Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften
Fach Mathematik

Prof. Dr. Guido Pinkernell

Mathematikdidaktische Grundlagen und Einführung in die Didaktik

# Übung 02



## Verstehen:
## Operatives Denken

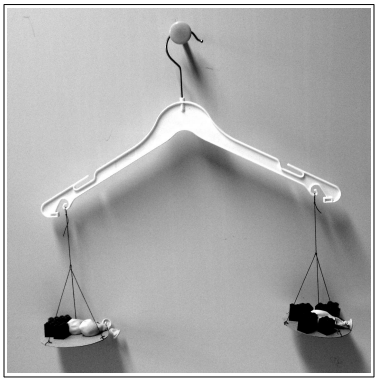
*Aufgabe 0 ist für den Übungstermin vorzubereiten.*

*Ziel der Aufgabe 1 ist es, das Konstrukt „Grundvorstellungen“ mit dem EIS-Prinzip zu verknüpfen und dabei eine weitere Unterrichtsidee im Zusammenhang mit Brüchen kennenzulernen.*

*Ziel der Aufgabe 2 ist es, die Strukturanalogie von Handlung und mathematischem Verfahren am Beispiel des Gleichungslösens zu reflektieren.*

*Ziel der Aufgabe 3 ist es, das Operative Üben in zweierlei Gestalt kennenzulernen: Einmal als Aufgabenvariation (durch den Aufgabensteller), einmal als Rechenstrategie (in Anwendung des Aufgabenbearbeiters)*

**Aufgabe 0** (vorbereitet mitbringen)



Bauen Sie eine Balkenwaage und besorgen Sie sich geeignete Gewichte:

0.1 Für die Balkenwaage brauchen Sie

einen Kleiderbügel und zwei durchsichtige Mülltüten mit Henkel und etwa 10 Liter Fassungsvermögen

Die Waage bauen Sie wie abgebildet zusammen, anstelle der gezeigten beiden mit Bändern angehängten Bierdeckel nehmen Sie die beiden durchsichtigen Mülltüten.

0.2 Für die Gewichte brauchen Sie

| | | |
|---|---|---|
| 5 rote leere Luftballons | 15 hinsichtlich Gewicht (mind. 5g) und Aussehen gleiche Gegenstände, z. B. Steckwürfel, Duplosteine, Schraubenmuttern, … (die „Einheiten“) | eine Packung billigen Milchreis |
| 4 grüne leere Luftballons | | |
| 3 blaue leere Luftballons | | einen Trichter |

Jeden der 5 roten Luftballons füllen Sie mithilfe des Trichters mit soviel (ungekochtem) Milchreis ab, dass er genauso schwer ist wie 1 Gewichtseinheit. Jeden der 4 grünen Luftballons füllen Sie so ab, dass er halb schwer ist wie 1 Gewichtseinheit, und jeder der 3 blauen Luftballons ist so gefüllt, dass er doppelt so schwer ist wie 1 Gewichtseinheit.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften
Fach Mathematik

Prof. Dr. Guido Pinkernell

Pädagogische Hochschule HEIDELBERG University of Education

Mathematikdidaktische Grundlagen und Einführung in die Didaktik

**Übung 02**



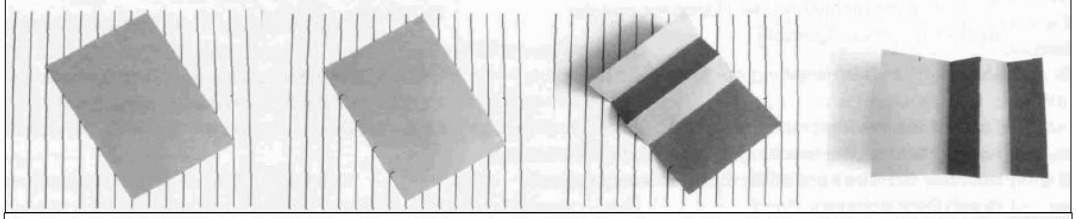
**Aufgabe 1** Grundvorstellungen handelnd aufbauen

Wartha (2011)[1] konkretisiert anhand der nachfolgenden Unterrichtsidee zum Bruchbegriff, wie er sich den Aufbau von Grundvorstellungen auf Basis von Handlungserfahrungen vorstellt. Er schreibt dazu:

> „Der Aufbau von Grundvorstellungen kann unterstützt werden, wenn auf beiden Darstellungsebenen parallel operiert wird und sprachlich sowohl die symbolische als auch die ikonische (bzw. handelnde) Ebene beschrieben wird. Diese Darstellungen, Handlungen und Bilder werden zunächst konkret, im Verlaufe des Lernprozesses aber zunehmend im Kopf durchgeführt. Dieser Prozess des Verinnerlichens von Darstellungen wird gefördert, wenn die Lernenden diese von Beginn an versprachlichen." (Wartha 2011, 12)

**Falten eines Blattes in 5 Teile**

Für die Operation $\xrightarrow{:5}$ kann ein Linienblatt mit äquidistanten Linien verwendet werden. Das zu faltende Blatt wird so angelegt, dass 5 Flächen entstehen und die Grenzen markiert werden können (dass hierbei *sechs* Striche gezählt oder *vier* Linien eingezeichnet werden müssen, ist extra zu thematisieren). Nach der Markierung (evtl. auf beiden Seiten) kann das Blatt gefaltet werden (vgl. Winter, 1999).



**Idee 1 Vergröbern und Verfeinern der Einteilung**

**Material:** Einige rechteckige Blätter (DIN-A6) und ein Stift.

1. **Falte und färbe:**
   Was fällt dir bei den Brüchen $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ auf?
   Was ist gleich, was ist verschieden?

2. **Sage mir, wie ich vorgehen soll:**
   Was muss ich mit Falten und Färben von Papier machen, um der Klasse zu zeigen, dass $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ gilt?

3. **Beantworte durch Nachdenken folgende Fragen (Gedankenexperiment):**
   a) Ich habe $\frac{3}{5}$ am Papier gefaltet und gefärbt. Was kann ich tun, um eine Zwanzigstel-Einteilung zu bekommen? Welcher Bruch ist das dann?
   b) Ich habe $\frac{2}{3}$ gefaltet und gefärbt. Kann ich eine Fünftel- (Sechstel-/Zehntel-) Einteilung bekommen? Wie kann ich vorgehen? Warum gelingt das nicht?
   c) Ich habe $\frac{24}{36}$. Immer aus zwei (drei, vier …) Einteilungen mache ich nun eine große. Wie viele Teile sind gefärbt, wie viele sind es insgesamt? Wie heißt der Bruch?
   d) Ich habe $\frac{3}{7}$. Welche Einteilungen kann ich bekommen, welche nicht? Wie heißen die Brüche?

4. **Überlege:**
   Folgende Brüche sollen eine Hundertstel-Unterteilung bekommen. Bei welchen gelingt das? Wie heißen die verfeinerten Brüche?

   $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$,
   $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{20}$

Führen Sie die angegebenen Arbeitsanweisungen durch. Überlegen Sie anschließend:

1 Wartha, S. (2011). Handeln und Verstehen. *mathematik lehren*, (166), 8–14.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften
Fach Mathematik

Prof. Dr. Guido Pinkernell

Pädagogische Hochschule HEIDELBERG University of Education

Mathematikdidaktische Grundlagen und Einführung in die Didaktik

**Übung 02**



1.1 Man könnte das eingangs beschriebene Konzept von Wartha als Anknüpfung an das E-I-S-Prinzip von Bruner verstehen. Betrachten Sie aber seine Beschreibung wie auch die Arbeitsaufträge genau: Wie viele (und welche) Repräsentationsformen des zu vermittelnden Wissens werden hier deutlich?

1.2 Laut Überschrift geht es hier um das „Vergröbern und Verfeinern von Einteilungen." Eigentlich geht es um ein mathematisches Verfahren im Zusammenhang mit der Bruchrechnung. Klären Sie unter Bezug auf die entsprechende Grundvorstellung, um welches Verfahren es sich hier handelt. Inwieweit gewährleistet dies die geforderte „Strukturgleichheit" zwischen dem enaktiven Zugang und dem mathematischen Verfahren?

1.3 Verwenden Sie die Idee des Rechteckfaltens ebenfalls, um die Multiplikation mit Brüchen einzuführen. Wiederholen Sie hierzu kurz die verschiedenen Grundvorstellungen im Zusammenhang mit der Bruchrechnung (siehe Sitzung 01). Welche Grundvorstellung bietet sich insbesondere an? Wie würden Sie die einzelnen Arbeitsaufträge in Analogie zu Warthas Ansatz formulieren?

1.4 Versuchen Sie mittels dieser Idee auch eine Veranschaulichung der Rechnung $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Bewerten Sie die Eignung des Materials diesbezüglich.

**Aufgabe 2**

2.1 Stellen Sie mit Ihrer Waage die folgenden Gleichungen nach und lösen Sie sie „enaktiv". Protokollieren Sie Ihre Wägehandlungen auf einem Papier, auf dem links die algebraische Umformung zu sehen ist und rechts die Waage in ihrer analogen Situation dargestellt ist.

Sie können statt der Kleiderbügelwaage auch diese interaktive Waage im Netz verwenden:

https://vam.dzlm.de/vams/beta/Waage-2023-07-02.html

Mit „Gleichung festlegen" und den Pfeiltasten links und rechts können Sie die Gleichung eingeben. Und mit „Gleichung lösen" und den Pfeiltasten links und rechts können Sie Gewichte entfernen oder hinzufügen.

(a) $x + 3 = 2x + 1$

(b) $4x + 5 = x + 8$

(c) $3x + 2 = x + 3$

(d) $2x + 3 = 1$

(e) $2x + 1 = 4x - 3$

Welche Gleichungen lassen sich im Waagemodell darstellen, welche nicht?
Welche Äquivalenzumformungen können Sie enaktiv durchführen? Welche nicht?

2.2 Überlegen Sie:

(a) Worin besteht die „strukturelle Ähnlichkeit" zwischen dem enaktiven Lösen von Gleichungen mit dem Waagemodell und dem symbolischen Lösen von Gleichungen in algebraischer Darstellung?

(b) Jemand erklärt die Lösungsidee beim Lösen von Gleichungen mit den Worten: „Alle linearen Terme (also x-Terme) werden auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht, alle




absoluten Terme (also Terme ohne x) werden auf die andere Seite gebracht“: Begründen Sie mit Verweis auf (a), warum dies eine falsche Vorstellung von Äquivalenzumformungen hervorrufen könnte.

(c) Warum aber führt diese falsche Vorstellung im abgebildeten Fall zum Erfolg? Wie muss eine lineare Gleichung aussehen, dass sie auch vermittels der Strategie „Sortieren gleichartiger Terme auf je eine Seite“ gelöst werden kann?

(d) Betrachten Sie Ihre Handlungen beim Subtrahieren und Dividieren „auf beiden Seiten“ etwas genauer: Welche Gemeinsamkeiten weisen beide auf? Können Sie einen Unterschied feststellen? Bewerten Sie die Ähnlichkeit beider Handlungen für die enaktive Einführung von Äquivalenzumformungen mit dem Waagemodell.

2.3 Auf Seite 92 im Lehrwerk Schnittpunkt 3 (Jahrgangsstufe 7, Klett) wird das Waagemodell zur Lösung von Gleichungen genutzt. Analysieren Sie, inwieweit auf dieser Lehrbuchseite alle drei Brunerschen Repräsentationsmodi „enaktiv“, „ikonisch“ und „symbolisch“ berücksichtigt werden.

**Aufgabe 3** Operatives Üben

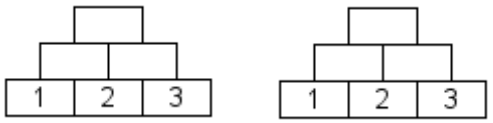
3.1 Aufgabenvariation

(a) Formulieren Sie zur Grundaufgabe $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} =$ passende Umkehr-, Nachbar- und Darstellungswechselaufgaben.

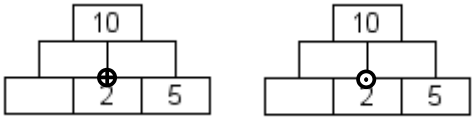
(b) In einer Zahlenmauer ist ein Stein immer die Summe (oder das Produkt oder …) der beiden darunter liegenden Steine. Bearbeiten Sie die gezeigten Aufgabenbeispiele entsprechend

In welcher Hinsicht unterstützen diese Aufgaben mit Zahlenmauern die Ausbildung operativen Denkens? Können Sie sich eine andere Darstellung für die in der Zahlenmauer angesprochenen Rechnungen vorstellen?

1.




2.




3. Beginne noch einmal mit den Zahlenmauern aus der ersten Reihe: Untersuche hier, was mit der obersten Zahl passiert, wenn die linke bzw. die mittlere bzw. die rechte Basiszahl um eins erhöht.

3.2 Rechenstrategien

Formulieren Sie analog zu den folgenden der in der Vorlesung dargestellten Rechenstrategien entsprechende Versionen für das Rechnen mit Brüchen:

(a) Verdoppeln nutzen

(b) gegen- bzw. gleichsinniges Verändern

(c) Analogien nutzen

(d) Hilfsaufgaben nutzen

(e) Schrittweises Rechnen nutzen

(f) Stellenweises Addieren

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften
Fach Mathematik

Prof. Dr. Guido Pinkernell

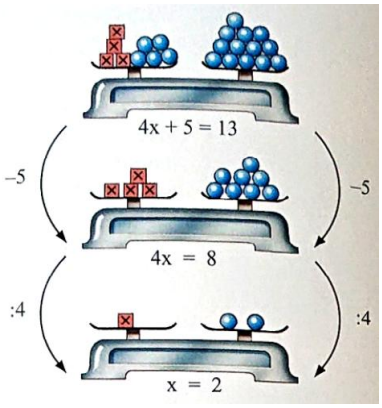
Mathematikdidaktische Grundlagen und Einführung in die Didaktik

# Übung 02



**Aufgabe 4** (auch als Hausaufgabe nutzbar): Transfer von „Waage“ und „Operatives Üben“

4.1 Diese Abbildung aus einem Schulbuch regt an, die Waage auch bei Dreisatzaufgaben zu verwenden:




(a) Formulieren Sie eine Dreisatzaufgabe so, dass sie mittels der Waage lösbar ist und lösen Sie sie.

(b) Überlegen Sie: Welche Bedeutung hat das Gleichgewicht im Waagemodell für das reale Problem, das hier mittels Dreisatz gelöst wird? Was halten Sie von der Modellierung des Dreisatzes mittels Waage?

4.2 Erstellen Sie eine einfache Dreisatzaufgabe und geben Sie auch gleich eine Lösung an. Danach erstellen Sie zu dieser Aufgabe eine Zielumkehraufgabe, eine Nachbaraufgabe und eine Aufgabe, die eine „Übersetzung“ in eine andere Darstellung erfordert.