen überdurchschnittlich intelligenten Eindruck, schrieb gerade an einer Dissertation aus Geschichte. In dieser verwendete sie statistische Methoden, in denen auch Formeln vorkommen. Die Professoren-Studenten-Aufgabe beantwortete sie hingegen zunächst erwartungsgemäß so:

$$6\ S = P$$

Nachdem ich ihr mit Zahlenbeispielen klargemacht hatte, daß dies nicht stimmt, machte sie einen neuen Ansatz:

$$P + 6\ S = P + S$$

Sie erläuterte dies so: "Die Professoren und die auf jeden Professor fallenden Studenten ergeben zusammen alle Professoren und Studenten". Ich erklärte ihr dann, daß man auf beiden Seiten dieser Gleichung ja P subtrahieren könnte und dann erhielte:

$$6\ S = S$$

Dies störte sie jedoch nicht und sie meinte dazu: "Die Studentengruppen zu jeweils 6 Studenten ergeben zusammen alle Studenten". Nachdem ich ihr wiederum mit Zahlenbeispielen klargemacht hatte, daß dies nicht stimmen kann, versuchte sie einen neuen Ansatz:

$$P + S = 7$$

Als ich einen Laut des Zweifels von mir gab, besserte sie aus zu:

$$P + 6\ S = 7$$

Sie erläuterte dies so: "Ein Professor und seine 6 Studenten sind zusammen 7 Personen".
Das Interview wurde abgebrochen.

B) AHS-LEHRERIN HELGA (29 JAHRE)
Die Befragte schrieb gerade an einer Dissertation aus Germanistik und kann ebenfalls als sehr intelligent bezeichnet werden. Sie hatte folgende Aufgabe zu lösen.

In einem Saal sind x Männer und y Frauen. Was bedeutet die Formel:

$$y = x+2$$

Nachdem sehr lange keine Antwort aus ihr herauszukriegen war, versuchte ich die Aufgabe zu erleichtern, indem ich die Anzahl der Männer mit M und die Anzahl der Frauen mit F bezeichnete:

$$F = M+2$$

Diese Gleichung interpretierte sie so: "Die Frau hat einen Mann und 2 Kinder". Auf meine Frage, ob denn die Zahl 2 unbedingt 2 Kinder bedeuten müsse und nicht etwa 2 Frauen oder 2 Männer bedeuten könne, antwortete sie: "Nein, denn sonst müßte

$$F = M+2F \text{ oder } F = M+2M$$

hierstehen." Daraufhin fragte ich sie, ob die obige Gleichung $F = M+2$ nicht richtigerweise so lauten müsse:

$$F = M+2K$$

Sie antwortete "Ja, richtig" und fügte noch hinzu: "Ich verstehe diese Gleichung so, daß die Frauen den Männern mit irgendeinem Zusatz entsprechen".

C) SCHÜLERIN IRENE (17 JAHRE)

Das Mädchen ist Vorzugsschülerin mit einem "Sehr gut" aus Mathematik. Sie hatte die Aufgabe zu lösen:

In einem Saal sind x Männer und y Frauen. Was bedeutet die Formel:

$$x = 3y$$

Um die enormen Schwierigkeiten, mit denen das Mädchen zu kämpfen hatte, zu illustrieren, sei ein Auszug aus dem Interview wörtlich wiedergegeben. Sie beantwortete die Frage zunächst so:

Irene: Also, daß einmal die Männer sicher in der Minderheit sind und die Frauen ... um drei mehr sind ... das Dreifache ...

Interviewer: Du kannst dich jetzt nicht genau entscheiden, ob es um drei mehr sind ...

Irene: ... oder um das Dreifache

Im weiteren Verlauf des Interviews versuchte der Interviewer, so zu helfen:

Int.: [Angenommen] ich hätte a Personen. Es kommen noch drei hinzu. Wie viele hätte ich dann?

Ir.: 3a.

Int.: 3 mal a?

Ir.: Ja

Int.: Kann das sein? Wenn ich 10 Personen hätte ...

Ir.: Ja, und es kommen 3 dazu ...

Int.: ... dann hätte ich doch nicht 3.10 Personen.

Ir.: Nein, dann hätte ich 13 Personen, also um 3 mehr. Ja, dann sind beim [obigen] Beispiel um 3 Frauen mehr drinnen als Männer. Also 3 Frauen sind dazugekommen.

Int.: Schreiben wir einmal auf, wir hätten a Personen. Jetzt kommen 3 Personen dazu. Wieviele Personen hätte ich dann?

Ir.: 3 + a

Int.: 3 + a. Genau! D.h. zur Anzahl der Personen, die vorher hier waren ...

Ir.: ... sind 3 dazugekommen.

Int.: Also muß ich 3 + a rechnen. Plus a!

Ir.: Ach ja. Dann ist es (im obigen Beispiel) ums Dreifache mehr. Denn das heißt ja normal 3 mal y.

Int.: Ganz richtig.

Ir.: Also, du glaubst, im Saal sind dreimal so viele Frauen ...

Int.: Ich behaupte jetzt, das ist falsch. Ich behaupte, es sind dreimal so viele Männer wie Frauen.

Ir.: (Lange Pause) Dreimal so viele Männer als Frauen?

Int.: Du hast am Anfang gesagt, es sind sicher mehr Frauen als Männer. Wie bist du auf diese Aussage gekommen?

Ir.: Durch die 3 y.

Int.: Also, weil beim y mehr dabeisteht, deshalb müssen mehr Frauen sein.

Ir. : Ja.

Int.: Mmh.Ja, was bedeutet noch einmal das y?

Ir.: Die Anzahl der Frauen.

Int.: Die Anzahl der Frauen. Und x ist die Anzahl der Männer. Versuche jetzt, diese Gleichung so zu interpretieren, daß du für x die Anzahl der Männer und für y die Anzahl der Frauen nimmst. Was bedeutet dann die Gleichung? Ich erhalte die Anzahl...

Ir.: ...der Männer ist gleich dreimal die Anzahl der Frauen. -- Ja, dann stimmt es, daß mehr Männer sind, weil ja dreimal die Anzahl der Männer..., also, x Männer ist gleich 3 mal y der Frauen. Also, da sagt das Mal schon aus, daß die Männer in der Mehrzahl sein müssen. Weil es ist ja dreimal -- Ja, der Dreier bezieht sich auf die Männer.

Int.: Wieso? Er steht doch bei dem y.

Ir.: Ja, aber wenn ich das so ausdrücke, also: x Männer = 3mal y der Frauen, dann fasse ich das so auf, daß die 3 zu den Männern gehört.

Int.: Das verstehe ich nicht ganz. Na, fragen wir einmal so: Sind es jetzt mehr Männer oder mehr Frauen?

Ir.: Na, jetzt würde ich sagen, es sind mehr Männer.

5. Objekt - Zahl - Verwechslungen

In den vorgestellten Interviews, vor allem denjenigen von CHRISTA und HELGA, ist ein Fehler zu bemerken, der mit einer bestimmten Art von falschem Variablenverständnis zu tun hat. Z.B. wird S als "Student" und nicht als "Anzahl von Studenten" interpretiert. Ein ähnlicher Fehler liegt in folgendem Beispiel vor:

Ich kaufe 10 blaue Farbstifte zu b Schilling pro Stück und 15 rote Farbstifte zu r Schilling pro Stück, das kostet mich zusammen 90 Schilling. Drücke dies durch eine Gleichung in b und r aus!

Manche Schüler lösen diese Aufgabe so:

$$b+r = 90$$

Sie lesen dies: "Die blauen und roten Farbstifte kosten zusammen 90 Schilling". Diese Schüler interpretieren b als "blauen Farbstift" und nicht als "Preis eines blauen Farbstifts". Analoges gilt für r. (Vgl. [KÜCHEMANN 1978], [BÜRGER-FISCHER-MALLE 1981, S. 90-95].)

Allgemein besteht dieser Fehler darin, daß Objekte (bzw. Objektmengen) mit gewissen, diesen Objekten zugeordneten Zahlen (Anzahl, Preis, Gewicht usw.) verwechselt werden. Nach unseren Erfahrungen ist dieser Fehler weit verbreitet und liegt vielen anderen Fehlern zugrunde. Wir wollen ihm deshalb einen Namen geben und nennen ihn <u>Objekt-Zahl-Verwechslung.</u>

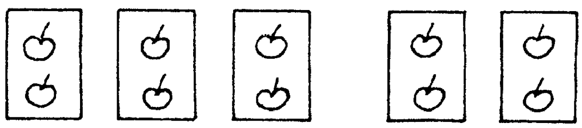
Es gibt verschiedene Bedingungen, die diese Objekt-Zahl-Verwechslungen fördern. Eine ist in der Unterrichtspraxis zu suchen. Wenn ein Lehrer seinen Schülern die Gleichung

$$3a+2a = 5a$$

mit den Worten "3 Äpfel und 2 Äpfel ergeben zusammen 5 Äpfel" erklärt und diese Erklärung eventuell noch durch die Zeichnung

unterstützt, so macht er den Schülern eben diesen Fehler vor, weil er a als "Apfel" interpretiert und nicht als "Anzahl von Äpfeln".[1] Ist es dann eigentlich verwunderlich, wenn ein Schüler später 2K als "2 Kinder" interpretiert oder umgekehrt "2 Kinder" durch 2K darstellt (siehe das Interviewprotokoll von HELGA).

Eine korrekte Erklärung der obigen Gleichung müßte eher so aussehen: "Dreimal eine gewisse Anzahl von Äpfeln plus zweimal dieselbe Anzahl von Äpfeln ergibt fünfmal diese Anzahl von Äpfeln". Als visuelle Unterstützung wäre eher ein Bild der folgenden Art zu empfehlen:



Eine andere Bedingung, die die Objekt - Zahl - Verwechslung fördert, ist möglicherweise selbst entwicklungsbedingt. In den Interviews ist uns aufgefallen, daß Schüler sehr selten mit den abstrakten Begriffen "Anzahl", "Preis", "Gewicht" etc. argumentieren. Auf die Frage, was eine Variable - etwa x - ist, antworteten sie meist "x ist, wie viele es sind", "x ist, was es kostet", "x ist, was es wiegt" oder ähnliches. Manche Schüler verwenden zwar beide Ausdrucksweisen nebeneinander, aber einen Schüler, der nur mit den abstrakten Begriffen argumentiert, haben wir nicht angetroffen. Zwar hatten wir den Eindruck, daß alle Schüler eine

---

1) Man beachte auch, daß "3a" im Sinn von "3.a" gemeint ist, hingegen "3 Äpfel" nicht im Sinn von "3.Äpfel". Die dubiose Erklärungsweise mit Äpfel, Birnen etc. wurde in der Mathematikdidaktik gelegentlich als "Fruchtsalatarithmetik" bezeichnet.

solche Argumentation verstehen, wenn sie vom Interviewer vorgemacht wird, aber selbst meiden sie diese Art des Argumentierens weitgehend. Was mag die Ursache dafür sein? Als theoretischer Erklärungsversuch sei folgendes angeboten. Wir nehmen an, daß ein Schüler einen Begriff auf zwei verschiedenen Entwicklungsebenen gebrauchen kann:

a) Implizite Gebrauchsebene: Hier steht beispielsweise der Begriff "Anzahl der Studenten" dem Schüler nur insoferne zur Verfügung, als er ihn dazu gebrauchen kann, Sachverhalte zu denken und verbal zu beschreiben, z.B.:

"S ist die Anzahl der Studenten"

Dabei ist "Anzahl der Studenten" für den Schüler eine sprachliche Floskel, die im wesentlichen dasselbe leistet wie die Floskel

"Es sind S Studenten"

oder ähnliches. Der Begriff "Anzahl der Studenten" ist nicht Gegenstand des Denkens, er wird also nur *implizit* (d.h. in einem verbalen Kontext) gebraucht.

b) Explizite Gebrauchsebene: Anders müssen das Denken und die Argumentation bei der Gleichung

$$6P = S$$

verlaufen. Im Grunde kann diese Gleichung nur verstanden werden, wenn in irgendeiner Weise eine Anzahl-Argumentation (oder etwas Gleichwertiges) geführt wird, z.B.:

"Sechsmal die Anzahl der Professoren ergibt die Anzahl der Studenten".

Im Unterschied zur impliziten Gebrauchsebene muß der Begriff "Anzahl der Studenten" hier dem Schüler so weit zur Verfügung stehen, daß er zu einem Objekt seines Denkens geworden ist, deshalb mit einem Namen (einer Variablen) versehen werden kann und (mit Hilfe dieses Namens) zu anderen Begriffen in Beziehung gesetzt werden kann.

Der Begriff wird also *explizit* gebraucht, da er für sich allein Bedeutung hat.

Alle Beobachtungen deuten nun darauf hin, daß Schüler die implizite Gebrauchsebene eher erreichen und die explizite Gebrauchsebene erst nach längerer Anstrengung erklimmen. Wird nur auf der impliziten Gebrauchsebene gedacht, so ist es für den Schüler äußerst schwierig, eine Gleichung richtig aufzustellen oder zu interpretieren. Ein Vorgehen auf dieser Ebene ist wegen des Verhaftetseins im sprachlichen Kontext sehr fehleranfällig und fördert insbesondere die Objekt - Zahl - Verwechslung. Daß Schüler trotz verbaler Argumentation auf der impliziten Gebrauchsebene manchmal Gleichungen richtig aufstellen oder interpretieren, liegt wahrscheinlich daran, daß ihnen die Begriffe "Anzahl", "Preis", "Gewicht" usw. intuitiv schon auf der expliziten Gebrauchsebene zur Verfügung stehen, wenngleich sie sich verbal noch nicht entsprechend ausdrücken können. Den Eindruck, daß das Sprechen dem Denken nachhinkt, gewinnt man ja aus vielen Schülerinterviews. Man studiere in dieser Hinsicht nocheinmal das Interviewprotokoll von IRENE. Es ist ziemlich deutlich zu sehen, daß sie zunächst nur auf der impliziten Gebrauchsebene argumentiert, indem sie erfolglos versucht, die vorgelegte Gleichung durch verschiedene verbale Ausdrucksweisen zu beschreiben, ohne von Anzahlen zu sprechen. Die Situation ändert sich erst, als der Interviewer die Anzahlen ins Spiel bringt. Zwar hat IRENE bis zum Schluß große Schwierigkeiten, eine korrekte Anzahlargumentation zu führen, aber sie hat wahrscheinlich intuitiv begriffen, worum es geht, als sie vom "y der Frauen" spricht (und damit wahrscheinlich meint, daß y die Anzahl der Frauen bezeichnet). Dieses intuitives Verständnis reicht bei ihr schließlich auch aus, um zu einer im wesentlichen richtigen Interpretation der Gleichung zu kommen.

Dies alles deutet darauf hin, daß der Lehrer bestrebt sein sollte, die Schüler zu einer korrekten Argumentation mit Anzahlen, Preisen, Gewichten usw. zu führen. Ob aber hier entwicklungsbedingte Barrieren zu überwinden sind und welche Effizienz ein Forcieren dieser Richtung hat, wurde nie genauer untersucht.

6. Was können wir aus diesen Untersuchungen lernen?

a) Zunächst zeigen die Interviews (oder machen es zumindest wahrscheinlich), daß das eingangs aufgestellte Ziel des Aufstellen- und Interpretierenkönnens von Formeln bei vielen Schülern nicht erreicht wird. Gewisse Indizien der Interviews weisen darauf hin, daß etwa die Hälfte der Schulabgänger fundamentale Schwierigkeiten im Umgang mit Variablen und Gleichungen hat, genauere Zahlen können allerdings bis jetzt noch nicht angegeben werden. Man wird als Lehrer aber wahrscheinlich gut daran tun, sich keinen zu großen Illusionen hinzugeben.

b) Die Interviews zeigen, daß die Befragten zum Teil eigenartige und unerwartete Gedankengänge entwickeln, von denen man meist in der Schule nichts oder nur wenig bemerkt. Im allgemeinen wird im Unterricht dem Schüler auch nur wenig Gelegenheit gegeben, seine Defizite zu zeigen.

Das liegt zum einen schon daran, daß keine geeigneten Aufgaben gestellt werden. Übersetzungen von Sachverhalten in Formeln kommen zwar bei den Textgleichungen vor. Diese werden aber vermutlich (infolge der Zurückdrängung durch die "Neue Mathematik") in sehr unterschiedlichem Ausmaß unterrichtet und die verwendeten Methoden reichen - wie die Interviews zeigen - nicht bei allen Schülern aus. Aufgaben, in denen Formeln interpretiert werden sollen, kommen in den Lehrbüchern der Unterstufe (und damit wahrscheinlich auch im Unterricht) so gut wie nicht vor. Es kann daher kaum erwartet werden, daß diese Fähigkeit in der Unterstufe besonders hoch entwickelt wird.

Zum anderen liegt dies unter Umständen auch am Verhalten des Lehrers. Die eigenartigen Gedankengänge der Schüler werden in den Interviews meist erst sichtbar, wenn der Interviewer nach erfolgten Schülerantworten mit einer gewissen Hartnäckigkeit "nachbohrt". Dieses Nachbohren ist in der Schule unüblich. Wohl jeder Lehrer kennt das typische Lehrerverhalten, welches darin besteht, sehnsüchtig auf eine Schülerantwort zu warten und dann hocherfreut zu sein, wenn diese endlich doch kommt. Ein Nachfragen, wie der Schüler auf diese Antwort gekommen ist, wird meist unterlassen, um den Effekt nicht zu zerstören. Das ist von den Lehrern im allgemeinen durchaus gut gemeint. Das Nachbohren würde von den Schülern vielleicht als "Zerlegen" ausgelegt werden und der Lehrer will ja niemandem weh tun. Allerdings vergibt der Lehrer dabei eine ausgezeichnete Möglichkeit, mehr über die Defizite des Schülers zu erfahren.

Das Nichtbemerken der Defizite in der Schule kann aber unter Umständen für den Schüler bittere Konsequenzen haben. Denn die Defizite zeigen sich unter Umständen im Berufsleben des Schülers, wo etwa durchaus die Fähigkeit zum Aufstellen- und Interpretierenkönnen von Formeln verlangt werden kann.

c) Die Interviews zeigen, daß Schüler gar nicht so selten zu richtigen Lösungen mit falschen Methoden kommen. (Man sehe sich unter diesem Gesichtspunkt etwa die Protokolle von DON, DAWN oder PETER durch.) In diesem Fall gibt man sich als Lehrer besonders gern einer Illusion hin. Der Fall der Vorzugsschülerin IRENE mit der Note "Sehr gut" aus Mathematik beweist das. Vermutlich hat diese Schülerin bei den in der Schule gestellten Aufgaben im allgemeinen die richtigen Lösungen geliefert, sonst hätte sie ja kein "Sehr gut". Aber wie die Interviews zeigen, hat sie fundamentale Schwierigkeiten im Umgang mit Variablen und Gleichungen. Richtige Antworten sind keineswegs eine Garantie für ein adäquates Verständnis. [1]

---

1) Die Interviews mit CHRISTA und HELGA zeigen, daß die Fähigkeit im Umgang mit Variablen und Gleichungen auch durchaus nicht immer mit dem übereinstimmt, was man gemeinhin als "Intelligenz" bezeichnet (ein treffliches Argument dafür, daß Didaktik nicht nur für die Dummen da ist).

d) Durch das Studium oder die eigene Durchführung von Interviews kann man als Lehrer sensibler für Schülerantworten und die dahinterliegenden kognitiven Prozesse werden. Man macht sich die Sache zu einfach, wenn man Schülerfehler einer "allgemeinen Denkfaulheit", "Oberflächlichkeit" oder "Konzentrationslosigkeit" des Schülers zuschreibt. So etwas gibt es wohl auch, aber in den meisten Fällen stellt sich bei genauerem Hinsehen heraus, daß der Schüler sich bei seinem Fehler durchaus etwas gedacht hat. Was er sich gedacht hat, ist oft gar nicht unvernünftig. So kann man etwa die Gedanken von CHRISTA und HELGA nicht als unvernünftig bezeichnen, das Pech dieser beiden ist nur, daß ihr Variablengebrauch nicht mit dem in der Algebra üblichen übereinstimmt. Gerade die gewisse Vernünftigkeit seiner Gedanken kann unter Umständen den Schüler behindern, zu einer richtigen Lösung zu kommen. Bei CHRISTA und HELGA etwa hat man den Eindruck, daß sie mit ihrem ja nicht unvernünftigen Variablenverständnis geradezu chancenlos sind (von Zufallstreffern abgesehen).[1]

Über die hinter Schülerfehlern liegenden kognitiven (und affektiven) Prozesse weiß man aber als Lehrer im allgemeinen wenig. Von der Mathematikdidaktik wurden bisher noch wenige theoretische Erklärungsmodelle entworfen und die wenigen sind nicht sehr bekannt. Der Lehrer kann daher oft in Schülerfehlern keinen "Sinn" sehen und deshalb auch wenig Konstruktives zur Fehlerbeseitigung beim Schüler beitragen.[2]

---

1) Man bedenke, daß im täglichen Leben Variablen und das Gleichheitszeichen häufig nicht im Sinne der Algebra verwendet werden. Man sollte daher als Mathematiker nicht gleich so präpotent sein, den eigenen Standpunkt absolut zu setzen und die Personen zu belächeln, die Variablen und das Gleichheitszeichen anders verwenden.

2) Die Analyse von Schülerfehlern ist nicht unähnlich der FREUDschen Traumdeutung, bei der auch scheinbar sinnlose Träume durch die Analyse einen Sinn erhalten.

e) Ein konstruktives Umgehen mit Schülerfehlern ist im Unterricht nicht sehr verbreitet. Nicht weil die Lehrer nicht wollten. Aber sie werden durch eine verbreitete und unkritisch anerkannte Strategie behindert, die man als Fehlervermeidungstaktik bezeichnen könnte. Der Unterricht ist weithin so ausgerichtet, daß man Fehler gar nicht erst aufkommen läßt. Sobald ein Schüler etwas Falsches sagt oder an die Tafel schreibt, greift der Lehrer korrigierend ein. Insbesondere ist es - von wenigen Ausnahmen abgesehen - im Algebraunterricht der Unterstufe wohl nicht üblich, daß ein Lehrer einen vom Schüler gemachten Fehler, darüber spricht und versucht (nach Art unserer Interviewtechnik) die Gedankengänge des Schülers bewußt zu machen und damit die Ursachen des Fehlers aufzuzeigen. Die dem üblichen Verhalten zugrundeliegende Hypothese ist die, daß man die Schüler zu richtigem Handeln erzieht, indem man ihnen möglichst wenig Falsches vormacht. Diese Hypothese ist aber mehr als fraglich, weil sich Fehler ja trotz größter Vorsicht nicht vermeiden lassen, vor allem bei neuartigen Problemstellungen, und wenn man dem Schüler die Fehler immer vorenthält, kann er kaum Abwehrmechanismen dagegen entwickeln.

f) Im Idealfall sollte der Unterricht dem Schüler Strategien in die Hand geben, mit deren Hilfe er seinen Fehlern begegnen kann. Es ist anzunehmen, daß ein Schüler gegen Fehler in der elementaren Algebra besser gewappnet ist, wenn er sich gewisse Kontrollmechanismen angeeignet hat (Einsetzen von Zahlen, Maßeinheitenkontrolle, Kontrolle durch Graphen oder Tabellen etc.), wenn er typische Fehler und ihre Ursachen kennt usw.

In diesem Zusammenhang sei noch kurz auf den Wert von Regeln eingegangen. Es ist bekannt, daß in der elementaren Algebra der sematische Bereich (z.B.Aufstellen und Interpretieren von Formeln) weniger durch genau angebbare Regeln beschreibbar ist als der syntaktische Bereich (z.B. Termumformen, Gleichungslösen). Ein Lehrer erzählte mir, daß er seinen Schülern folgende Regel zur Verfügung stellt: "Dem Schwächeren muß geholfen werden." Aufgrund dieser Regel weiß der Schüler etwa, daß er P mit 6 multiplizieren muß, um S zu erhalten. Wenn auch solche Regeln vielleicht keinen Schaden anrichten, dürfte ihr didaktischer Wert gering sein, daß sie dem Schüler in einfachen Fällen zwar zu einer richtigen Lösung verhelfen, aber keine Einsicht vermitteln, warum diese Lösung richtig ist. Es besteht auch die Gefahr, daß sich Schüler nicht am Angabentext, sondern an ihren eigenen Erfahrungen orientieren. Wenn der Text zufällig so lautet, daß sechsmal mehr Professoren als Studenten vorhanden sind, könnte der Schüler trotzdem P mit 6 multiplizieren, weil er aus Erfahrung weiß, daß an einer Universität die Professoren die (zahlenmäßig) "Schwächeren" sind. (Einem ähnlichen Fehler ist auch DAWN verfallen, die automatisch annahm, da+ in einem Salatdressing mehr Essig als Öl ist).

LITERATUR

BÜRGER, H. - FISCHER, R. - MALLE, G.: Didaktische Fragen zur Algebra (bei besonderer Berücksichtigung der Unterstufe). Skriptum zur Lehrerfortbildung, Klagenfurt 1981

DAVIS, R.: The postulation of certain Specific, Explicit, Commonly-shared Frames. Journal of Math. Behaviour 3 (1980), Nr.1

KÜCHEMANN, D.: Children's Understanding of Numerical Variables. Mathematics in School 7 (1978), Nr. 4

LOCHHEAD, J.: Faculty Interpretations of Simple Algebraic Statements: The Professor's Side of the Equation. Journal of Math. Behaviour 3, (1980), Nr.1

ROSNICK, P. - CLEMENT, J.: Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. Journal of Math. Behaviour 3 (1980), Nr.1

SCHLMERICH, P. - SCHUSTER, H.P. - SCHÖNBORN, H. - BAUM, P.P.: Interne Intensivmedizin, Thieme, Stuttgart 1980