

# Einführung der Gleichungslehre

## Eine Alternative zum Waagemodell

Tobias Jaschke

Wenn Schülerinnen und Schüler über das Lösen von Gleichungen reden, nutzen sie bemerkenswerterweise selten das Waagemodell, auch wenn dies in den meisten Schulbüchern zur Einführung verwendet wird. Im nachstehenden Artikel wird mit den Elementarumformungsregeln und der Modellierungsperspektive ein alternativer Weg zu Gleichungsumformungen vorgestellt, der näher am Schülerdenken liegt.

### Der Begriff „Gleichung“

Formal können Gleichungen als mathematische Modelle verstanden werden, in denen Aussagen, Zusammenhänge und Abhängigkeiten in der allgemeinen Form  $T_1 = T_2$  dargestellt werden.  $T_1$  und  $T_2$  sind dabei Terme, die Zahlen und Variablen enthalten können. Gleichungen werden in nahezu allen Bereichen der Mathematik eingesetzt und können, je nach Kriterium, in verschiedene Klassen eingeteilt werden (z. B. Differenzialgleichungen und vor allem die für die Sekundarstufe I wichtigen algebraischen Gleichungen und Funktionsgleichungen, vgl; Vollrath/Weigand 2007).

Im Hinblick auf eine genetische und verständnisorientierte Begriffsaneignung ist es wichtig, inhaltliche Bedeutungen und Interpretationen von Gleichungen vor allem zu Beginn des Lernprozesses in den Vordergrund zu rücken. Eine allzu schnelle Fokussierung auf die formale Gestalt und die algorithmischen Umformungsregeln sollte vermieden werden, will man nicht dem immer noch weit verbreiteten Eindruck einer Realitäts- und Anwendungsferne von Mathematik weiter Vorschub leisten. Aus diesen Gründen wäre es sinnvoll und wichtig, sinntragende Anwendungen von Gleichungen auch in den Definitionen der Schulbücher zu thematisieren. In vielen Mathematikschulbüchern unterscheidet sich die Definition des Begriffs Gleichung allerdings nur unwesentlich von obiger, formal-abstrakter Formulierung. Eine eher genetische Begriffsdefinition müsste die Entstehungsprozesse von Gleichungen integrieren und könnte sich beispielsweise so anhören:

*Eine Gleichung entsteht, wenn man den Zusammenhang von Größen oder deren Abhängigkeit mit Hilfe des Gleichheits-*

*zeichens beschreibt.*

*Beispiel: Für eine Fahrt mit dem ICE hat man neben dem Grundpreis G noch einen Zuschlag Z zu bezahlen. Der gesamte Fahrpreis F setzt sich also aus dem Grundpreis G und dem Zuschlag Z zusammen. Die Größen F, G und Z stehen somit in einem Zusammenhang bzw. sie sind voneinander abhängig. Diesen Zusammenhang kann man mit Hilfe von Gleichungen auf verschiedene Arten aufschreiben:*

*$F = G + Z$  oder  $F - Z = G$  oder  $Z = F - G$   
Wichtig ist dabei, dass alle drei Gleichungen stets denselben Zusammenhang ausdrücken, auch wenn sie eine unterschiedliche Gestalt haben.*

### Grundvorstellungen zum Gleichungsbegriff

Was assoziieren Lernende mit Gleichungen? Welche inhaltlich geprägten Vorstellungen verbinden sie mit dem Begriff? Wie füllen sie die Verständnislücke, die entsteht, wenn der Begriff Gleichung (oder auch jeder andere mathematische Begriff) ohne sinnerfüllenden Zusammenhang eingeführt und benutzt wird?

Es ist wichtig, den Entstehungsprozess einer Grundvorstellung zum Gleichungsbegriff bewusst zu gestalten, ihn also gezielt anzuregen und sensibel zu begleiten. Denn lässt man ihn unbeaufsichtigt, besteht die Gefahr, dass sich subjektiv bewährte (und vielleicht sogar richtige) Konzepte in den Köpfen der Lernenden etablieren, auch wenn diese aus Sicht der mathematischen Community nicht tragbar sind. Derartig abweichende Konzepte durch ein Umlernen wieder zu korrigieren, könnte sich als äußerst schwierig erweisen.

Inhaltliche Vorstellungen entstehen, wenn mathematische Begriffe in Sachzusam-

menhängen oder auch in mathematisch-inhaltlichen Modellvorstellungen eingeführt werden (z. B. Gutschein-Schuldchein-Modell bei ganzen Zahlen oder Pizza-/Kuchenmodell bei Brüchen). Betrachtet man die gängigen Schulbücher, ist es im Bereich der Gleichungslehre in erster Linie die Grundvorstellung „Gleichgewicht“, die durch verschiedene Modelle ein adäquates Denken bei den Lernenden entwickeln soll. Dabei ist vermutlich nicht so entscheidend, ob dieses Gleichgewicht in Form einer Waage oder eines Mobiles dargestellt wird. Ziel ist jeweils die Assoziation „eine Gleichung muss im Gleichgewicht sein“. Andere Grundvorstellungen des Gleichungsbegriffs spielen in den meisten Schulbüchern keine Rolle. Wenn wir Gleichungen allerdings primär als mathematische Modelle ansehen, die in einem Modellierungskreislauf genutzt werden, um mit ihrer Hilfe reale Zusammenhänge zwischen Größen mathematisch auszudrücken, so gelangen wir mit Malle (1993, S. 219 ff.) zu einem anderen Ansatz der Elementarumformungsregeln. Die verschiedenen Darstellungen einer Gleichung ( $F = G + Z$ ;  $F - Z = G$ ;  $Z = F - G$ ) beschreiben alle denselben Zusammenhang zwischen den in Relation stehenden Größen. Jede Darstellung bewährt sich in konkreten Sachsituationen bei der Berechnung einer der Komponenten. Den leichten Nachteil, dass bei einer Annäherung an den Begriff der Gleichung von der Modellierungsseite her die durchaus anschauliche Grundvorstellung der Waage erst zeitverzögert angeboten wird, wiegen die folgenden Vorteile auf: Zum einen werden von den Lernenden Gleichungen von Grund auf als Modellierungsinstrument erkannt und eingesetzt und zum anderen – und das ist das vielleicht noch wichtigere Argument – lassen sich mit Hilfe dieses Ansatzes die elementaren Gleichungsumformungsregeln (vgl. Malle 1993) in Anlehnung an das Schülerdenken inhaltlich erklären und abstrahieren. Denn wie lösen Schüler ohne die Grundvorstellung „Waage“ eine Gleichung der Form  $F = G + Z$  nach  $G$  auf? Sie sagen nicht, man müsse auf beiden Seiten der Gleichung  $Z$  subtrahieren, sondern sie argumentieren, dass man  $Z$  von  $F$  abziehen muss, um  $G$  zu bekommen. Wenn man dieses sozusagen „natürliche“ Denken im Unterricht nicht korrumpieren möchte,

wie dies bei der Einführung der Waage-  
regeln im Unterricht zwangsläufig ge-  
schieht, sondern diese Vorstellung weiter  
ausbauen und abstrahieren will, so muss  
man diese schülerorientierten Umformun-  
gen im Unterrichtsverlauf zulassen und zu  
gebener Zeit verallgemeinern (was nat-  
ürlich nicht ohne Schwierigkeiten bleibt).  
Im Folgenden wird dargestellt, wie ein  
derartiger Lerngang aussehen kann, der  
an der Staufer-Realschule in Waiblingen  
in einer siebten Klasse durchgeführt wur-  
de.

**Einführung der Gleichungsum-  
formungsregeln im Unterricht**

*1. Schritt: Inhaltliches Lösen / Umformen  
von Gleichungen*

Als Konsequenz aus den obigen Überle-  
gungen und dem Modellierungskreislauf  
besteht die erste unterrichtliche Aufgabe  
darin, den Lernenden den Zusammen-  
hang zwischen Gleichungen als mathe-  
matisch-symbolischen Darstellungsfor-  
men und realen Gegebenheiten des alltäg-  
lichen Lebens zu verdeutlichen. Dazu  
müssen die Lernenden die formale mathe-  
matische Sprache (Gleichungen) durch

ganz konkrete inhaltliche Situationen in  
die Umgangssprache übersetzen und um-  
gekehrt, sodass eine kognitive Verbindung  
zwischen den verschiedenen Sprach-  
formen erreicht wird und an das Vorwis-  
sen der Lernenden angeknüpft werden  
kann. Das Ziel ist, dass die Lernenden  
hinter der Symbolik den Inhalt sehen und  
in der Lage sind, eine innere Reflexion  
der verschiedenen Ebenen vorzunehmen.  
Ergänzt und unterstützt werden kann die-  
ses Kodieren und Dekodieren von Infor-  
mation durch geeignete enaktive und iko-  
nische Darstellungen (EIS-Prinzip). Eine  
Übersicht möglicher Darstellungsformen  
gibt Abb. 1.

Zu Beginn der Einheit „Gleichungslehre“  
wurden aus den genannten Gründen viel-  
fältige Sachaufgaben bearbeitet, die den  
Lernenden ein Gleichungslösen auf einer  
rein inhaltlichen Ebene ermöglichen. Da-  
bei beschränkte sich der Lehrer zunächst  
auf additiv verknüpfte Terme, um zu Be-  
ginn keine Verwirrung mit der Multiplika-  
tion zu erzeugen. Beispiele:

- Für eine Fahrt mit dem ICE hat man  
neben dem Grundpreis  $G$  noch einen  
Zuschlag  $Z$  zu bezahlen. Der gesamte

Fahrpreis  $F$  setzt sich also aus dem  
Grundpreis  $G$  und dem Zuschlag  $Z$  zu-  
sammen. Stelle je eine Gleichung für  
den Fahrpreis, den Zuschlag und den  
Grundpreis auf. Erläutere schriftlich,  
was die einzelnen Gleichungen jeweils  
bedeuten und wozu sie sich eignen.

- Der gesamte Rechnungsbetrag einer  
Autoreparatur setzt sich aus den Mate-  
rialkosten und den Arbeitszeitkosten  
zusammen. Welche Gleichungen könn-  
te man hier aufstellen? Wähle zunächst  
für die einzelnen Größen sinnvolle Va-  
riablen. Versuche auch, den Zusam-  
menhang zwischen Rechnungsbetrag,  
Materialkosten und Arbeitszeitkosten  
zeichnerisch darzustellen.
- Wie könnte man die Gesamtweite  $W$   
eines Dreisprungs mit einer Gleichung  
angeben? Führe sinnvolle Variablen ein  
und stelle möglichst verschiedene Glei-  
chungen auf. Benutze die bereitgestell-  
ten verschiedenfarbigen Plättchen, um  
den Zusammenhang zwischen Gesamt-  
weite und den drei einzelnen Teilsprung-  
weiten darzustellen.
- ...

*2. Schritt: Erkennen der Universalität von  
Gleichungen und erste (additive) Glei-  
chungsumformungsregel*

Nachdem die Lernenden einige Erfahrun-  
gen mit derartigen Gleichungen gemacht  
hatten, wurde versucht, den Schülerinnen  
und Schülern durch nachfolgende Aufga-  
benstellung zu verdeutlichen, dass das  
Modell der Gleichung in noch weitaus  
mehr Situationen zur Anwendung kom-  
men kann und nicht auf die wenigen Bei-  
spiele aus dem Unterricht beschränkt blei-  
ben muss, die zudem vom Lehrer kamen:

- Finde eine Situation in deiner Umwelt  
oder aus deinem Alltag, für die die fol-  
gende Gleichung gilt:  $H = L + M$   
Gib an, was die einzelnen Variablen je-  
weils bedeuten. Welche weiteren Glei-  
chungen kann man aus dieser Glei-  
chung erhalten?

Wenn man nun die von den Lernenden  
gefundenen Anwendungen und Umfor-  
mungen nebeneinander stellt (zum Bei-  
spiel durch synchrones Anschreiben an  
der Tafel, vgl. Abb. 2), erkennt man, dass  
die möglichen Umformungen ( $L = H - M$   
oder  $M = H - L$ ) trotz unterschiedlicher  
Anwendungen in allen Fällen die gleichen

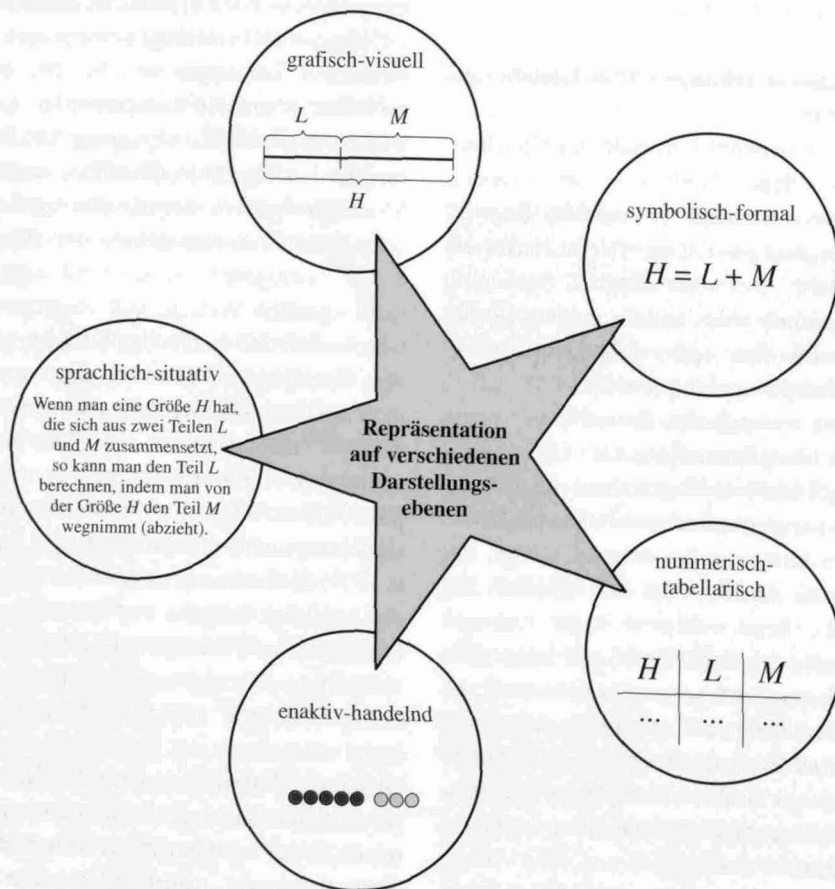


Abb. 1: Repräsentation auf verschiedenen Darstellungsebenen

sind. Diese Erkenntnis führt nun fast von selbst zur Abstraktion und macht für die Schülerinnen und Schüler begreifbar, dass die Ausgangsgleichung universellen Charakter hat und sich auf die verschiedensten Situationen übertragen lässt. Wenn nun aber die Gleichungsumformungen unabhängig von der konkreten Situation sind, kann man diese Umformungen auch allgemein oder unabhängig von einer bestimmten Situation beschreiben. Die Beschreibung dieser einfachen, aber elementaren Umformungen könnte sich dann in Schülersprache z. B. so anhören:

**1. Gleichungsumformungsregel:**

Der Rechnungsbetrag  $R$  für eine Autoreparatur entsteht, wenn man zu den Materialkosten  $M$  noch die Arbeitszeitkosten  $A$  hinzufügt. Man kann deshalb z. B. die Materialkosten  $M$  bestimmen, indem man vom Rechnungsbetrag  $M$  die Arbeitszeitkosten  $A$  wegnimmt.

allgemeiner:

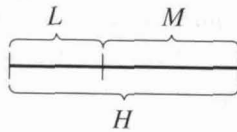
Wenn man eine Größe  $H$  hat, die sich aus zwei Teilen  $L$  und  $M$  zusammensetzt, so kann man den Teil  $L$  berechnen, indem man von der Größe  $H$  den Teil  $M$  wegnimmt (abzieht).

Für konkrete Zahlen bedeutet dies:

Wenn man eine Zahl  $H$  hat, die durch eine Addition aus zwei anderen Zahlen  $L$  und  $M$  gebildet wird, kann man die Zahl  $L$  be-

rechnen, indem man von der Zahl  $H$  die Zahl  $M$  abzieht.

Zur Verdeutlichung empfiehlt es sich hier, zeichnerische Darstellungen parallel zu den sprachlichen Formulierungen zu verwenden (vgl. Malle 1993, S. 68), z. B.:



Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass die Regelformulierungen das zur bewussten – also reflektierten – Anwendung notwendige Hintergrundwissen mitliefern, sodass es bei der konkreten Anwendung nicht so häufig zu Verwechslungen kommt:

Wann darf ich die Regel anwenden? → Wenn zwei Teile zusammengezählt werden.

Im weiteren Verlauf der Gleichungslehre kann (nicht muss!) durch allmähliche Routine bei einigen Lernenden eine weitere Abstrahierung und Formalisierung der Regel eintreten, die sich dann so anhören könnte:

Wenn man das  $L$  auf die andere Seite (der Gleichung) bringen will, muss man das Vorzeichen verändern.

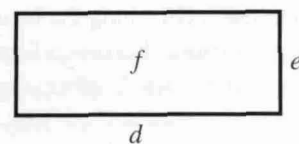
Durch die intensive Beschäftigung mit realen Sachzusammenhängen ist diese erste Gleichungsumformungsregel nun

aber kein unverstandener Algorithmus, sondern basiert auf konkreten Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler und wurde (und das ist lernpsychologisch durchaus bedeutend) von den Lernenden mit Hilfe des Lehrers selbstständig konstruiert.

**3. Schritt: Herleitung der zweiten (multiplikativen) Gleichungsumformungsregel**  
Auf ähnliche Weise kann nun die zweite Umformungsregel hergeleitet werden:

- Der Flächeninhalt  $A$  eines Rechtecks ist  $A = a \cdot b$ . Wie kann man bei gegebenem Flächeninhalt  $A$  und bei gegebener Länge  $a$  die Breite  $b$  ausrechnen? Kannst du eine Gleichung für  $b$  angeben? Wie sieht eine Gleichung aus, mit der man die Länge  $a$  bei gegebenem Flächeninhalt  $A$  und gegebener Breite  $b$  ausrechnen kann?
- Die Gebühr  $G$  für ein Handytelefonat hängt von der Anzahl der Gesprächsminuten  $d$  und dem tariflich festgelegten Minutenpreis  $p$  ab. Stelle für diesen Sachverhalt verschiedene Gleichungen auf und beschreibe jeweils schriftlich, was die einzelnen Gleichungen bedeuten und was man mit ihnen anfangen kann. Stelle den Zusammenhang von  $G$ ,  $d$  und  $p$  als Rechteck dar.
- ...
- Finde eine Situation in deiner Umwelt oder aus deinem Alltag, für die die folgende Formel gilt:  $f = d \cdot e$ . Gib an, was die einzelnen Variablen bedeuten. Welche Formeln kann man noch aus dieser Formel erhalten?

Der Nachteil bzw. die Schwierigkeit an der zweiten, multiplikativen Umformungsregel ist, dass es leider nicht mehr so einfach ist, die Lernenden auf zeichnerische Verständnishilfen zu verweisen. Dennoch kann auch hier eine Ikonisierung von Vorteil sein, nämlich die des Rechtecks (vgl. Jaschke 2009):



Sofern die Begriffsbildung des Maßbegriffs „Fläche“ bei den Lernenden schon so weit fortgeschritten ist, dass sie in der Lage sind, unabhängig von den Faktoren das Produkt zweier Zahlen oder Variablen



Abb. 2: Eine Gleichung – viele Situationen

als Fläche zu begreifen (vielleicht, weil derartige Darstellungen bereits beim Distributivgesetz in der Unterrichtseinheit Terme eingesetzt wurden), kann ein Rechteck als universelle zeichnerische Verständnishilfe eingesetzt werden. Der Lehrer sollte bei der Verwendung sensibel auf Schüleräußerungen reagieren und beim Eindruck von Verwirrung auf die Rechtecksdarstellung eher verzichten.

Wie bei der ersten Umformungsregel ist auch bei der zweiten (multiplikativen) Umformungsregel darauf zu achten, dass sich die semantischen Interpretationen der Gleichungen in der Regelformulierung widerspiegeln:

*Die Gebühr G eines Handytelefonats kann man berechnen, indem man die Anzahl der Gesprächsminuten d mit dem tariflichen Minutenpreis p multipliziert. Wenn man diesen Zusammenhang als Rechteck darstellt, so erkennt man, dass die Gesprächsgebühr G dem Flächeninhalt des Rechtecks entspricht, der von der Länge der beiden Seitenlängen abhängt. Wie bei einem Rechteck kann man deshalb z. B. bei gegebener Gesprächsgebühr G und gegebenem Minutenpreis p die Anzahl der Gesprächsminuten berechnen, indem man die Gesprächsgebühr G durch den gegebenen Minutenpreis p teilt.*

*Wenn man ein Ganzes f (Rechteck) hat, das durch Multiplikation zweier Teile d und e (Seiten des Rechtecks) entsteht, so kann man den einen Teil, z. B. d (eine Seitenlänge) bestimmen, indem man das Ganze (Rechteck) durch den anderen Teil e (andere Seitenlänge) dividiert.*

4. Schritt:

*Vertiefung der Umformungsregeln*

Im nächsten Schritt müssen die Umformungsregeln vertieft und gefestigt werden.

Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Lernenden nach der obigen Einführung der Umformungsregeln wenig Probleme mit Gleichungen haben, bei denen keine Verknüpfung der beiden Umformungsarten auftritt, wie also etwa bei:  $g = 12 + h$  oder  $t \cdot s = Z$ . Auch Umformungen entsprechend  $g = 12 + h - r$  oder  $\frac{p}{q} = B$ , bei denen die erlernten Regeln im Sinne des operativen Übens rückwärts angewendet werden müssen (Prinzip der Reversibilität) stellen nach relativ kurzer Übungszeit

keine größeren Schwierigkeiten dar. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass sehr viele der im Mathematik- und Physikunterricht der Realschule auftretenden Formeln und Gleichungen eine ähnliche Gestalt haben und somit von der Mehrheit der Klasse bereits zu diesem Zeitpunkt lösbar bzw. umformbar sind, z. B.:

$$F = m \cdot a; u = a + b + c; V = G \cdot h$$

$$\text{oder auch } V = \frac{1}{3} Gh = \frac{Gh}{3}$$

Problematischer sind Gleichungen, zu deren Auflösung beide Umformungsregeln angewendet werden müssen und bei denen das Metawissen (also das Hintergrundwissen zu Voraussetzungen und Bedingungen einer Regelanwendung) entscheiden muss, welche Umformungsregel wann und warum die richtige Wahl ist. Bei allen Übungen zu Gleichungsumformungen ist deshalb ein reflektierendes, also bewusst machendes Üben unbedingt angezeigt. Dies kann z. B. dadurch geschehen, dass die Lernenden aufgefordert werden, in jeder Zeile einer Gleichungsumformung anzugeben, welche Regel angewendet wurde und warum.

Um das notwendige Erkennen der Termstrukturen für die Schülerinnen und Schüler zu vereinfachen und zu strukturieren, ist es günstig, die einzelnen Teilterme durch Kästchen oder ähnliche Hilfsmittel hervorzuheben und bewusst zu machen. Diese didaktische Hilfe soll nun an einem Beispiel expliziert werden:

Die Gleichung  $7x + 2 = 5x$  soll nach  $x$  aufgelöst werden. Den Schülerinnen und Schülern muss dazu im Vorfeld bekannt sein, was „Auflösen“ bedeutet, also welches Ziel man bei den auszuführenden Umformungen „im Hinterkopf“ haben muss. Es muss also klar sein, dass eine Grundstrategie (Heuristik) beim Gleichungslösen darin besteht, zunächst alle Terme, die die gesuchte Variable enthalten, auf eine Seite der Gleichung und alle anderen Terme auf die andere Seite zu bringen.

Erst nach Explizierung dieses Ziels soll die Frage thematisiert werden, wie dies zu erreichen ist. Gerade in der Anfangsphase kann es hilfreich sein, die üblicherweise weggelassenen Malpunkte (z. B. zwischen Zahlfaktor und Variable) auszu-schreiben, damit die Lernenden die Multiplikation stabil erkennen.

Es bietet sich also an, die Gleichung in der folgenden Form aufzuschreiben:

$$\boxed{7 \cdot x} + \boxed{2} = \boxed{5 \cdot x}$$

Die Schülerinnen und Schüler können auf diese Art und Weise die Termstrukturen der Gleichung erkennen. Da Punkt vor Strich gilt, können die Kästchen z. B. nicht so gesetzt werden:

$$\boxed{7} \cdot \boxed{x+2} = \boxed{5 \cdot x}$$

Wenn aber nur die erste Darstellung richtig ist, kann auch nur die erste Umformungsregel in Frage kommen, da die Teilterme (dargestellt durch die Kästchen) additiv miteinander verknüpft sind. Man könnte also beispielsweise rechnen:

$$\boxed{2} = \boxed{5 \cdot x} - \boxed{7 \cdot x}$$

Es ergibt sich, wenn man die rechte Seite zusammenfasst:

$$2 = -2 \cdot x$$

Nun müssen die Kästchen neu gesetzt werden:

$$\boxed{2} = \boxed{-2} \cdot \boxed{x}$$

Die Schülerinnen und Schüler können erkennen, dass nun die zweite Umformungsregel anzuwenden ist, da die Teilterme auf der rechten Seite multiplikativ verknüpft sind. Es ergibt sich:

$$\frac{\boxed{2}}{\boxed{-2}} = x$$

Und somit:

$$-1 = x$$

Sobald eine gewisse Sicherheit im Umgang mit derartigen Gleichungen entstanden ist, kann man beginnen, die methodischen Hilfen sukzessive abzubauen. Es empfiehlt sich aber vor allem in der Anfangsphase durchaus, den Einsatz der Kästchen und der Malpunkte verbindlich einzufordern, um einen reflektierten Umgang mit den Gleichungen zu erreichen.

Was soll nun bei diesen Betrachtungen, Überlegungen und Formulierungen letztlich von den Schülerinnen und Schülern gelernt werden?

Die Lernenden sollen nach dieser „Einführung“ die Gleichungsumformungsregeln verstanden haben und in der Lage sein, sie anzuwenden.

*Verstehen* enthält hier folgende, inhaltsbezogene Kompetenzen:

- Die Herleitung der Regeln wiedergeben können.
- Die Regeln in eigenen Worten formulieren können.
- Die Regeln in verschiedenen Darstellungsformen darstellen und zwischen diesen wechseln können.
- Die Regeln an einem Beispiel demonstrieren/veranschaulichen können.

Anwenden umfasst:

- Die Anwendungsfälle der Regeln kennen und benennen können.
- Einfache Anwendungsfälle erkennen und lösen können.
- Anwendungsfälle von Nicht-Anwendungsfällen der Regeln unterscheiden können.
- Die Regeln zur Lösung von Nicht-Routineproblemen verwenden können.

### Schlussbemerkung

Der dargestellte Weg zur Einführung von Gleichungen in Klasse 7 versteht sich als eine mögliche unterrichtliche Alternative

zur allseits bekannten Waage. Die Grundidee besteht darin, Gleichungen nicht primär als Synonym für Gleichheit anzusehen, sondern sie als Instrument zur Beschreibung von Sachverhalten aus der Lebenswirklichkeit aufzufassen. Dem Ansatz liegt die Annahme zugrunde, dass durch die Abstraktion des natürlich-genetischen Denkens der Lernenden ein leichter Zugang auch zu den Gleichungsumformungsregeln erreicht wird. Sofern man sich entschließt, diesen erfolgreich erprobten Weg im Unterricht zu gehen oder auszuprobieren, ist es aus Erfahrung angeraten, die Lernenden aufzufordern, das Mathematikbuch in der Zeit der Einführung und Übung der beiden Umformungsregeln zuhause zu lassen. Ansonsten ist die Gefahr von irreführenden Parallelkonzepten sehr groß.

Viele Realschüler haben größte Schwierigkeiten bei jedweder Abstraktion und sind auch nach intensivster inhaltlicher Erarbeitung mathematischer Sachverhal-

te oftmals nicht in der Lage, die Loslösung von der konkreten Situation erfolgreich zu vollziehen. Umso wichtiger ist es deshalb, dass der Aufbau eines grundlegenden semantischen Verständnisses von Gleichungen und deren Umformungen einen ausreichend großen Raum bei der praktischen Umsetzung im Klassenzimmer erhält.

### Literatur

- Jaschke, Tobias: Vom Bild zum Term. In: Mathematik lehren, Heft 154 (2009), S. 10–11
- Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden
- Vollrath, Hans-Joachim / Weigand, Hans-Georg (2007): Algebra in der Sekundarstufe. Elsevier, München

Tobias Jaschke

Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Realschulen) Schwäbisch Gmünd  
t.jaschke@gmx.de

## „Die schöne Schülerlösung“

Im täglichen Mathematikunterricht tauchen immer wieder besonders schöne Schülerlösungen auf – oftmals gerade dann, wenn man sie nicht erwartet. Dies kann sich im Unterrichtsgespräch, in einer Zeichnung, in der Lösung einer Gleichung, in einem Lösungsansatz etc. ergeben.

Die PM möchte ein Forum bereitstellen, in dem unsere Leser besonders originelle, kreative, überraschende – eben „schöne“ Lösungen ihrer Schülerinnen und Schüler vorstellen können.

„Schön“ bezieht sich dabei insbesondere auf den mathematischen Gedankengang. Die Schönheit ergibt sich aus der Authentizität von schülerhandschriftlichen Originalen, wie sie sich beispielsweise in Schülerheften oder Lernplakaten wiederfinden lassen, oder aber auch aus Unterrichtsaufzeichnungen, die einen originellen Gedankengang dokumentieren. Zusätzlich zur Einsendung Ihrer schönen Schülerlösung haben Sie die Möglichkeit,

den unterrichtlichen Entstehungshintergrund kurz darzustellen und zu kommentieren. So können alle Leserinnen und Leser die schöne Schülerlösung in ihrem Unterrichtskontext nachvollziehen und sich mitfreuen.

Auf der nächsten Seite haben wir ein weiteres Beispiel für eine schöne Schülerlösung!

Mit diesem Forum wollen wir dazu beitragen, dass schöne Unterrichtsmathematik nicht im Klassenzimmer verbleibt, sondern weitergegeben wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen so eine außerordentliche Würdigung über den schulischen Rahmen hinaus erfahren, die sie vielleicht zu weiterem mathematischen Tun und Engagement motivieren kann.

Um dies zu unterstützen, bekommt jede Schule, aus der wir eine *Schöne Schülerlösung* veröffentlichen, einen kostenfreien PM-Jahrgang.



Wenn Sie also eine schöne Lösung einer Ihrer Schülerinnen oder Schüler einsenden wollen, dann schicken Sie bitte das Originaldokument (oder eine gute Kopie) und einen kurzen Begleittext zum unterrichtlichen Hintergrund an die Redaktion mit dem Vermerk „Die schöne Schülerlösung“.

Wir freuen uns auf Ihre Einsendungen!