Geometrische Muster und Zahlgesetze

Geometrie und Arithmetik sollten, wo immer möglich, nicht isoliert nebeneinanderstehen, sondern im Unterricht verzahnt werden. In der Grundschule bietet das Thema Achsensymmetrie in Verbindung mit dem Halb-Doppelt-Prinzip beim Aufbau grundlegender Zahlbeziehungen ein geeignetes Beispiel (vgl. [1]). Der Zusammenhang kann aber auch gut hergestellt werden beim Betrachten geometrischer Muster, aus denen häufig arithmetische Gesetze abgelesen werden können. Die Probleme sind meistens voraussetzungslos und anschaulich lösbar und ermöglichen einen Mathematikunterricht mit heuristischen Strategien, in dem verallgemeinerungsfähige Einsichten geboten werden.
Besonders gut geeignet sind dafür die farbigen Stäbe von *Cuisenaire,* deren Einsatz schon in der Grundschule weit mehr bedeutet als eine Veranschaulichung von Lösungen elementarer Rechenaufgaben. Oft springen einem schon Zahlengesetze in die Augen, wenn man nur spielerisch „schöne" Muster von einiger Regelmäßigkeit legt.

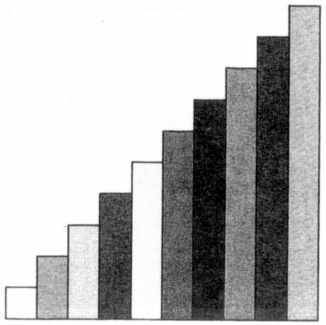
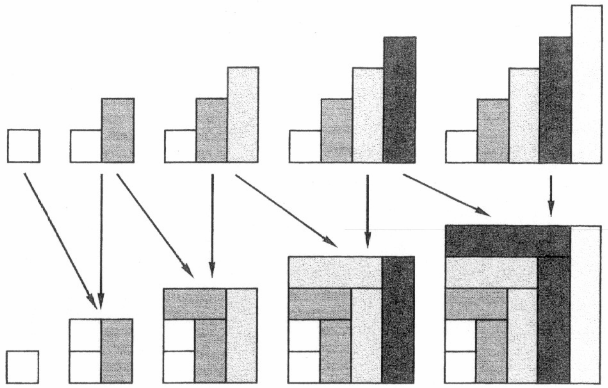


Abb. 1

Bei dem *Cuisenaire*-Material handelt es sich um Holzstäbe von stufenweise um 1 cm steigender Länge mit 1 cm^2 Querschnitt. Eine besondere Rolle spielen die als Einheiten anzusprechenden Kubikzentimeter-Würfel, aus denen die längeren Stäbe zusammengesetzt gedacht werden können, wenngleich sie keine entsprechenden Einkerbungen oder aufgezeichnete Unterteilungen aufweisen. Dafür sind sie nach Zahlverwandtschaft verschieden eingefärbt: Dreier-, Sechser-, Neunerstäbe in Grün-blau-Färbung, Zweier-, Vierer-, Achterstäbe in Rot-braun-Färbung und Fünfer-, Zehnerstäbe in Gelb-orange-Färbung.
Um aus einer Folge von Mustern auf ein allgemeines Gesetz schließen zu können, genügt oft schon ein einziger Fall, weil dieser „repräsentativ" ist. Für die formulierte

Gesetzmäßigkeit ist die Struktur dieses einen Musters gewissermaßen ein „paradigmatischer Beweis", wie *Freudenthal* gelegentlich sagt. Auch bei *Polya* finden sich manchmal solche beweiskräftigen Beispiele.
Beginnen wir mit der fortlaufenden Erweiterung der „Einertreppe" (Stufenhöhe 1). Wir erhalten die *Dreieckszahlen;* und am Muster ist leicht einzusehen, warum zwei benachbarte Dreieckszahlen eine Quadratzahl ergeben müssen:



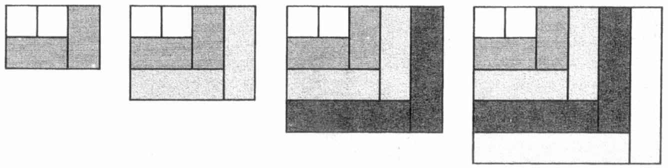
1   3   6   10   15   21   . . .

1   4   9   16   25   36   . . .

$(1+2)+1=2^2$
$(1+2+3)+(1+2)=3^2$
$(1+2+3+4)+(1+2+3)=4^2$
$(1+2+3+4+5) \;+\; (1+2+3+4)=5^2$
. . . .
$(1+2+3+\cdots+n) \;+\; [1+2+\cdots+(n-1)]=n^2$

Abb. 2

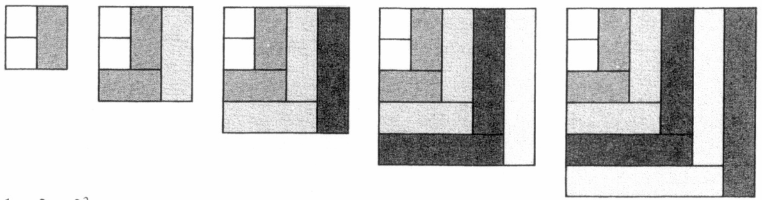
Legt man schrittweise Rechtecke durch Vergrößern um zwei Zweier, zwei Dreier, zwei Vierer usw., so läßt sich folgendes Gesetz ablesen:



$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3$
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4$
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 4 \cdot 5$
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 5 \cdot 6$
. . . .
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot n = n(n+1)$

Abb. 3

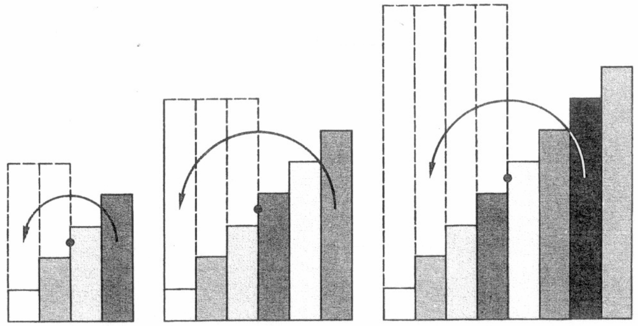
Ganz ähnlich ergeben sich Quadrate, wenn man stets zwei „Nachbarstäbe" anfügt, also 1+2, dann 2+3, dann 3+4 usw.:



$1 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$
. . . .
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Abb. 4

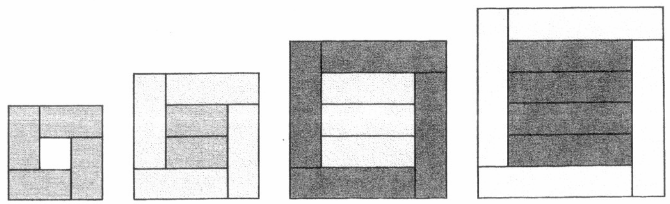
Die Einertreppe kann man – jedenfalls, wenn sie bis zu einer geraden Zahl läuft – leicht zu einem Rechteck umlegen. Nur wenig schwieriger ist zu veranschaulichen, daß für *jede* natürliche Zahl gilt: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = (n + 1) \cdot \frac{n}{2}$:



$1 + 2 + 3 + 4 = (4 + 1) \cdot 2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (6 + 1) \cdot 3$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = (8 + 1) \cdot 4$
. . . .
$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2n = (2n + 1) \cdot n$

Abb. 5

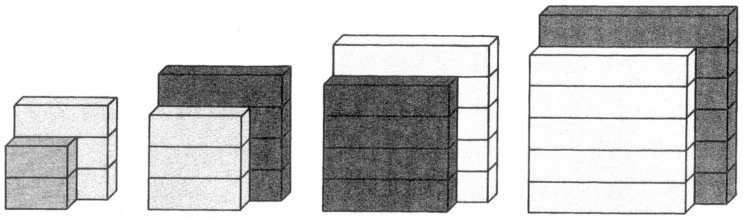
Einrahmen von Quadraten mit immer vier gleichlangen Stäben führt auf ein Zahlengesetz, das auch noch verallgemeinert werden kann, wenn man einen doppelten (dreifachen, vierfachen ...) Rahmen legt.



$1^2 + 4 \cdot 2 = 3^2$
$2^2 + 4 \cdot 3 = 4^2$
$3^2 + 4 \cdot 4 = 5^2$
$4^2 + 4 \cdot 5 = 6^2$
. . . .
$(n - 1)^2 + 4n = (n + 1)^2$

Abb. 6

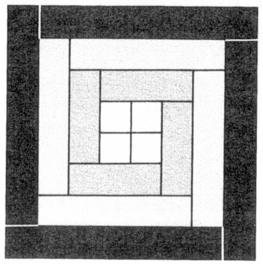
Bei den folgenden Mustern ist zu beachten, daß Subtrahieren mit *Cuisenaire*-Stäben durch Drauflegen (Abdecken) verdeutlicht wird:



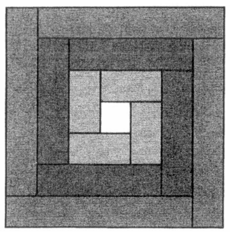
$3^2 - 2^2 = 3 + 2$
$4^2 - 3^2 = 4 + 3$
$5^2 - 4^2 = 5 + 4$
$6^2 - 5^2 = 6 + 5$
. . . .
$(n+1)^2 - n^2 = (n+1) + n$

Abb. 7

Der Aufbau der folgenden Quadrate ergibt sich wieder durch fortlaufende Einrahmung mit vier gleichlangen Stäben. Je nachdem, ob die Folge der Stäbe gerade oder ungerade Zahlen repräsentiert, ergeben sich diese Konfigurationen:



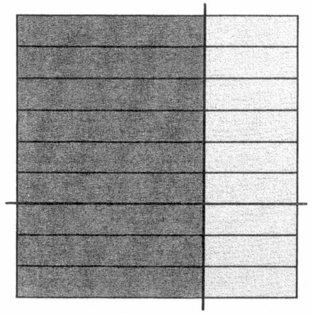
$4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 4^2$
$4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 6^2$
$4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 8^2$
. . . .
$4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \cdots + 4(2n-1) = (2n)^2$



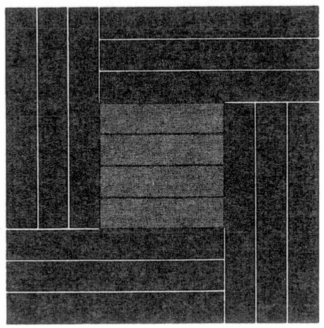
$1 + 4 \cdot 2 = 3^2$
$1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 5^2$
$1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 7^2$
. . . .
$1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + \cdots + 4 \cdot 2n = (2n+1)^2$

Abb. 8

Es liegt nahe, nach Mustern von Stäben zu suchen, die die binomischen Formeln abzulesen gestatten. Das ist in den folgenden Konfigurationen möglich. Wir legen nach der obigen Begründung nur zwei Beispiele.
Für die Formel $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ müßte man, wie an anderer Stelle schon, zwei Quadrate aufeinanderlegen.



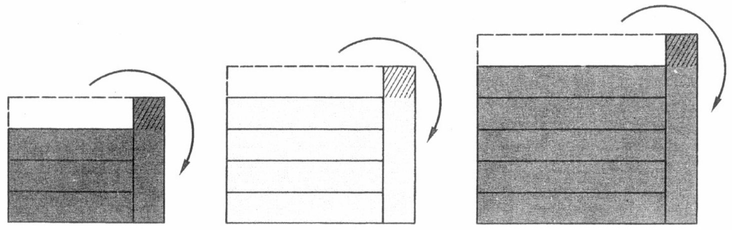
$(6+3)^2 = 6^2 + 2(6 \cdot 3) + 3^2$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



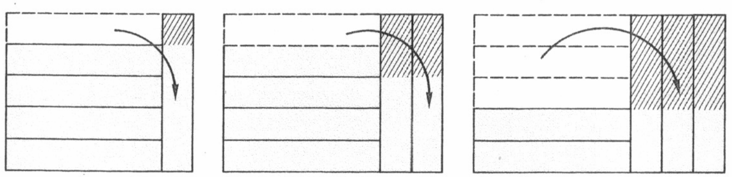
$(7+3)^2 = (7-3)^2 + 4(3 \cdot 7)$
$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

Abb. 9

Legt man schließlich aus der Quadratanordnung gleicher Stäbe einen davon quer an den Rand, so ergibt sich ein Rechteck mit „Einerüberschuß“. Durch weitere Verallgemeinerung, nämlich durch Querlegen von zwei, drei, vier ... Stäben kommt man wieder zu einer binomischen Formel:



$4^2 = 3 \cdot 5 + 1$
$5^2 = 4 \cdot 6 + 1$
$6^2 = 5 \cdot 7 + 1$
. . . .
$a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1$



$a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1^2$
$a^2 = (a-2) \cdot (a+2) + 2^2$
$a^2 = (a-3) \cdot (a+3) + 3^2$
. . . .
$a^2 = (a-b) \cdot (a+b) + b^2$

Abb. 10

Literatur

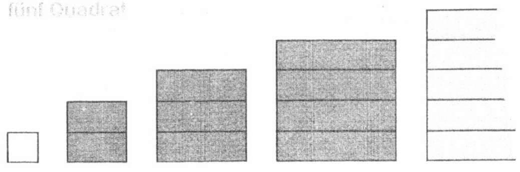
[1] *Fricke, A./Besuden, H.:* Mathematik in der Grundschule, Ausgabe C, Regionalausgabe 1, Bde. 1–4, Stuttgart 1977–1980
[2] *Besuden, H.:* Farbige Stäbe als Arbeitsmittel zum Mathematikunterricht in der Grundschule, in: Unterricht heute, Heft 4/1970
[3] *Besuden, H.:* Cuisenaire-Stäbe als Hilfsmittel zur Förderung induktiven Schließens, in: Der Mathematikunterricht, Heft 4/1978, Stuttgart; jetzt: Velber
[4] *Fricke, A.:* Die Rechenstäbe von Cuisenaire, in: Die Deutsche Schule, Heft 3/1970, Hannover

Material

Farbige Stäbe, Schülersatz in Kunststoffkassette, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

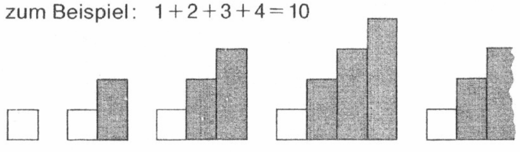
Wie geht es weiter?

① Legt die Quadrate bis zu 10 · 10 mit Stäben:



② Rechne die Quadratzahlen aus.
$10^2 = 10 \cdot 10 =$
$9^2 = 9 \cdot 9 =$
$8^2 = \ \cdot \ =$
. . .
$1^2 = \ \cdot \ =$

③ Die Einertreppe liefert , zum Beispiel: 1 + 2 + 3 + 4 = 10

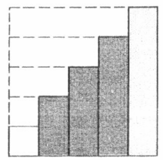


④ Rechne diese Dreieckszahlen aus.
1 + 2 =
1 + 2 + 3 =
1 + 2 + 3 + 4 =
. . .
1 + 2 + 3 + … + 10 =

⑤ Was fällt dir hier auf?

Dreieckszahlen:	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahlen:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

⑥ Lege jedes Quadrat aus zwei Dreieckszahlen. Kontrolliere durch eine Rechnung.



$3^2 = (1+2+3) + (1+2)$ → 9 = 6 + 3
$4^2 = (1+2+3+4) + (1+2+3)$ → 16 = +
→
. . . . . .
$10^2 =$ ______________________ → 100 = +

⑦ Wie heißen die drei Zahlen davor und dahinter?
, , , 160, 200, 240, 280, , , .
, , , 360, 390, 420, 450, , , .
, , , 280, 350, 420, 490, , , .
, , , 60, 75, 90, 105, , , .
, , , 100, 125, 150, 175, , , .

⑧

+	3	6	9	
16				
24				
32				

Aus: Klettbuch 1863, S. 89