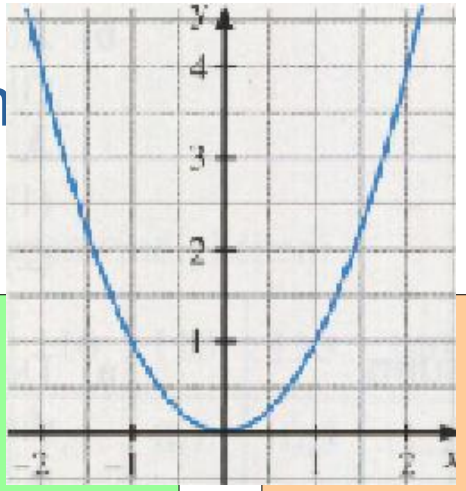
Grundlagen der Mathematikdidaktik

Sitzung 03:
Verstehen III:
Repräsentationale Flexibilität

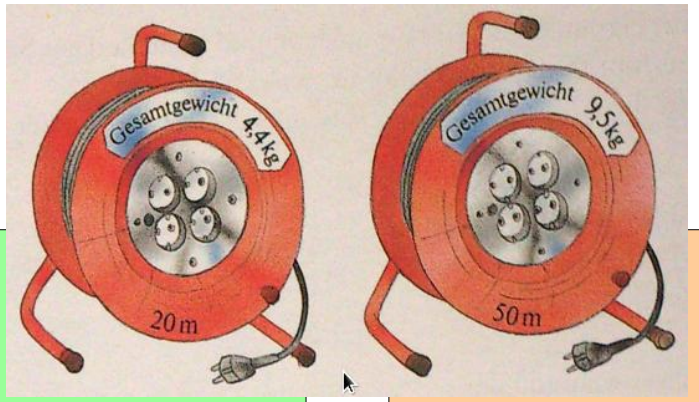
Übersicht

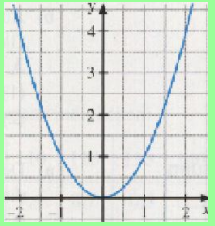
1. Abbildungen in mathematischen Lehrwerken
2. Verstehen als Zeigen repräsentationaler Flexibilität
3. Repräsentationale Flexibilität in weiteren didaktischen Modellen

Nach welchem Kriterium

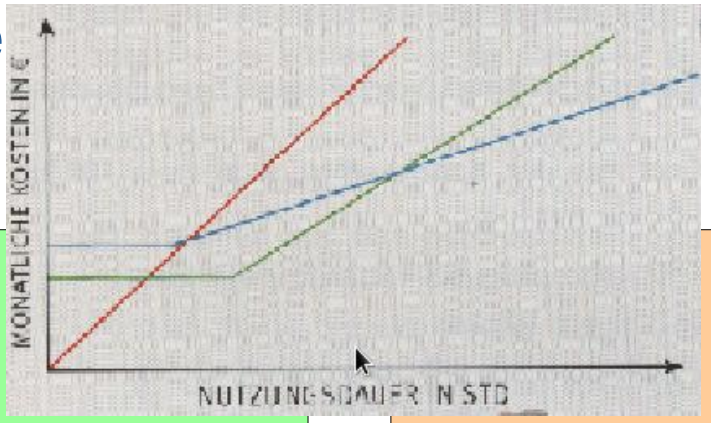


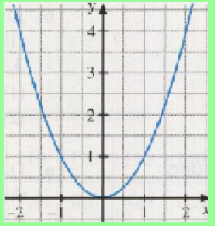
Nach welchem Krite

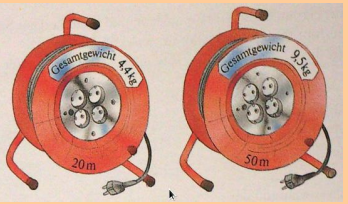




Nach welchem Krite

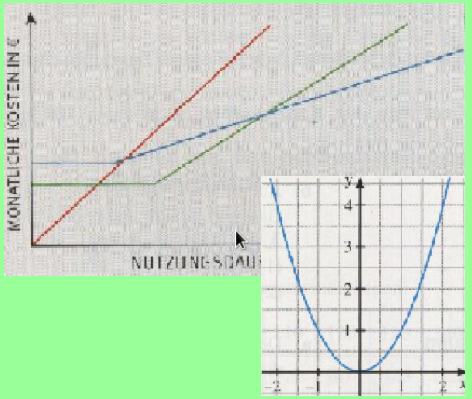


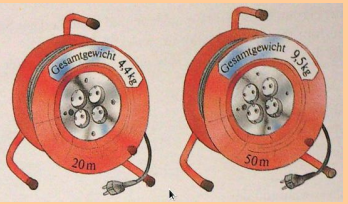




Nach welchem Kriterium sortiere ich?

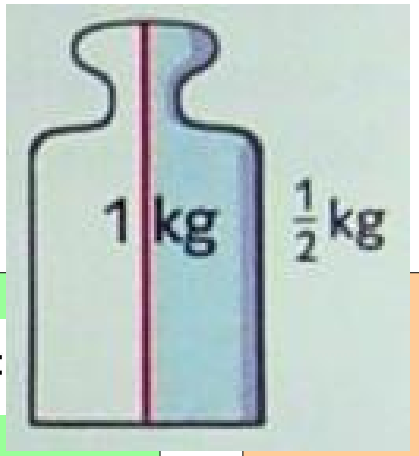
$$y = x^2$$

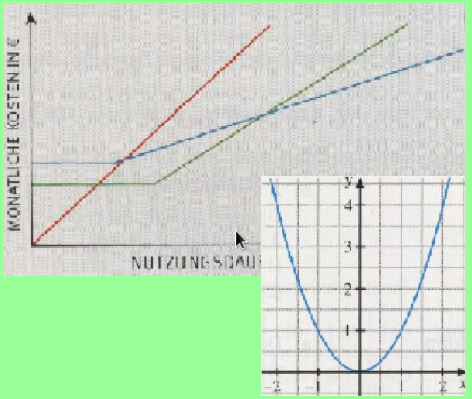


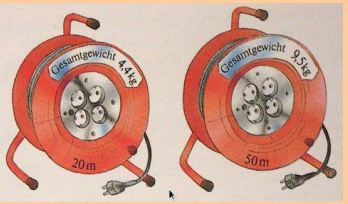


Nach welchem Kriterium

$y=$



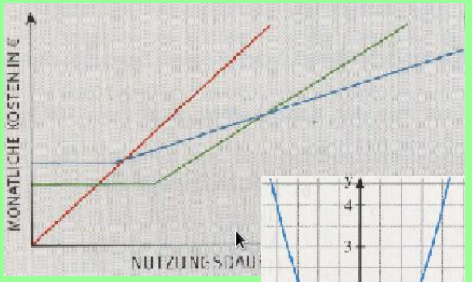


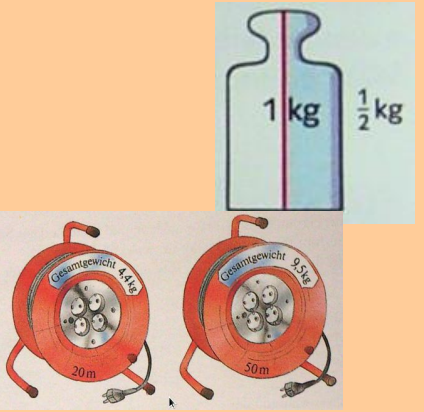


Nach welchem Krit



$$y = x^2$$



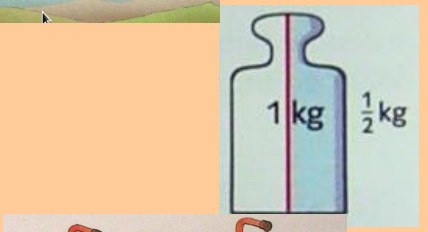


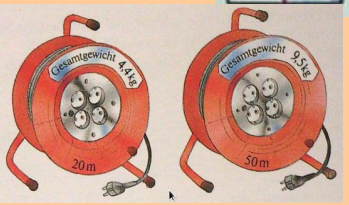
Nach welchem Krit

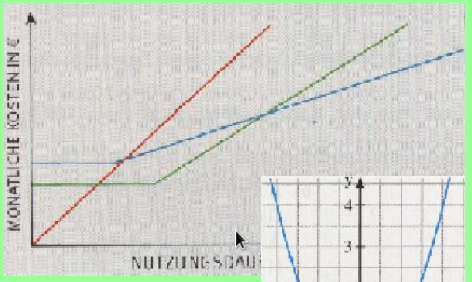
Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,30	3,60
5h	5,40	5,30	9,00
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,80	36,00
50h	55,40	32,80	90,00

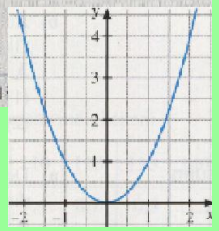
$y = x$



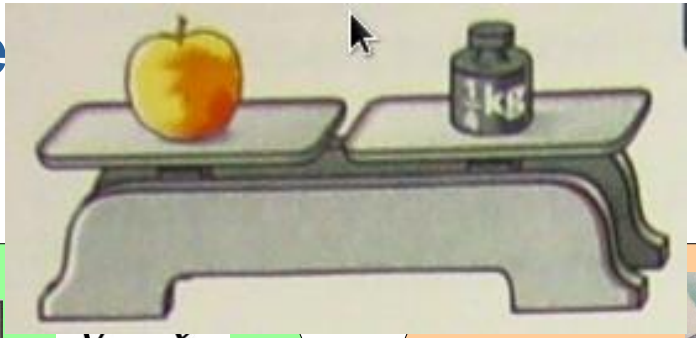






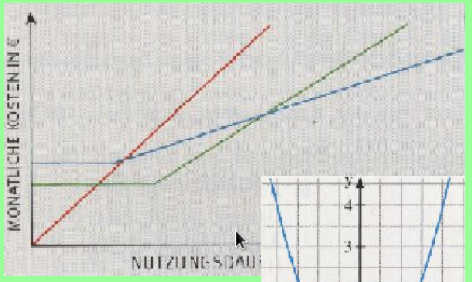


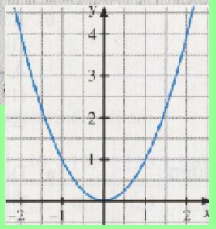
Nach welchem Krite



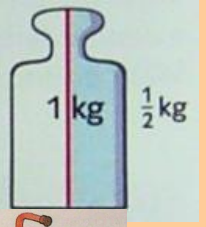
Dauer \ Provider	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,30	3,50
5h	5,40	5,30	9,00
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,80	36,00
50h	55,40	32,80	90,00

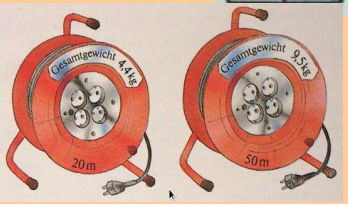
$y = x$









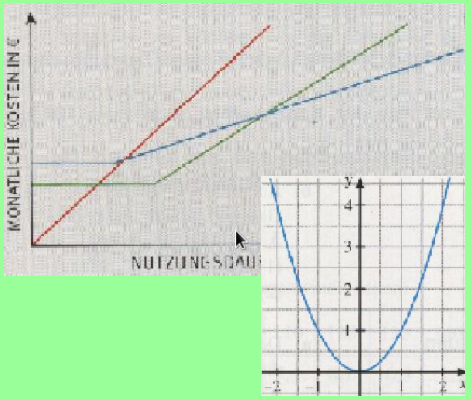


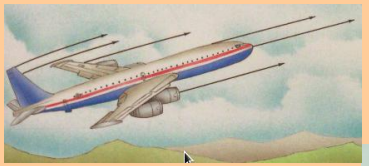
Nach welchem Kriterium sortiere ich?

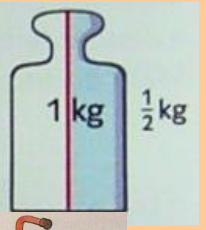
Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,30	3,50
5h	5,40	5,30	9,00
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,80	36,00
50h	55,40	32,80	90,00

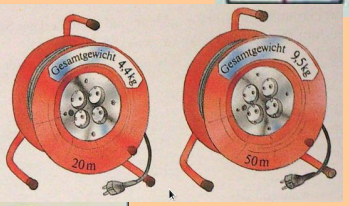
$y = x^2$

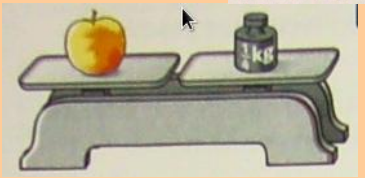
$\frac{1}{8}$









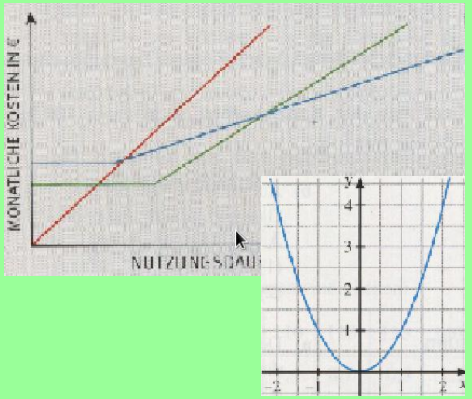


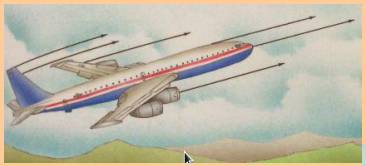
Nach welchem Kriterium sortiere ich?

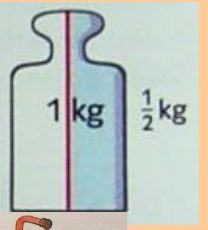
Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,30	3,50
5h	5,40	5,30	9,00
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,80	36,00
50h	55,40	32,80	90,00

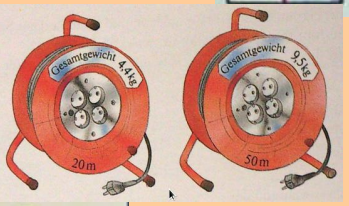
$y = x^2$

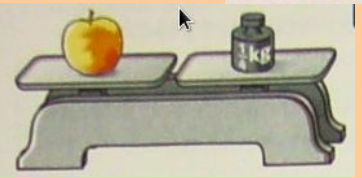
$\frac{1}{8}$



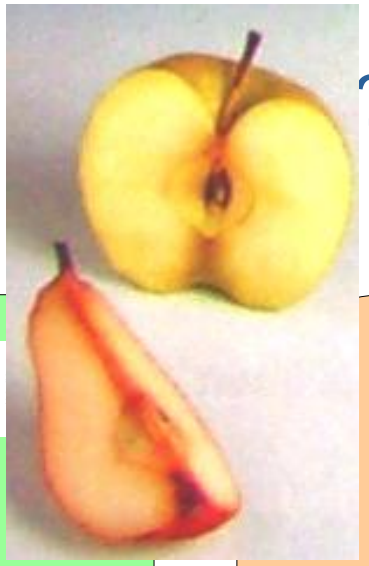








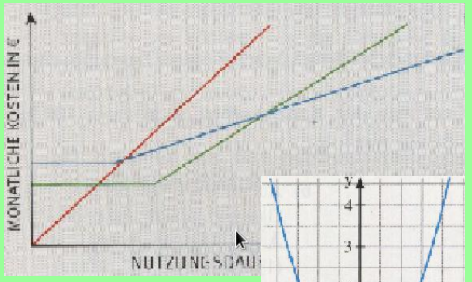
Nach welchem Kriterium ?

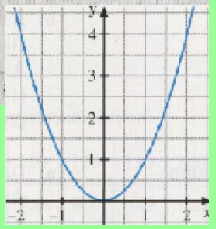


$y =$

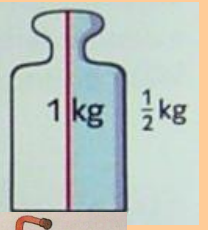
Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,30	3,50
5h	5,40	5,30	9,00
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,80	36,00
50h	55,40	32,80	90,00

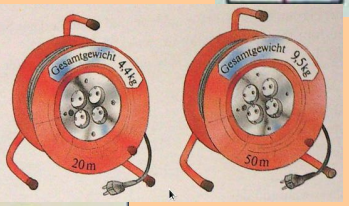
$\frac{1}{8}$

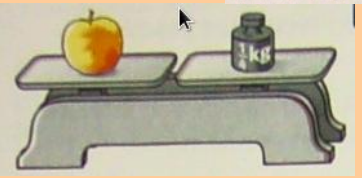












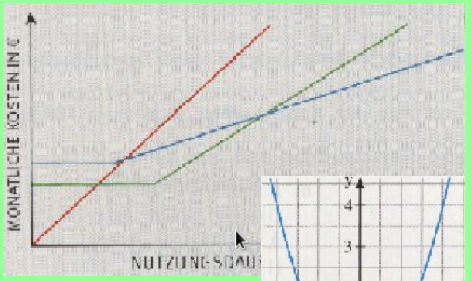
Nach welchem Kriterium sortiere ich?

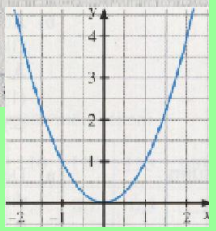
ein Achtel

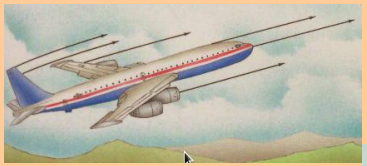
y

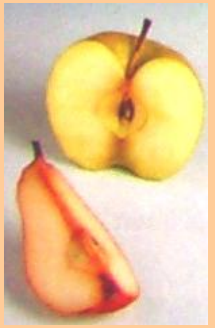
Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,30	3,50
5h	5,40	5,30	9,00
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,80	36,00
50h	55,40	32,80	90,00

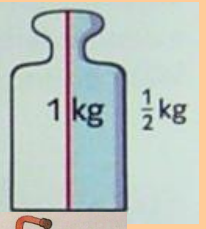
$$\frac{1}{8}$$

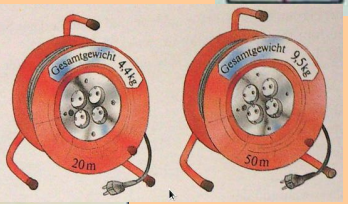


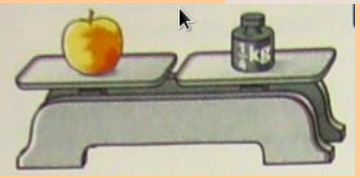




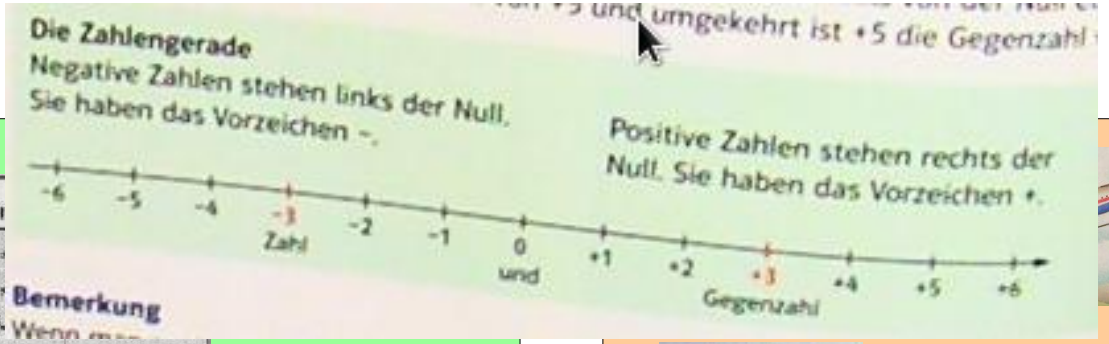


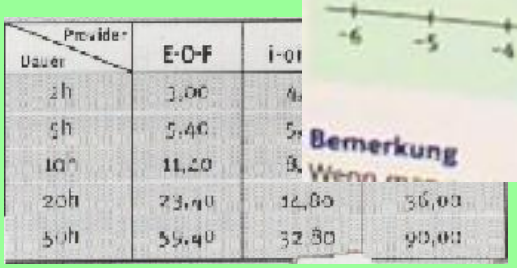






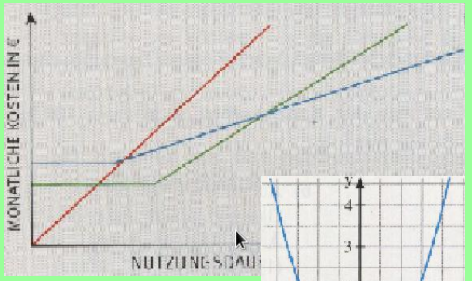
Nach welchem Kriterium sortiere ich?

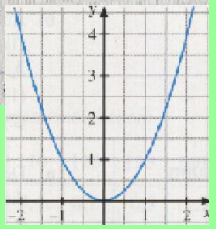




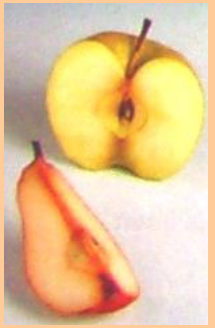
$\frac{1}{8}$

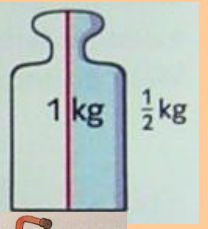
ein Achtel

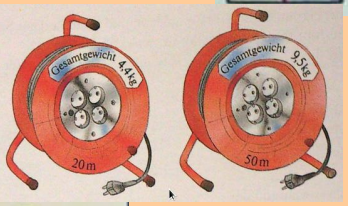


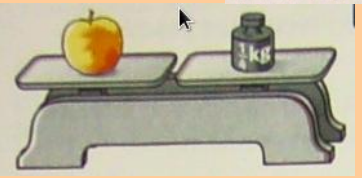












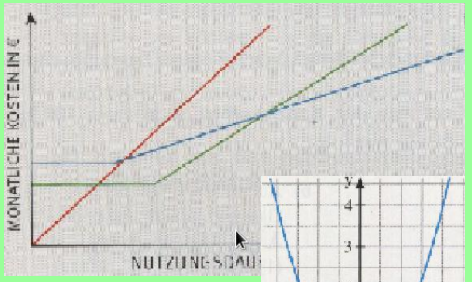
Nach welchem Kriterium sortiere ich?

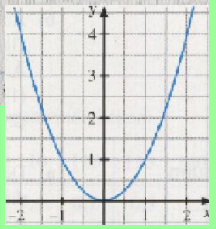


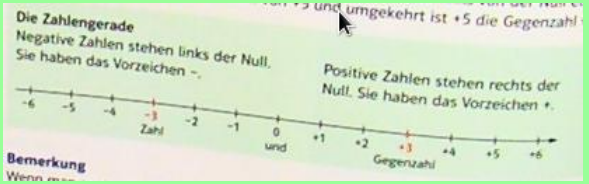
Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,30	3,45
5h	5,40	5,30	9,65
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,00	36,00
50h	55,40	32,30	90,00

$\frac{1}{8}$

ein Achtel

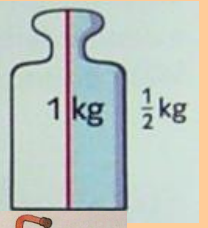


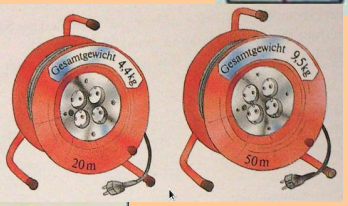


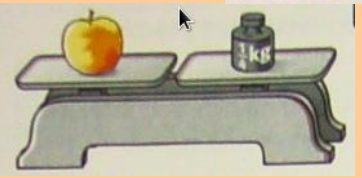












Nach welchem Kriterium

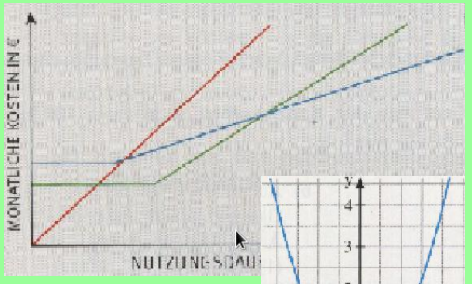


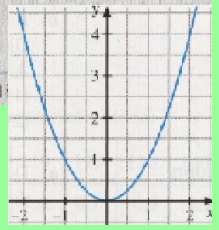
Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,20	3,60
5h	5,40	5,30	3,60
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,60	36,00
50h	55,40	32,80	90,00

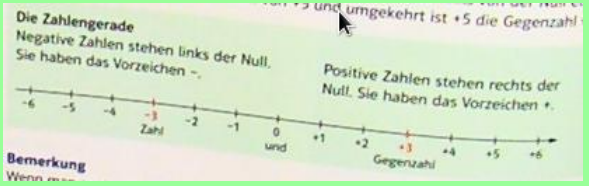
$y =$

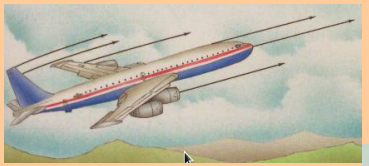
$$\frac{1}{8}$$

ein Achtel

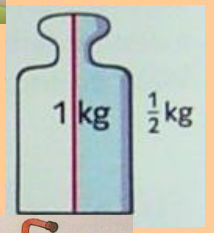


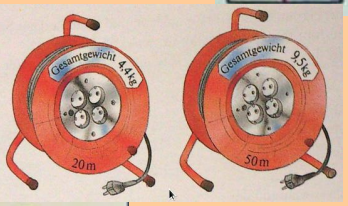


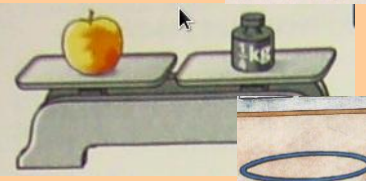














Nach welchem Kriterium sortiere ich?

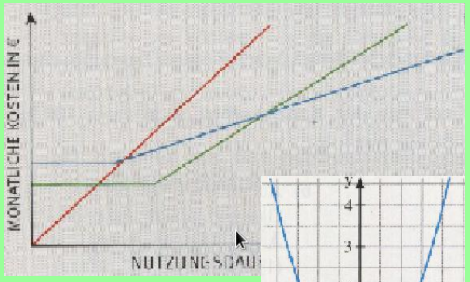
Dauer \ Provider	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,30	3,50
5h	5,40	5,30	3,50
10h	11,20	8,30	18,00
20h	23,40	12,80	36,00
50h	55,40	32,80	90,00

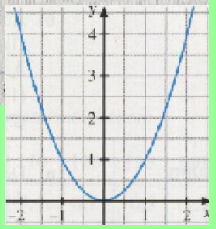
$y =$

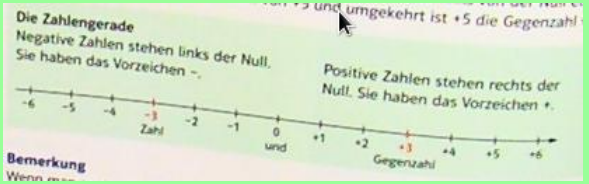
$\frac{1}{8}$

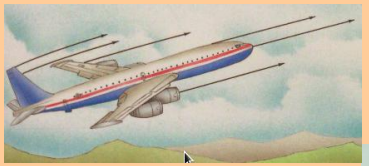
ein Achtel

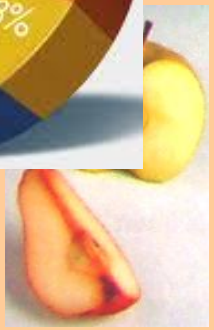


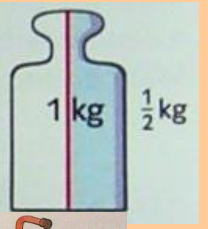


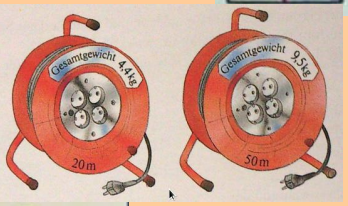


















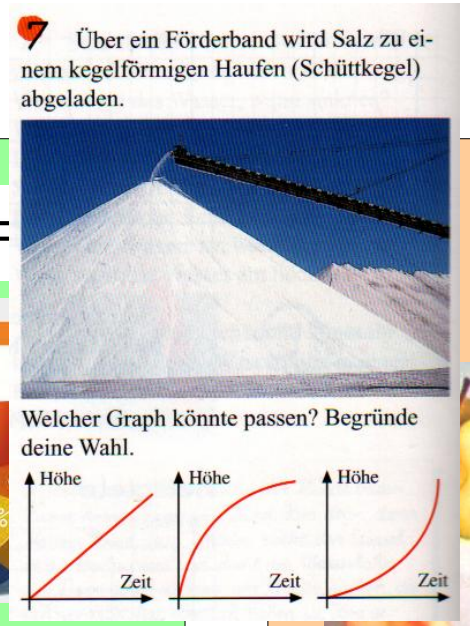
Nach welchem Kriterium sortiere ich?

Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	3,00	4,20	3,60
5h	5,40	5,80	3,9
10h	11,20	8,30	18,
20h	23,40	12,00	36,
50h	55,40	32,80	90,

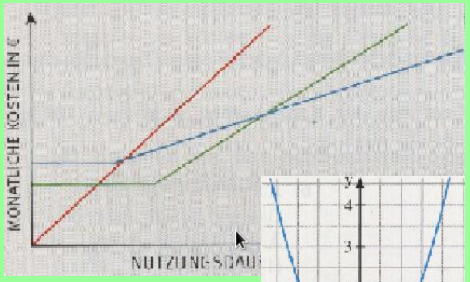
$y =$

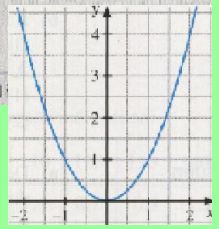
$\frac{1}{8}$

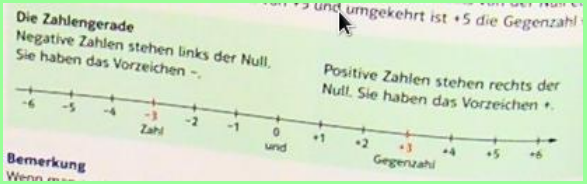
ein Achtel

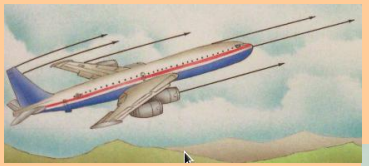


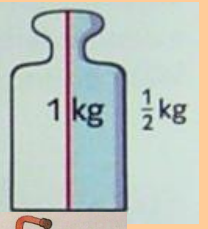


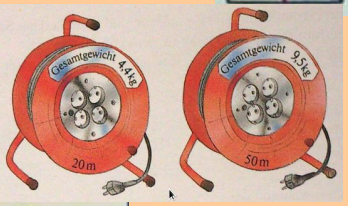


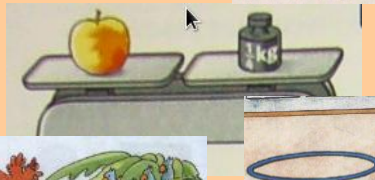
















Nach welchem Kriterium sortiere ich?

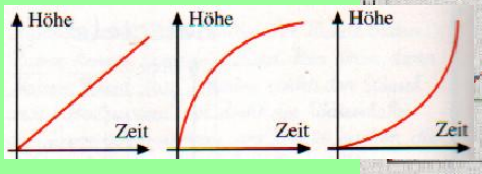
Provider / Dauer	E-O-F	i-online	INTER-CHAT
2h	1,00	4,20	3,60
5h	5,40	5,30	3,9
10h	11,20	8,30	18,
20h	23,40	12,60	36,
50h	55,40	32,80	90,

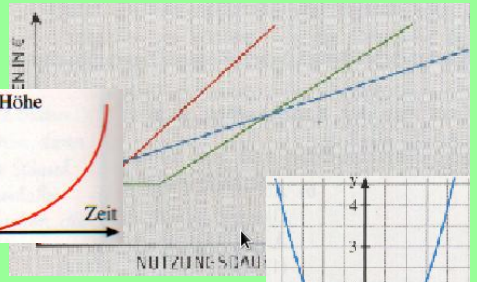
$y = x^2$

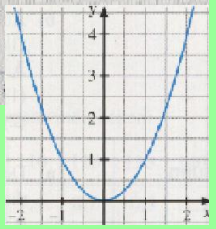


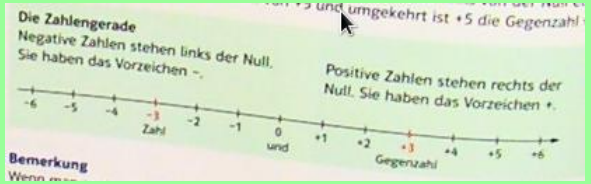
$\frac{1}{8}$

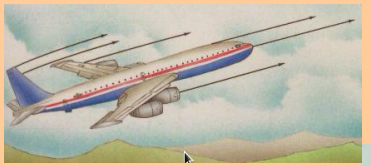
ein Achtel



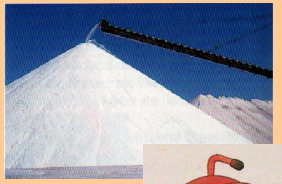


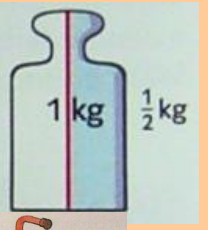




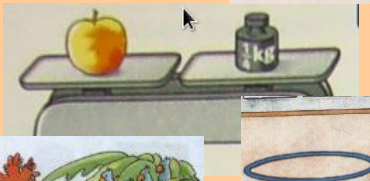














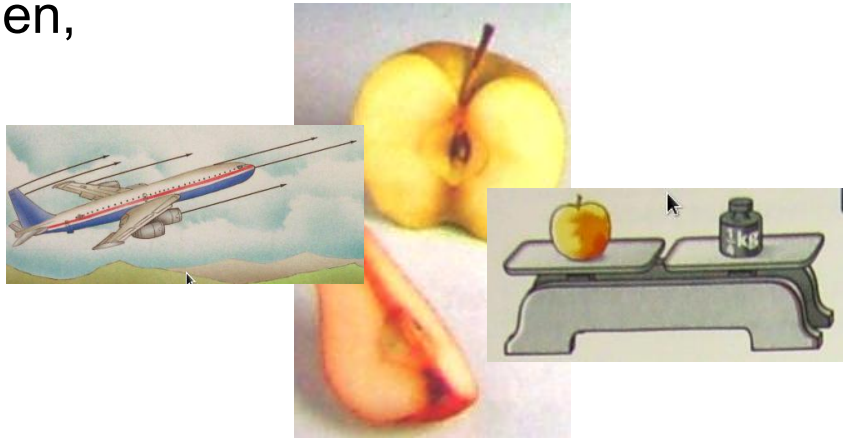


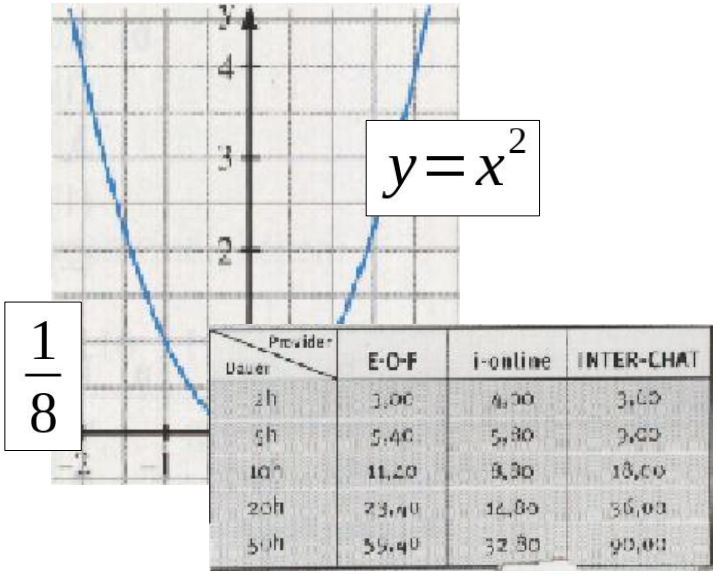
Bilder

Schnotz 1995: Texte vs. bildhafte Informationen,

unter letzteren:

- realistische Bilder:
  Zeichnungen, Gemälde, Fotos
- Analogiebilder:
  bildhafte Darstellungen von
  Analogien von Gegenständen
- logische Bilder:
  keine Analogie zum dargestellten
  Gegenstand bzw. Sachverhalt erkennbar

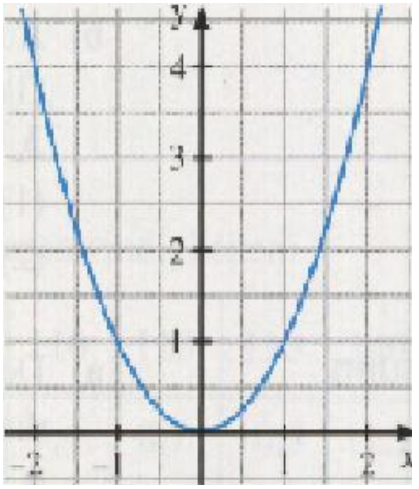




Bilder

Schnotz 1995:

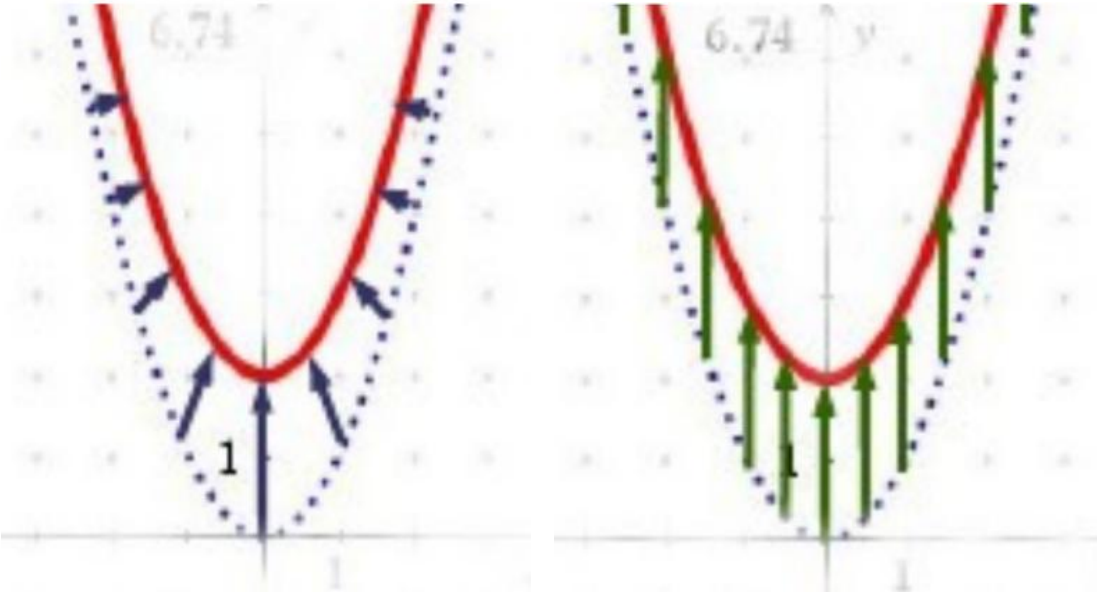
- Texte vs. bildhafte Informationen,
  unter letzteren:
  - realistische Bilder:
    Zeichnungen, Gemälde, Fotos
  - Analogiebilder:
    bildhafte Darstellungen von
    Analogien von Gegenständen
  - logische Bilder:
    keine Analogie zum dargestellten
    Gegenstand bzw. Sachverhalt erkennbar

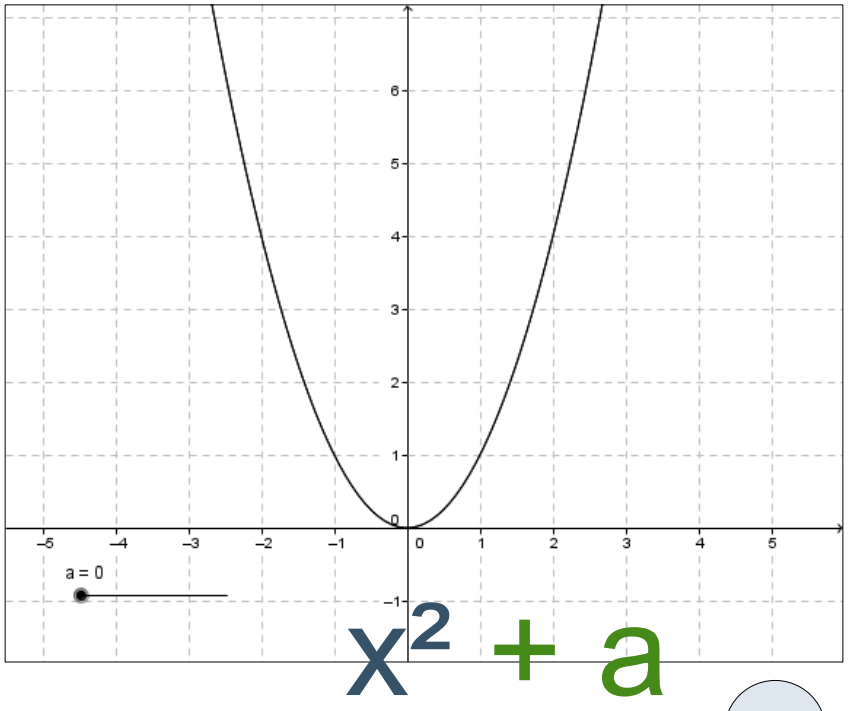


Bilder

Schnotz 1995:

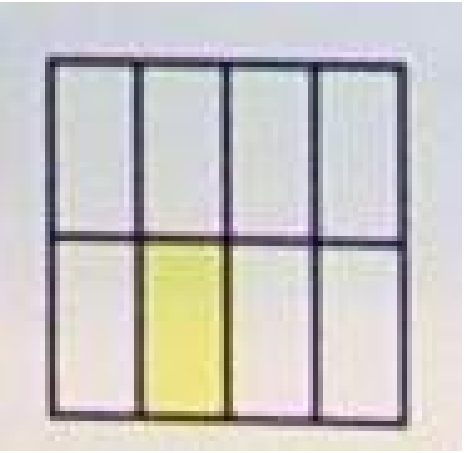
- Texte vs. bildhafte Informationen, unter letzteren:
  - realistische Bilder: Zeichnungen, Gemälde, Fotos
  - Analogiebilder: bildhafte Darstellungen von Analogien von Gegenständen
  - logische Bilder: keine Analogie zum dargestellten Gegenstand bzw. Sachverhalt erkennbar





Wohin aber mit...

Schnotz 1995:



- Texte vs. bildhafte Informationen,
  unter letzteren:
  - realistische Bilder:
    Zeichnungen, Gemälde, Fotos
  - Analogiebilder:
    bildhafte Darstellungen von
    Analogien von Gegenständen
  - logische Bilder:
    keine Analogie zum dargestellten
    Gegenstand bzw. Sachverhalt erkennbar

Übersicht

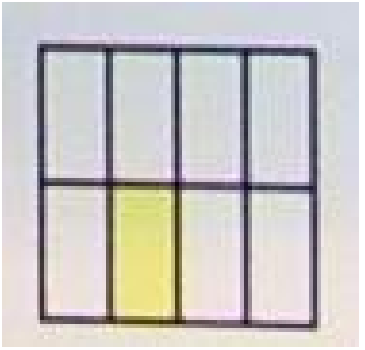
1. Abbildungen in mathematischen Lehrwerken
2. Verstehen als Zeigen repräsentationaler Flexibilität
3. Repräsentationale Flexibilität in weiteren didaktischen Modellen

Verstehen als Zeigen repräsentationaler F

Wo unter diesen Darstellungen ist „die“ Zahl?

$$12,5\% \qquad 0,125$$

$$\frac{1}{8} \qquad \frac{125}{1000} \qquad \frac{2}{16}$$



Verstehen als Zeigen repräsentationaler Fl

Wo unter diesen Darstellungen ist „die“ Funktion?

Venn-Diagramm

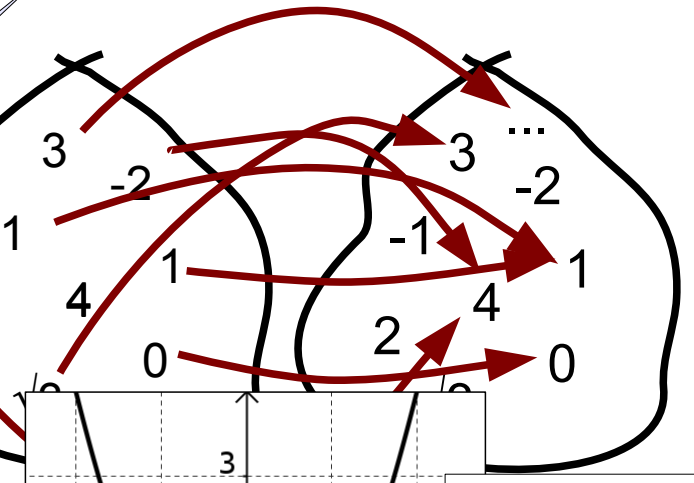
Numerisch: Werte-tabelle

Geometrisch: Graph

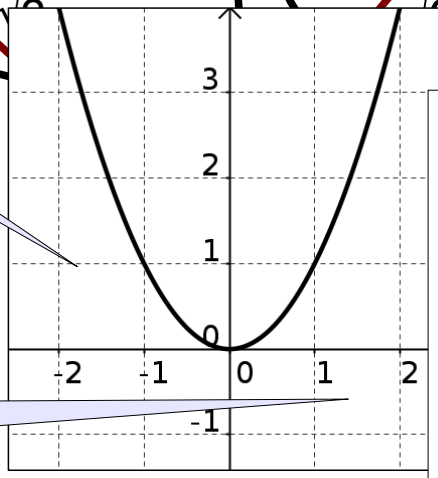
Algebraisch: Term bzw. Gleichung

Verbal: Beschreibung in Worten

f : IR →
f(x) =



x	y
-2	4
0	0
1	1
√3	3
2	4



Jeder Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet

Verstehen als Zeigen repräsentationaler Flexibilität

Venn-Diagramm

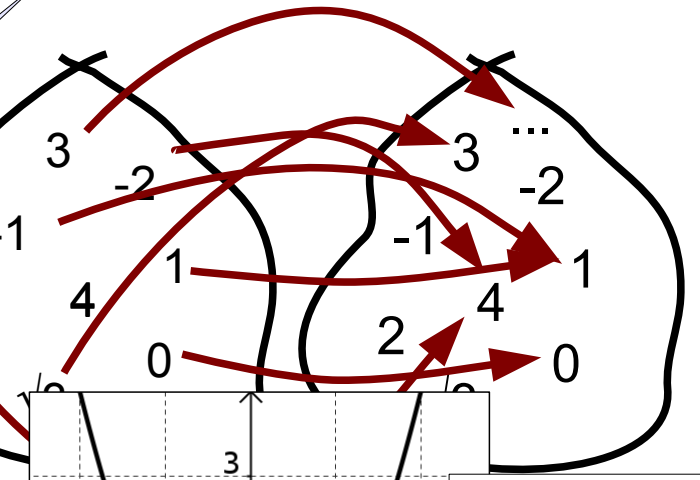
Numerisch: Werte-tabelle

Geometrisch: Graph

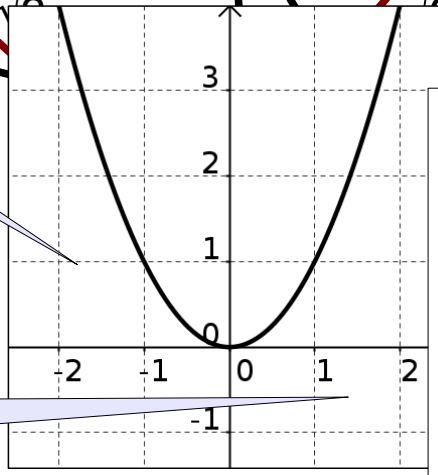
Algebraisch: Term bzw. Gleichung

Verbal: Beschreibung in Worten

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$f(x) = x^2$

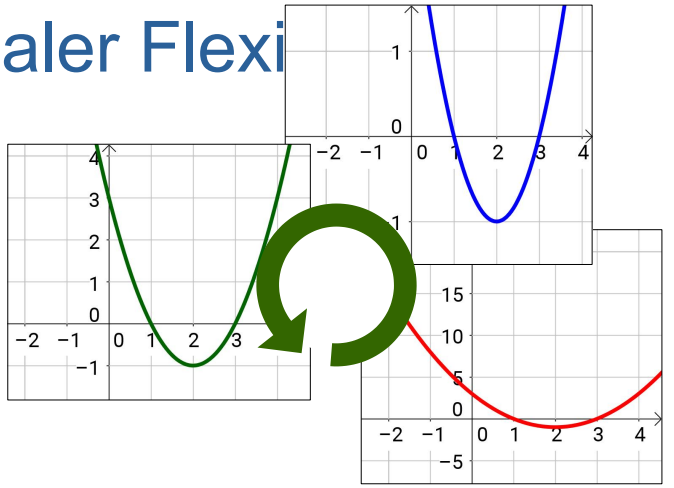


x	y
-2	4
0	0
1	1
√3	3
2	4



Jeder Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet

Verstehen als Zeigen repräsentationaler Flexi



Duval 1999:

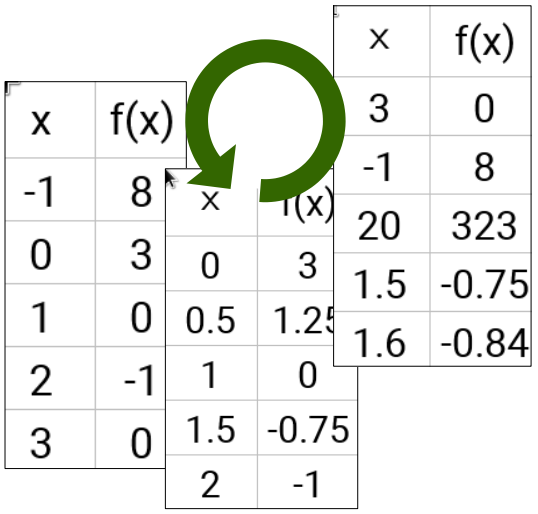
Drei Anforderungen an das Lernen von Mathematik

- Vergleichen ähnlicher Repräsentationen gleicher Form (algebraisch, numerisch, geometrisch)

$$f(x) = (x-2)^2-1$$

$$f(x) = (x-3)(x-1)$$

$$f(x) = x^2-4x+3$$



x	f(x)
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0

x	f(x)
0	3
0.5	1.25
1	0
1.5	-0.75
2	-1

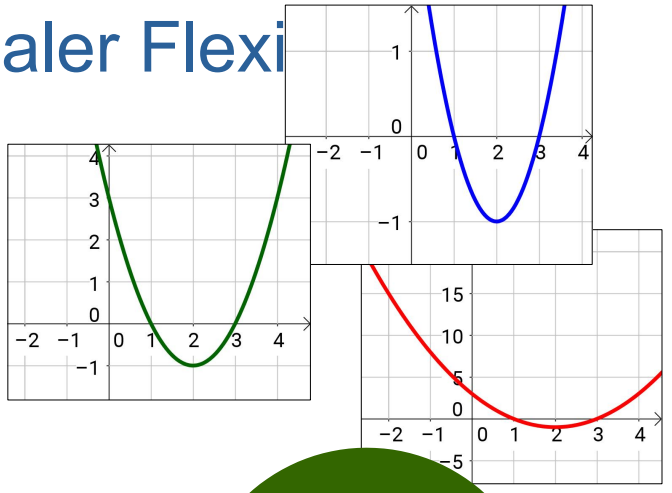
x	f(x)
3	0
-1	8
20	323
1.5	-0.75
1.6	-0.84

Verstehen als Zeigen repräsentationaler Flexi

Duval 1999:

Drei Anforderungen an das Lernen von Mathematik

- Vergleichen ähnlicher Repräsentationen gleicher Form (algebraisch, numerisch, geometrisch)
- kohärentes Wechseln zwischen Repräsentationsformen
- Erfassen der spezifischen „Syntax“ in jeder Repräsentationsform



$f(x) = (x-2)^2-1$

$f(x) = (x-3)(x-2)$

$f(x) = x^2-5x+6$

x	f(x)
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0

x	f(x)
0	3
0.5	1.25
1	0
1.5	-0.75
2	-1

x	f(x)
3	0
-1	8
20	323
1.5	-0.75
1.6	-0.84

Verstehen als Zeigen repräsentationaler Flexibilität

"From a didactical point of view,
only students who can perform register change
do not confuse a mathematical object
with its representation." (Duval 1999: 318)

Verstehen als Zeigen repräsentationaler Flexibilität

1

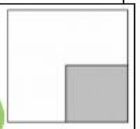
Entscheiden Sie auf Basis der folgenden Definition:
Ein Viereck mit genau zwei Symmetrieachsen heiße Zweiachser.
Welche der folgenden Figuren sind Zweiachser?

A  B 

C  D 

2

Gib den Anteil des markierten Bereichs am ganzen Quadrat an:



A $\frac{1}{4}$ B 0,5 C 25% D 0,4

3

Wie viele Lösungen hat diese Gleichung?

$-x^2 - 121 = x - 1$

4

Welche Geschichte passt am besten zum Graphen?



A Armin steigt einen Berg hinauf,
geht eine Zeitlang ebenerdig weiter,
steigt zur Bergspitze auf,
von wo er schließlich in das Tal zurückkehrt.

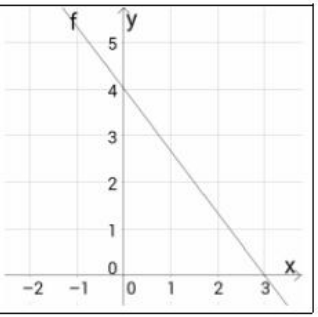
B Boris rollt einen Berg hinab,
rollt eine Zeitlang ohne zu bremsen weiter,
rollt einen weiteren Abhang herunter und,
unten angekommen, rollt er bis zum Stillstand aus

C Chris geht aus dem Haus zur Straße,
bleibt eine Zeitlang an der Ampel stehen,
überquert die Straße,
wendet dann und kehrt nach Hause zurück.

5

Welche Wertepaare gehören zur abgebildeten Funktion f?

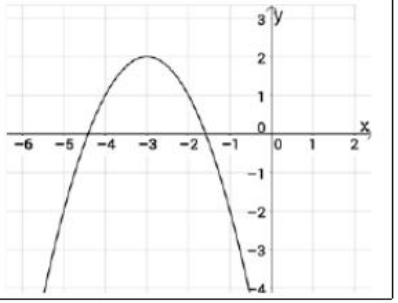
(A) (4,0)
(B) (3,0)
(C) (4,3)
(D) (3,4)



6

Gegeben ist der Graph einer Funktion f.
Welche Gleichung passt zum Funktionsgraphen?

(A) $f(x)= (-x+3)^2 + 2$
(B) $f(x)= -(x-3)^2 + 2$
(C) $f(x)= -(x+3)^2 + 2$
(D) $f(x)= (x+3)^2 + 2$



7

Das Dreifache der Summe aus meiner gedachten Zahl x und 4 ist so groß wie das Quadrat meiner gedachten Zahl. Welche Gleichung beschreibt diesen Zusammenhang?

A $3 \cdot x + 4 = x^2$ B $3 \cdot (x+4) = x^2$
C $3 + 4 \cdot x = x^2$ D $3 \cdot 4 + x = x^2$

Übersicht

1. Abbildungen in mathematischen Lehrwerken
2. Verstehen als Zeigen repräsentationaler Flexibilität
3. Repräsentationale Flexibilität in weiteren didaktischen Modellen

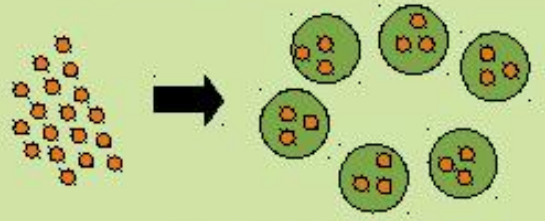
Repräsentationale Flexibilität : Grundvorstellungen

Grundvorstellungen als sinngebende Vorstellungen

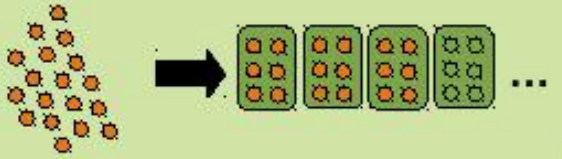
- **mentale Modelle** für mathematische Begriffe (Freudenthal 1983)
  vom Hofe (2003):
- ein mathematischer Begriff wird in der Regel durch **mehrere, vernetzte Grundvorstellungen** erfasst (auch: „Grundverständnis“)
- im Laufe der Schulzeit **wechselt** der Charakter der Grundvorstellungen: zuerst assoziiert mit gegenständlichen **Handlungserfahrungen**, später mathematische **Darstellungsmittel** (-> Funktionsbegriff)
- keine feste Sammlung, sondern ein **immer wieder erweitertes System** mentaler Modelle

zwei „Grundvorstellungen" des Dividierens:

Verteilen:
18 Murmeln an 6 Kinder verteilen



Aufteilen:
18 Murmeln in 6er Päckchen aufteilen

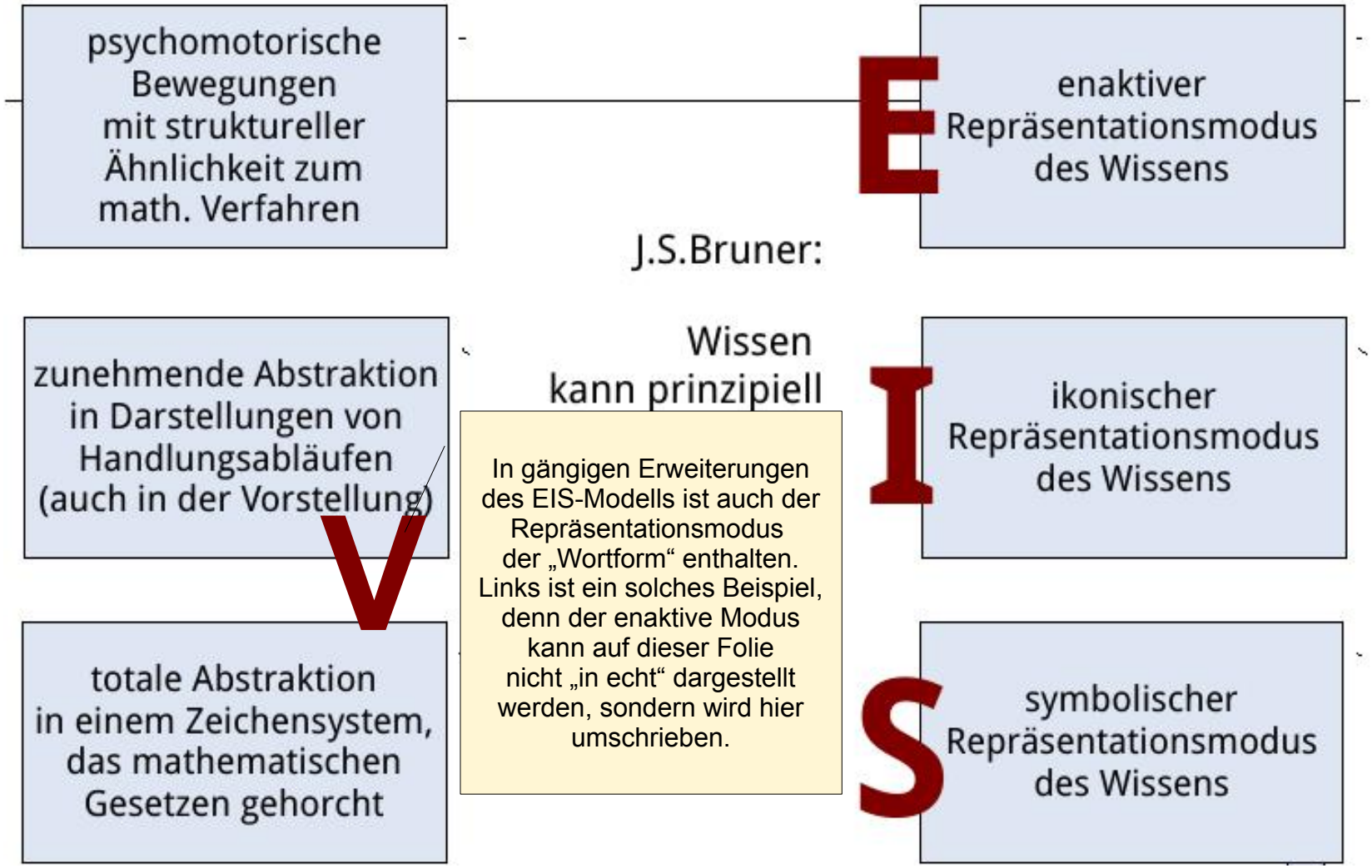


Repräsentationale Flexibilität : Grundvorstellungen



aus: Schipper: Übungen zur Präventation von Rechenstörungen.

Repräsentationale Flexibilität : EISV



Achtung Verwechslungsgefahr!

Schnotzsche Formen bildhafter Informationen	*Brunersche Repräsentations-modi von Wissen*	*Duvalsche Repräsentations-formen mathematischen Wissens*
	enaktiv	
Analogiebilder	*ikonisch*	
logische Bilder	*symbolisch*	*numerisch* *geometrisch* *algebraisch*
(Text)		*(verbal)*

Repräsentationale Flexibilität : Erweiterte operationale Flex.

- Hans Aebli (1985):

  Ein mathematisches Verfahren zu beherrschen
  geht weit über die Fertigkeit hinaus,
  die einzelnen Prozedurschritte nachzumachen.

  Zu beherrschen heißt, das Verfahren in unterschiedlichen Situationen anwenden zu können, es der jeweiligen Situation anzupassen, es zu erweitern, es neu strukturieren zu können

  Hierzu braucht es einen abstrakteren Zugang zum Verfahren,
  das dann gelingt, wenn man es von der Lernsituation trennt.

  Zum Beispiel durch Repräsentationswechsel:

  Man beschreibt die Situation in eigenen Worten,
  man skizziert sie, man veranschaulicht sie, man formalisiert sie.

was Sie können sollten...

- begründen können, dass Repräsentationen mathematischer Gegenstände „logische Bilder“ im Sinne Schnotz (1995) sind
- unter Bezug auf Duval (1999) begründen können, dass repräsentationale Flexibilität ein Ausdruck mathematischen Verstehens ist
- zwischen den Begriffen „Repräsentationsform“ und „Repräsentation“ unterscheiden können
- die drei gängigen innermathematischen Darstellungsformen von Funktionalen Zusammenhängen benennen und identifizieren können
- die Repräsentationale Flexibilität in den Modellen „Grundvorstellungen“, „EIS-Prinzip“ und „operative Flexibilität“ identifizieren können