Jan BLOCK, Braunschweig

Strategien und Fehler beim Lösen quadratischer Gleichungen im Kontext flexiblen algebraischen Handelns

Quadratische Gleichungen und flexibles algebraisches Handeln

In einer explorativen Studie zum flexiblen algebraischen Handeln wird u. a. mit einer Aufgabe zum Lösen von quadratischen Gleichung den Fragen nachgegangen, welche Merkmale Schülerinnen und Schüler bei quadratischen Gleichungen wahrnehmen, welche Bedeutungen sie diesen Merkmalen zuweisen und inwieweit diese förderlich oder hinderlich für flexibles algebraisches Handeln sein können (vgl. Block 2014 und 2016). Flexibles algebraisches Handeln kann in Anlehnung an das Konzept des flexiblen Rechnens (Rathgeb-Schnierer, 2006; Threlfall 2002) definiert werden als die Fähigkeit zur Wahl einer adäquaten Bearbeitungsmethode, die von spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden abhängig ist. Bei quadratischen Gleichungen sind die auftretenden Zahlen sowie die Struktur der auftretenden Terme und der Gleichung als Ganzes Merkmale für die Auswahl eines geeigneten, d. h. effizienten und fehlerunanfälligen Lösungsverfahrens.

Aufbau der Studie

Die Studie besteht aus einer Labor- und einer Unterrichtsstudie. Teilnehmer sind 57 Schülerinnen und Schüler aus 9. und 10. Klassen verschiedener niedersächsischer Gymnasien. An der Laborstudie haben 11 Schülerinnen und Schüler vier verschiedener 9. Klassen teilgenommen. An der Unterrichtsstudie waren eine 9. Klasse mit 26 und eine 10. Klasse mit 20 Schülerinnen und Schülern beteiligt. Im Zentrum der Studie steht eine Aufgabe, bei der die Teilnehmer 20 quadratische Gleichungen nach selbst zu bestimmenden Kriterien sortieren. Vor der Sortieraufgabe waren von den Teilnehmern fünf Gleichungen zu lösen (s. Abb. 1). Ausgewählte Befunde zur Bearbeitungen dieser Aufgabe werden in diesem Beitrag vorgestellt. Die Bearbeitungen wurden hinsichtlich der verwendeten Strategien und der aufgetretenen Fehler ausgewertet, um festzustellen, welche Lösungsverfahren in Abhängigkeit von den Merkmalen der Gleichungen verwendet werden. Für Gleichung A eignet sich das Faktorisieren, für B, C und D die Anwendung der pq-Formel und für E die Anwendung von Umkehroperationen (bzw. Anwendung der Nullteilerfreiheit) als jeweils effiziente Methode.

A) $x^2-5x=0$ B) $x^2+2x-8=0$ C) $x^2-8x+9=2$ D) $5x^2+20x+15=0$ E) $(x-8)^2=0$

Abb. 1: In der Studie zu lösende Gleichungen

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Ausgewählte Befunde der Datenauswertung

Tabelle 1 zeigt die in den Bearbeitungen von 265 Gleichungen identifizierten Strategien, die Häufigkeit ihrer Anwendung und den jeweiligen Anteil korrekter Lösungen. Als „Probieren“ sind alle Lösungsprozesse zusammengefasst, bei denen die Bestimmung der Lösung nicht durch ein algorithmisch orientiertes arithmetisches oder algebraisches Vorgehen zum Auflösen der Gleichung gekennzeichnet ist. Die Strategien V bis VIII sind alle fehlerhaft und führen im Allgemeinen nicht zu richtigen Lösungen.

Strategie		Häufigkeit		Anteil korrekter Lösungen
I	Anwendung pq-Formel	91	(34,3 %)	70,3 %
II	Faktorisieren	52	(19,6 %)	55,8 %
III	Umkehroperationen/Radizieren	42	(15,8 %)	76,2 %
IV	Probieren	51	(19,2 %)	25,5 %
V	Division durch x	5	(1,9 %)	0 %
VI	Division durch 2	2	(0,8 %)	0 %
VII	Radizieren bei ausgewählten Monomen	12	(4,5 %)	0 %
VIII	Zusammenfassen verschiedener Monome	10	(3,8 %)	0 %

Tabelle 1: Identifizierte Bearbeitungsstrategien

Tabelle 2 zeigt jeweils ein illustrierendes Beispiel für die Strategien IV bis VIII, das den Bearbeitungen der Teilnehmer entnommen ist.

IV	$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x(x+2)=8 \Rightarrow x=2$
V	$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x\cdot x=8-2x \,|{:}\,x \Leftrightarrow x=-6$
VI	$x^2+2x=8\,|{:}\,2 \Leftrightarrow x+x=4 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$
VII	$x^2-8x+9=2\,|\sqrt{} \Leftrightarrow x-8x+9=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}-9}{7}$
VIII	$x^2-8x+9=2 \Leftrightarrow x^2-8x=-7\,|+8 \Leftrightarrow x^3=1$

Tabelle 2: Beispiele für die Strategien IV bis VIII

Tabelle 3 zeigt die Häufigkeiten korrekter und fehlerhafter Lösungen für die Strategien I bis IV in Bezug auf die jeweiligen Gleichungen.

Strategie	Lösung	Häufigkeit je Gleichung					Häufigkeit gesamt	
		A	B	C	D	E		
I	richtig	1	20	19	22	2	64	(70,3 %)
	falsch	3	4	11	7	2	27	(29,7 %)
II	richtig	27	0	0	0	2	29	(55,8 %)
	falsch	5	5	4	4	5	23	(44,2 %)
III	richtig	0	0	0	0	32	32	(76,2 %)
	falsch	2	1	1	1	5	10	(23,8 %)
IV	richtig	4	2	4	1	2	13	(25,5 %)
	falsch	4	15	10	9	0	38	(74,5 %)

Tabelle 3: Strategieverwendung in Bezug auf die Gleichungen

Diskussion ausgewählter Befunde der Datenauswertung

Die Daten in Tabelle 3 zeigen, dass für die Strategien I bis III der Anteil richtiger Lösungen hoch ist, wenn eine für die jeweilige Gleichung adäquate Strategie gewählt wurde (I für B, C und D, II für A und III für E). In den anderen Fällen sind jeweils mindestens 50 % der Bearbeitungen fehlerhaft.

Diese Befunde deuten darauf hin, dass die Anwendung adäquater Verfahren, also ein flexibles Handeln beim Lösen quadratischer Gleichungen, erfolgreiche Bearbeitungen begünstigt. Betrachtet man die pq-Formel als ein Standardverfahren, das sich prinzipiell auf alle quadratischen Gleichungen anwenden lässt, so ist der Anteil von 29,7 % fehlerhafter Lösungen auffällig. Eine detaillierte Analyse der Fehler zeigt, dass es sich dabei überwiegend um Fehler bei der Anwendung der pq-Formel handelt (Vorzeichenfehler beim Einsetzen von p und q; arithmetische Fehler etc.). Der bei Gleichung C antizipierte Fehler, nicht zu beachten, dass auf der einen Seite der Gleichung nicht Null steht, trat nur zweimal auf. Dieser Befund steht im Einklang mit den Befunden zur Sortieraufgabe in der Studie. Dort wurde das Auftreten von Null auf einer Seite einer Gleichung sehr häufig als Sortierkriterium verwendet und damit begründet, dass es sich um eine Voraussetzung für die Anwendung der pq-Formel zum Lösen der Gleichung handelt.

Bemerkenswert ist der hohe Anteil der Strategie „Probieren", da für alle Teilnehmer der Studie das systematische Lösen quadratischer Gleichungen im Unterricht (in Niedersachsen am Ende von Klasse 8) Thema gewesen ist. Das Finden von Lösungen durch Probieren ist eher beim Explorieren quadratischer Gleichungen als eine Art forschender Zugang zu erwarten, weniger dann, wenn andere Lösungsverfahren bekannt sind. Die Strategie trat überwiegend bei Teilnehmer der beteiligten 10. Klasse auf. 6 von 20 Schülerinnen und Schülern lösen Gleichung A durch Faktorisieren und adaptieren das Faktorisieren für die Gleichungen B, C und D wie im Beispiel in Tabelle 2 dargestellt. Liegt die Gleichung in faktorisierter Form vor, werden Lösungen dann durch Probieren ermittelt, allerdings meist nur fehlerhafte oder nur eine der beiden Lösungen. 5 von 20 Teilnehmern aus Klasse 10 geben Lösungen (fehlerhaft oder unvollständig) ohne weitere Dokumentation des Lösungsprozesses an. 2 von 20 Teilnehmern aus Klasse 10 verwenden nach der Faktorisierung der Gleichungen B, C und D die in Abbildung 2 dargestellte fehlerhafte Äquivalenz. Matz (1982) bezeichnet dieses Vorgehen als ein Übergeneralisieren bekannter Verfahren, dessen Fehlerhaftigkeit darauf beruht, dass die Bedeutung bestimmter Zahlen nicht beachtet wird.

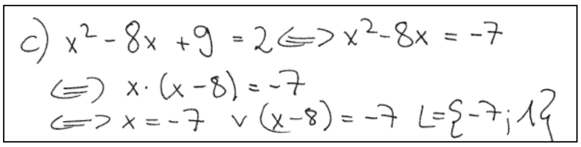

Abbildung 2: Beispiel für die Anwendung fehlerhafter Äquivalenz

Die vorliegenden Daten lassen keine Schlüsse zu, inwieweit die Reihenfolge der Gleichungen und die auftretenden ganzzahligen Koeffizienten die

Bearbeitungen der Teilnehmer der 10. Klasse bei B, C und D in der genannten Art und Weise beeinflusst haben, da einerseits durch Gleichung A das Faktorisieren als Lösungsverfahren evoziert wurde und andererseits ein Lösen durch Probieren bei nicht ganzzahligen Koeffizienten schwieriger und ggf. für die Teilnehmer nicht naheliegend gewesen wäre.

Die Befunde zur häufig fehlerhaften Anwendung der pq-Formel und der häufigen Verwendung der Strategie des Probierens in dieser Studie insgesamt bestätigen entsprechende Ergebnisse einer Studie von Lima und Tall (2006).

Bei Gleichung E zeigt sich der insgesamt höchste Anteil richtiger Lösungen, die überwiegend mit der adäquaten Strategie der Anwendung von Umkehroperationen ermittelt oder direkt (unter Ausnutzung der Nullteilerfreiheit) angegeben werden. Auffällig sind hier die Ergebnisse der Teilnehmer aus Klasse 9 der Laborstudie. Nur ein Teilnehmer verwendet die Strategie der Umkehroperationen. Alle übrigen multiplizieren den Term auf der linken Seite der Gleichung (meist fehlerhaft) aus und verwenden dann andere Strategien. Dieser Befund korrespondiert mit den Ergebnissen der Sortieraufgabe, bei der das Auftreten von Klammern sehr häufig als ein Sortierkriterium verwendet und damit begründet wurde, dass Klammern in Termen zunächst beseitigt werden müssen. Diese Argumentation war weitgehend unabhängig von weiteren Merkmalen der Gleichung und erweist sich als ein Hindernis für flexibles algebraisches Handeln (vgl. Block 2016).

Literatur

Block, J. (2014). Eine didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen als Konzeptualisierung für flexibles algebraisches Handeln. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM. 197-200.

Block, J. (2016). Flexible algebraic action on quadratic equations. In: K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prag: Charles University, ERME. 391-397.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school agebra errors. In: D. Sleeman, & J. S. Brown (Hrsg.), *Intelligent Tutoring Systems*. London: Academic Press. 25-50.

Lima, R. N. de, & Tall, D. (2006). The Concept of Equations: What have students met before? In J. Novotná et al. (Eds.), *PME 30*, Vol. IV. 233-240.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen*. Hildesheim: Franzbecker.

Threlfall, J. (2002): Flexible Mental Calculation. In: *Educational Studies in Mathematics 50*, *29-47*. doi: 10.1023/A:1020572803437