Grundlagen der Mathematikdidaktik

Verstehen II:
Operative Flexibilität – EIS

Berechnen Sie im Kopf...

… und machen Sie sich gleich hinterher Notizen:

Wie genau
lösen Sie diese Aufgabe
im Kopf?

Übersicht

1. Operative Flexibilität : Merkmale und Genese
2. Operative Flexibilität : Förderung
3. Aber Achtung: Strukturanalogie!

1. Operative Flexibilität : Merkmale und Genese

- Assoziativität:
  Fähigkeit zur Suche nach anderen Lösungswegen
- Reversibilität:
  Fähigkeit zur Umkehrung des Lösungsweges
- Kompositionsfähigkeit:
  Fähigkeit zur Neuorganisation des Lösungsweges
- Variationsfähigkeit
  Fähigkeit zur Bearbeitung ähnlicher Aufgabenstellungen
- Transitivität
  Fähigkeit zur Übertragung eines Lösungsansatzes auf andere Aufgabenstellungen

$3 + 2 \cdot \square = 11$

$2{,}8 - 0{,}2 - 1{,}3 + 1{,}2$

ist so einfacher:

$(2{,}8 - 1{,}3) + (1{,}2 - 0{,}2)$

für $1{,}25 + 2{,}86 =$

hilft zunächst $1{,}2 + 2{,}8 =$

$2\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

ist so einfacher (siehe oben)...

(vgl. Fricke (1970): Operative Lernprinzipien)

1. Operative Flexibilität : Merkmale und Genese

- Assoziativität:
  Fähigkeit zur Suche nach anderen Lösungswegen
- Reversibilität:
  Fähigkeit zur Umkehrung des Lösungsweges
- Kompositionsfähigkeit:
  Fähigkeit zur Neuorganisation des Lösungsweges
- Variationsfähigkeit
  Fähigkeit zur Bearbeitung ähnlicher Aufgabenstellungen
- Transitivität
  Fähigkeit zur Übertragung eines Lösungsansatzes auf andere Aufgabenstellungen

- Denken entwickelt sich aus dem Wahrnehmen und Handeln
- Handlungen (auch im Kopf) ausführen zu können ist nicht das Ziel von Unterricht
- sondern Ziel ist die Ausbildung von verinnerlichten Handlungen in Form von „Operationen“:

  weil losgelöst von konkreten Handlungsprozeduren hochgradig abstrakte Kombinationen verschiedener Handlungen (Operationssysteme) mit hoher Flexibilität und Anwendbarkeit in unterschiedlichen Situationen (s.o.)

(vgl. Fricke (1970): Operative Lernprinzipien)

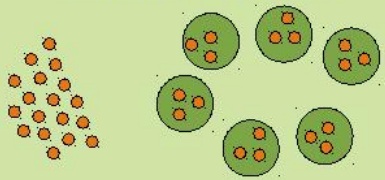
Grundvorstellungen

- mentale Modelle für mathematische Begriffe (Freudenthal 1983)

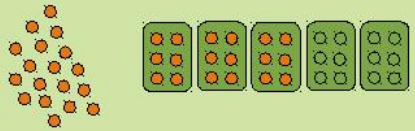
  vom Hofe (2003):
- ein mathematischer Begriff wird in der Regel durch mehrere, vernetzte Grundvorstellungen erfasst (auch: „Grundverständnis“)
- im Laufe der Schulzeit wechselt der Charakter der Grundvorstellungen: zuerst assoziiert mit gegenständlichen Handlungserfahrungen, später mathematische Darstellungsmittel (-> Funktionsbegriff)
- keine feste Sammlung, sondern ein immer wieder ergänzt und erweitertes System mentaler Modelle

zwei „Grundvorstellungen" des Dividierens:

Verteilen:
18 Murmeln an
6 Kinder verteilen



Aufteilen:
18 Murmeln in
6er Päckchen aufteilen



Handlungen
als Beginn des
Verstehensprozesses

hier schon in Form von
Bildern
veranschaulicht
auf dem Papier und
in der Vorstellung

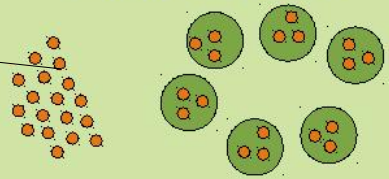
Ziel: **18:6**
verständig
berechnen können
bei ständiger Aktivierbark.
der Grundvorstellungen

Lernprozess:

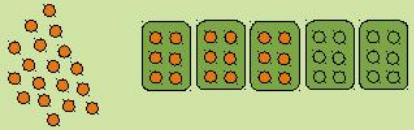
„vom Konkreten
zum
Abstrakten“

zwei
„Grundvorstellungen"
des Dividierens:

Verteilen:
18 Murmeln an
6 Kinder verteilen



Aufteilen:
18 Murmeln in
6er Päckchen aufteilen



11

Handlungen
als Beginn des
Verstehensprozesses

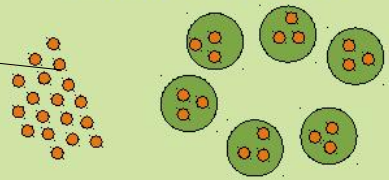
hier schon in Form von
Bildern
veranschaulicht
auf dem Papier und
in der Vorstellung

Ziel: **18:6**
verständig
berechnen können
bei ständiger Aktivierbark.
der Grundvorstellungen

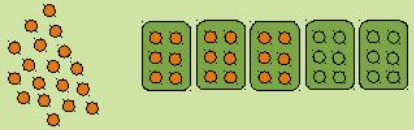
bei ständiger
Reaktivierungs-
möglichkeit
der Grund-
vorstellungen

zwei
„Grundvorstellungen"
des Dividierens:

Verteilen:
18 Murmeln an
6 Kinder verteilen



Aufteilen:
18 Murmeln in
6er Päckchen aufteilen



11

Handlungen
als Beginn des
Verstehensprozesses

E enaktiver
Repräsentationsmodus
des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen
kann prinzipiell
auf drei Arten
dargestellt bzw.
erschlossen
werden.

hier schon in Form von
Bildern
veranschaulicht
auf dem Papier und
in der Vorstellung

I ikonischer
Repräsentationsmodus
des Wissens

Ziel: **18:6**
verständig
berechnen können
bei ständiger Aktivierbark.
der Grundvorstellungen

S symbolischer
Repräsentationsmodus
des Wissens

Handlungen des Aufteilens bzw. Verteilens von Plättchenmengen

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

hier schon in Form von **Bildern** veranschaulicht auf dem Papier und in der Vorstellung

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

Ziel: **18:6** verständig berechnen können bei ständiger Aktivierbark. der Grundvorstellungen

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

Handlungen des Aufteilens bzw. Verteilens von Plättchenmengen

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

Umkreisen von Zahlbildern bzw. Punktmustern auf dem Papier bzw. in der Vorstellung

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

Ziel: **18:6** verständig berechnen können bei ständiger Aktivierbark. der Grundvorstellungen

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

Handlungen des Aufteilens bzw. Verteilens von Plättchenmengen

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

Umkreisen von Zahlbildern bzw. Punktmustern auf dem Papier bzw. in der Vorstellung

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

Berechungen von Aufgaben wie 18 : 3 und 18 : ? = 6 und 18 : 6 = ? und ...

psychomotorische Bewegungen mit struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

Umkreisen von Zahlbildern bzw. Punktmustern auf dem Papier bzw. in der Vorstellung

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

Berechungen von Aufgaben wie 18 : 3 und 18 : ? = 6 und 18 : 6 = ? und ...

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

psychomotorische Bewegungen mit struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

zunehmende Abstraktion in Darstellungen von Handlungsabläufen (auch in der Vorstellung)

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

Berechungen von Aufgaben wie 18 : 3 und 18 : ? = 6 und 18 : 6 = ? und ...

psychomotorische Bewegungen mit struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

zunehmende Abstraktion in Darstellungen von Handlungsabläufen (auch in der Vorstellung)

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

totale Abstraktion in einem Zeichensystem, das mathematischen Gesetzen gehorcht

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

psychomotorische Bewegungen mit struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

zunehmende Abstraktion in Darstellungen von Handlungsabläufen (auch in der Vorstellung)

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

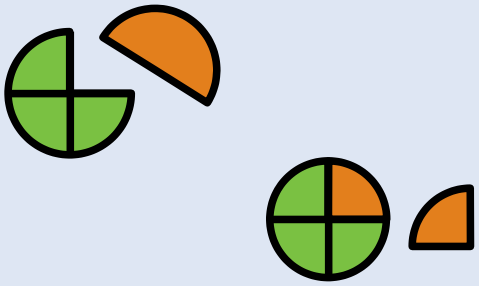
S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

psychomotorische Bewegungen mit struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

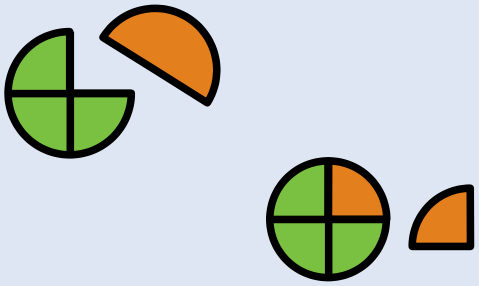


I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

(Eine Handlung kann hier nicht dargestellt werden, aber...)



$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

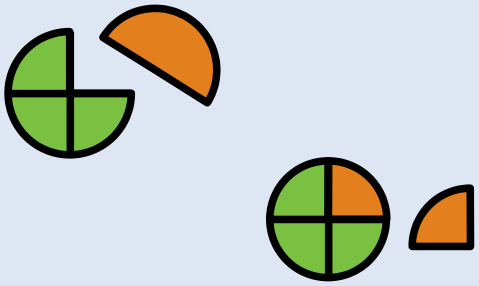
S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

(Eine Handlung kann hier nicht dargestellt werden, aber...)

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

V! J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf **vier** Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.



I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

(Eine Handlung kann hier nicht dargestellt werden, aber...)

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

V! J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf **vier** Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

die halbe Pizza in zwei viertel Pizza zerlegen, zusammen mit drei Viertelpizzen zähle ich fünf Viertelpizzen

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

(Eine Handlung kann hier nicht dargestellt werden, aber...)

„die halbe Pizza in zwei viertel Pizza zerlegen, zusammen mit drei Viertelpizzen zähle ich fünf Viertelpizzen“

„beide Summanden auf den selben Nenner erweitern und die Zähler addieren“

V! J.S.Bruner:

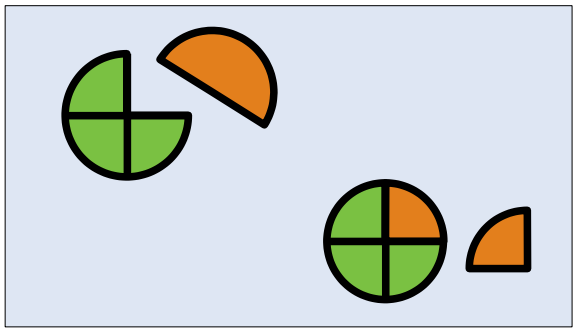
Wissen kann prinzipiell auf **vier** Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

E enaktiver Repräsentationsmodus des Wissens

I ikonischer Repräsentationsmodus des Wissens

S symbolischer Repräsentationsmodus des Wissens

psychomotorische Bewegungen mit **struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren**



$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

E

J.S.Bruner:

Wissen kann prinzipiell auf drei Arten dargestellt bzw. erschlossen werden.

I

S

„Handlungs-orientierung“ – aber sinnstiftend strukturiert!

Lernprozess:

„vom Konkreten zum Abstrakten“

Übersicht

1. Operative Flexibilität : Merkmale und Genese
2. Operative Flexibilität : Förderung
3. Aber Achtung: Strukturanalogie!

2. Operative Flexibilität : Förderung (Wartha 2011)

1. Handeln an strukturanalogem Material
2. Beschreibung der Handlung mit Sicht auf das Material
3. Beschreibung der Handlung ohne Sicht auf das Material
4. Arbeiten auf symbolischer Ebene



aus: Schipper: Übungen zur Präventation von Rechenstörungen.

2. Operative Flexibilität : Förderung (Wartha 2011)

1. Handeln an strukturanalogem Material
2. Beschreibung der Handlung mit Sicht auf das Material
3. Beschreibung der Handlung ohne Sicht auf das Material
4. Arbeiten auf symbolischer Ebene



aus: Schipper: Übungen zur Präventation von Rechenstörungen.

2. Operative Flexibilität : Förderung (Wartha 2011)

1. Handeln an strukturanalogem Material
2. Beschreibung der Handlung mit Sicht auf das Material
3. Beschreibung der Handlung ohne Sicht auf das Material
4. Arbeiten auf symbolischer Ebene



aus: Schipper: Übungen zur Präventation von Rechenstörungen.

2. Operative Flexibilität : Förderung (Wartha 2011)

1. Handeln an strukturanalogem Material
2. Beschreibung der Handlung mit Sicht auf das Material
3. Beschreibung der Handlung ohne Sich auf das Material
4. Arbeiten auf symbolischer Ebene

Falten eines Blattes in 5 Teile

Für die
äquidis
Das zu
entsteh



Idee 1 Vergröbern und Verfeinern der Einteilung

Material: Einige rechteckige Blätter (DIN-A6) und ein Stift.

1. **Falte und färbe:**
   Was fällt dir bei den Brüchen $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ auf?
   Was ist gleich, was ist verschieden?

2. **Sage mir, wie ich vorgehen soll:**
   Was muss ich mit Falten und Färben von Papier machen, um der Klasse zu zeigen, dass $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ gilt?

3. **Beantworte durch Nachdenken folgende Fragen (Gedankenexperiment):**
   a) Ich habe $\frac{3}{5}$ am Papier gefaltet und gefärbt. Was kann ich tun, um eine Zwanzigstel-Einteilung zu bekommen? Welcher Bruch ist das dann?
   b) Ich habe $\frac{2}{3}$ gefaltet und gefärbt. Kann ich eine Fünftel- (Sechstel-/Zehntel-) Einteilung bekommen? Wie kann ich vorgehen? Warum gelingt das nicht?
   c) Ich habe $\frac{24}{36}$. Immer aus zwei (drei, vier …) Einteilungen mache ich nun eine große. Wie viele Teile sind gefärbt, wie viele sind es insgesamt? Wie heißt der Bruch?
   d) Ich habe $\frac{3}{7}$. Welche Einteilungen kann ich bekommen, welche nicht? Wie heißen die Brüche?

4. **Überlege:**
   Folgende Brüche sollen eine Hundertstel-Unterteilung bekommen. Bei welchen gelingt das? Wie heißen die verfeinerten Brüche?

   $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$,
   $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{20}$

Wartha, S. (2011). Handeln und Verstehen. *mathematik lehren*, (166), 8–14

2. Operative Flexibilität : Rechenstrategien

	1. Schuljahr		*2. Schuljahr*
1. Das Verdoppeln bzw. Halbieren nutzen			
6+8=14 aus „doppel-sechs plus zwei“	14-6=8 aus 14-7=7 7+1=8	25+28=53 aus „doppel-fünfundzwanzig plus drei“	50-26=24 aus 50-25-1
2. Gegen- bzw. gleichsinniges Verändern			
6+8=14 aus (6+1)+(8-1) = „doppel-sieben“	12-7=5 aus (12-2)-(7-2) = 10-5	34+58=92 aus (34-2)+(58+2) = 32+60	76-28=48 aus (76+2)-(28+2) = 78-30

2. Operative Flexibilität : Rechenstrategien

1. Schuljahr *2. Schuljahr*

1. Das Verdoppeln bzw. Halbieren nutzen

6+8=14 aus „doppel-sechs plus	14-6=8 aus 14-7=7	25+28=53 aus doppel-	50-26=24 aus 50-25-1

3. Analogien nutzen

13+4=17 weil 3+4=7	19-6=13 weil 9-6=3	30+40=70 weil 3+ 4= 7	80-50=30 weil 8-5=3

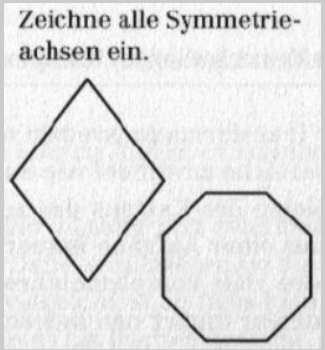
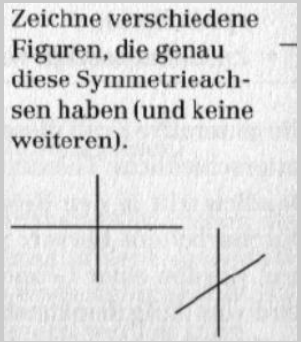
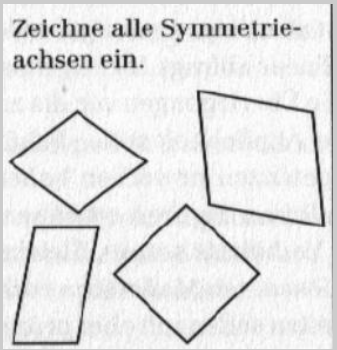
4. Hilfsaufgaben nutzen

6+8=14 aus 6+10-2	16-9=7 aus 16-10+1	34+58=92 aus 34+60-2	76-28=48 aus 76-30+2

5. Schrittweises Rechnen (Zerlegen des zweiten Summanden bzw. des Subtrahenden)

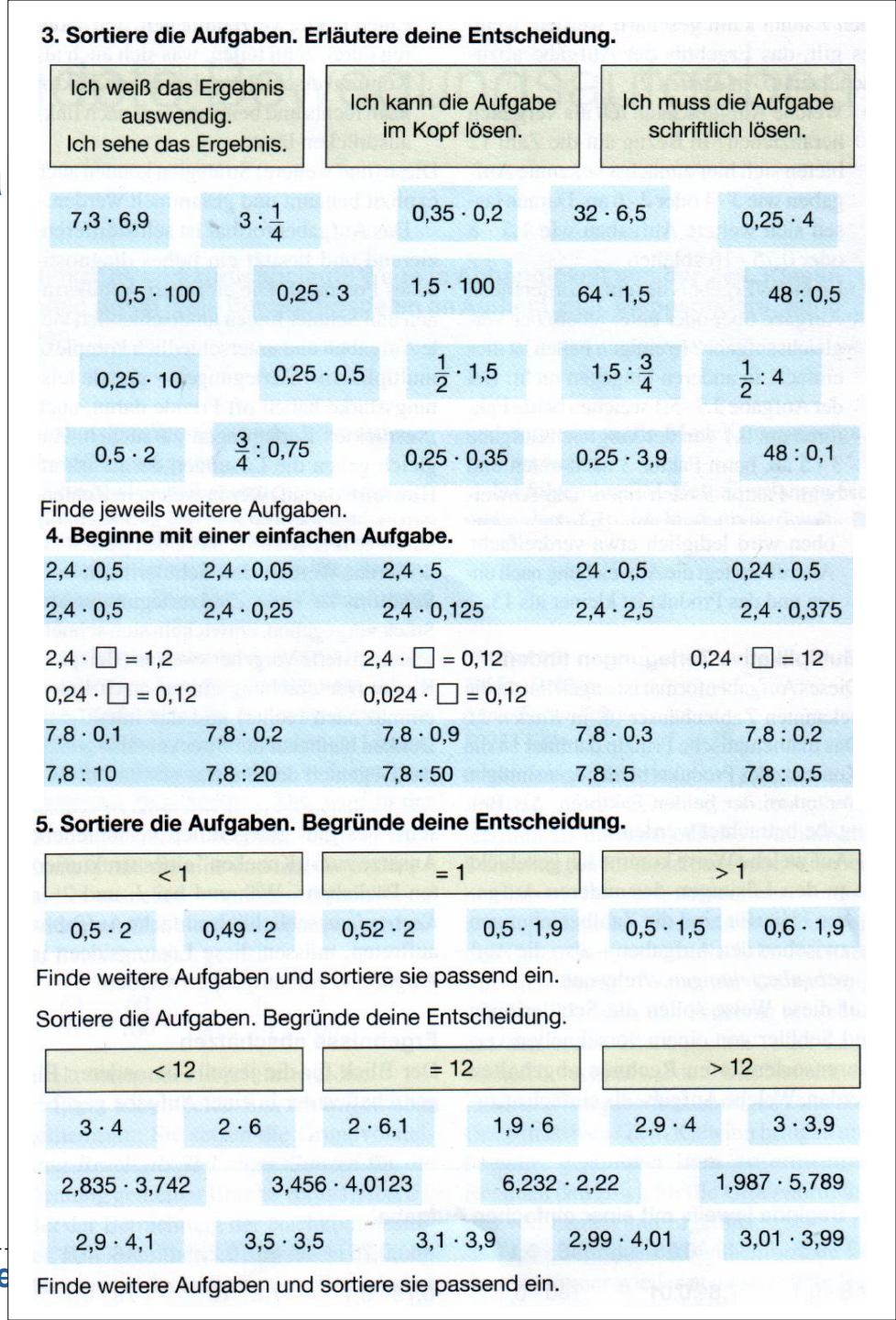
6+8=14 aus 6+4+4	14-6=8 aus 14-4-2	34+58=92 aus 34+50+8	76-28=48 aus 76-20-8

2. Operative Flexibilität : Aufgabenvariation

Grund-aufgabe	Zielumkehr-aufgabe	Nachbar-aufgaben
$2x \cdot 3x = ___$	$4a \cdot ___ = -a$	$2x \cdot 3x = ___$ $2x \cdot 2x = ___$ $2x \cdot 1x = ___$ $2x \cdot 0x = ___$ $2x \cdot -1x = ___$
Gib die Lösungen an: $x \cdot (x-3) = 0$	Gib eine Gleichung an mit den Lösungen 2 und -1	Gib die Lösungen an: $x \cdot (x-3) = 0$ $x \cdot (x-2) = 0$ $x \cdot (x-1) = 0$ $x \cdot (x-0) = 0$ $x \cdot (x+1) = 0$
		

2. Operative Flexibilität : Aufga

- „Strukturierte Päckchen“
  (aus Marxer und Wittmann in Praxis der Mathematik, 2013, zum Rechnen mit Dezimalbrüchen)



3. Sortiere die Aufgaben. Erläutere deine Entscheidung.

Ich weiß das Ergebnis auswendig. Ich sehe das Ergebnis.	Ich kann die Aufgabe im Kopf lösen.	Ich muss die Aufgabe schriftlich lösen.
$7{,}3 \cdot 6{,}9$	$3 : \frac{1}{4}$	$0{,}35 \cdot 0{,}2$
$32 \cdot 6{,}5$	$0{,}25 \cdot 4$	$0{,}5 \cdot 100$
$0{,}25 \cdot 3$	$1{,}5 \cdot 100$	$64 \cdot 1{,}5$
$48 : 0{,}5$	$0{,}25 \cdot 10$	$0{,}25 \cdot 0{,}5$
$\frac{1}{2} \cdot 1{,}5$	$1{,}5 : \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} : 4$
$0{,}5 \cdot 2$	$\frac{3}{4} : 0{,}75$	$0{,}25 \cdot 0{,}35$
$0{,}25 \cdot 3{,}9$	$48 : 0{,}1$	

Finde jeweils weitere Aufgaben.

4. Beginne mit einer einfachen Aufgabe.

$2{,}4 \cdot 0{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}05$	$2{,}4 \cdot 5$	$24 \cdot 0{,}5$	$0{,}24 \cdot 0{,}5$
$2{,}4 \cdot 0{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}25$	$2{,}4 \cdot 0{,}125$	$2{,}4 \cdot 2{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}375$

$2{,}4 \cdot \square = 1{,}2$ $\quad$ $2{,}4 \cdot \square = 0{,}12$ $\quad$ $0{,}24 \cdot \square = 12$

$0{,}24 \cdot \square = 0{,}12$ $\quad$ $0{,}024 \cdot \square = 0{,}12$

$7{,}8 \cdot 0{,}1$	$7{,}8 \cdot 0{,}2$	$7{,}8 \cdot 0{,}9$	$7{,}8 \cdot 0{,}3$	$7{,}8 : 0{,}2$
$7{,}8 : 10$	$7{,}8 : 20$	$7{,}8 : 50$	$7{,}8 : 5$	$7{,}8 : 0{,}5$

5. Sortiere die Aufgaben. Begründe deine Entscheidung.

< 1		$= 1$		> 1	
$0{,}5 \cdot 2$	$0{,}49 \cdot 2$	$0{,}52 \cdot 2$	$0{,}5 \cdot 1{,}9$	$0{,}5 \cdot 1{,}5$	$0{,}6 \cdot 1{,}9$

Finde weitere Aufgaben und sortiere sie passend ein.

Sortiere die Aufgaben. Begründe deine Entscheidung.

< 12		$= 12$		> 12	
$3 \cdot 4$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 6{,}1$	$1{,}9 \cdot 6$	$2{,}9 \cdot 4$	$3 \cdot 3{,}9$

$2{,}835 \cdot 3{,}742$ $\quad$ $3{,}456 \cdot 4{,}0123$ $\quad$ $6{,}232 \cdot 2{,}22$ $\quad$ $1{,}987 \cdot 5{,}789$

$2{,}9 \cdot 4{,}1$ $\quad$ $3{,}5 \cdot 3{,}5$ $\quad$ $3{,}1 \cdot 3{,}9$ $\quad$ $2{,}99 \cdot 4{,}01$ $\quad$ $3{,}01 \cdot 3{,}99$

Finde weitere Aufgaben und sortiere sie passend ein.

2. Opera

4. Beginne mit einer einfachen Aufgabe.

2,4 · 0,5	2,4 · 0,05	2,4 · 5	24 · 0,5	0,24 · 0,5
2,4 · 0,5	2,4 · 0,25	2,4 · 0,125	2,4 · 2,5	2,4 · 0,375

2,4 · □ = 1,2 2,4 · □ = 0,12 0,24 · □ = 12

0,24 · □ = 0,12 0,024 · □ = 0,12

7,8 · 0,1	7,8 · 0,2	7,8 · 0,9	7,8 · 0,3	7,8 : 0,2
7,8 : 10	7,8 : 20	7,8 : 50	7,8 : 5	7,8 : 0,5

7,5 · □ = 1,5 7,5 · □ = 0,15 7,5 · □ = 0,015

75 · □ = 1,5 75 · □ = 0,15

- „Strukturierte Päckchen“
  (aus Marxer und Wittmann in Praxis der Mathematik, 2013, zum Rechnen mit Dezimalbrüchen):

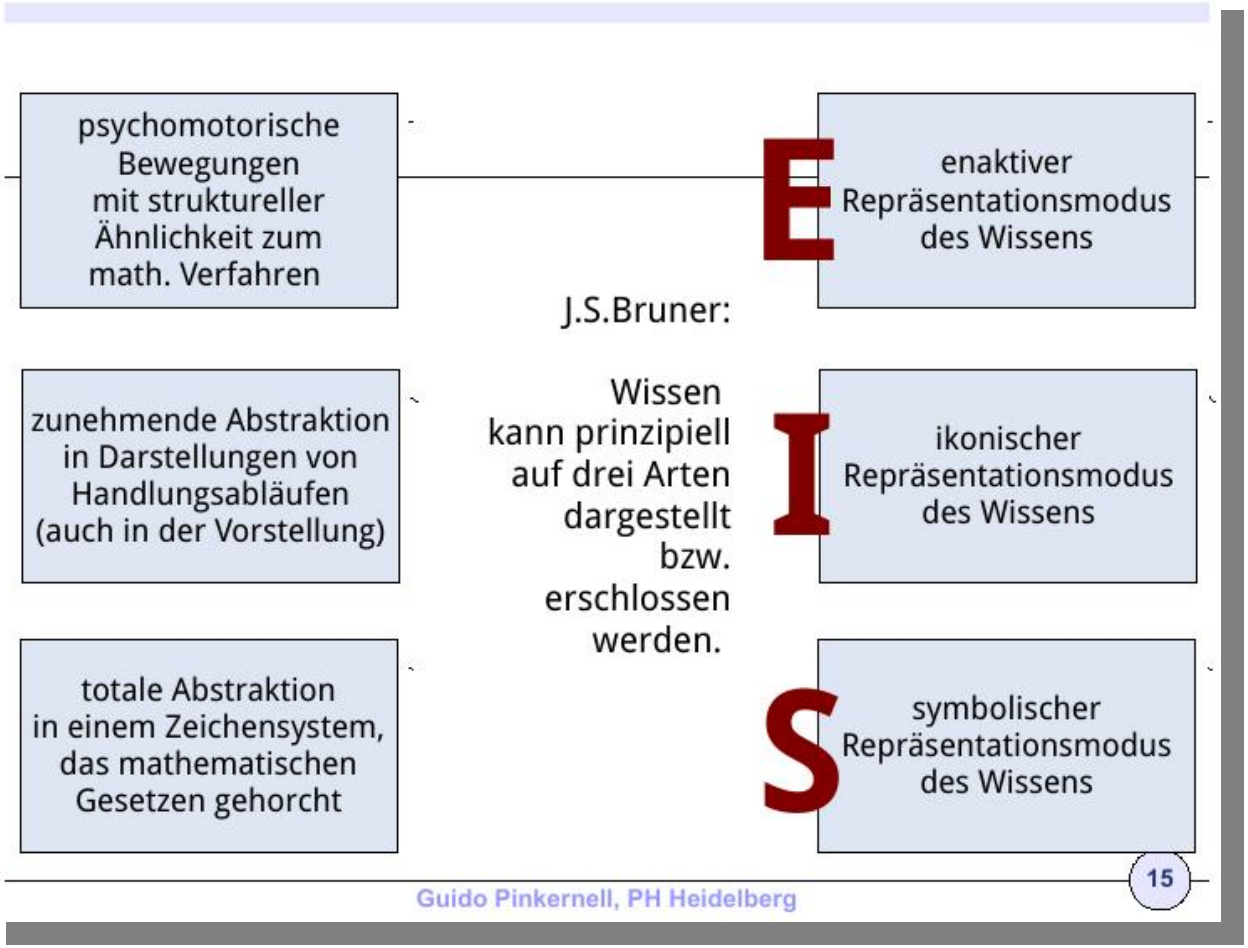
  Nachbaraufgaben als Rechenstrategie:
  eine schwere Aufgabe kann durch Bildung von Nachbaraufgaben so vereinfacht werden, dass die schwere Aufgabe lösbar wird.

Übersicht

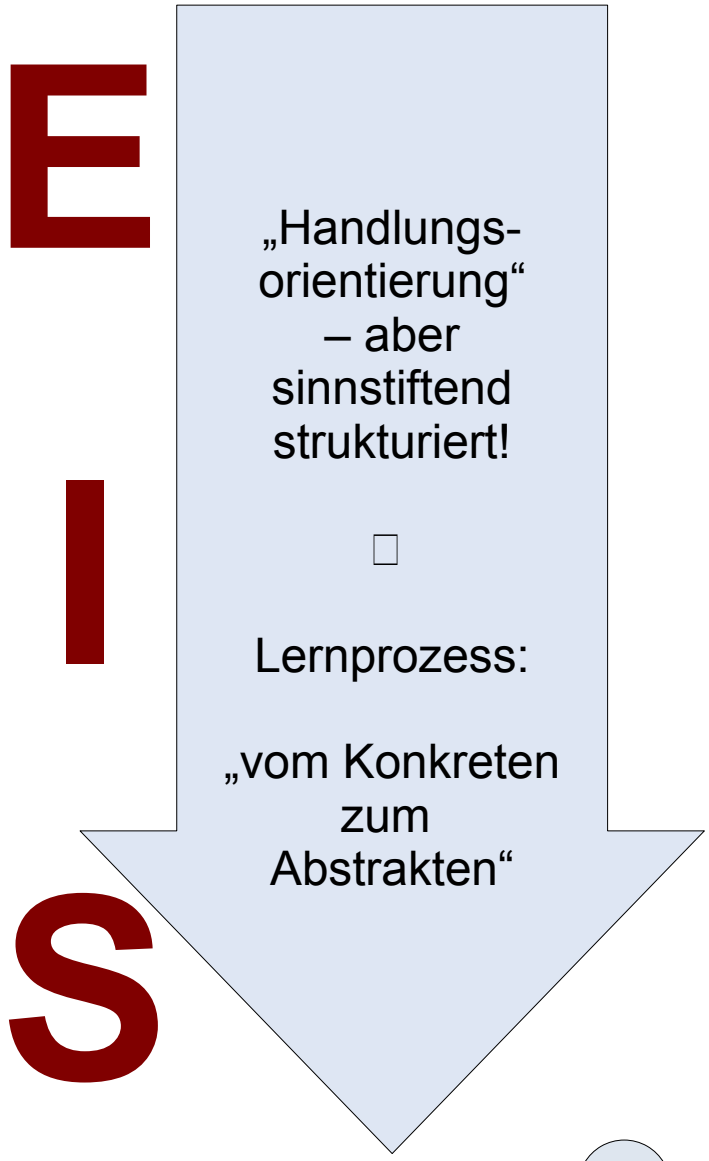
1. Operative Flexibilität : Merkmale und Genese
2. Operativer Flexibilität : Förderung
3. Aber Achtung: Strukturanalogie!

3. Strukturanalogie von Handlungen und Operation

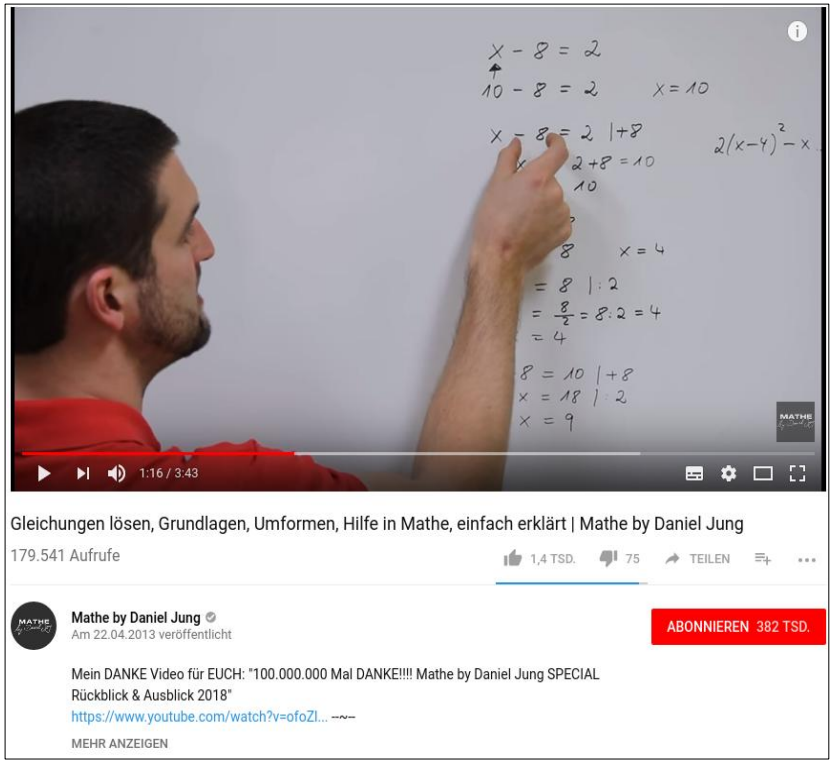
also die mentale Berechnung eine 1:1 Umsetzung der Handlung?



Bewerten Sie
die folgende Erklärung
von Gleichungsumformungen

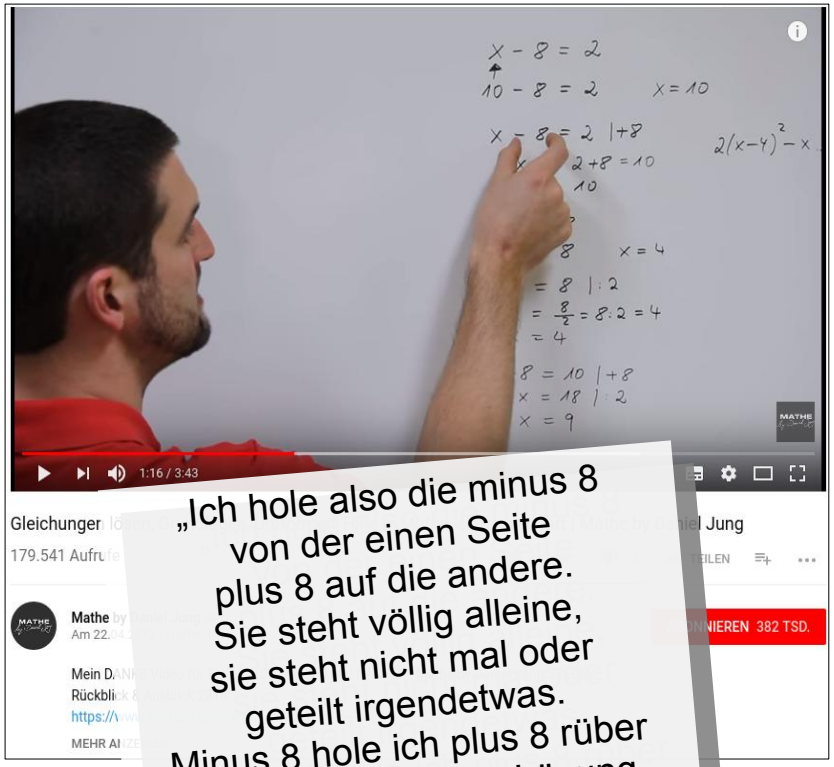


Bewerten Sie
die folgende Erklärung
von Gleichungsumformungen



https://www.youtube.com/watch?v=9UVkZFySE5I (min. 1ff.)

Bewerten Sie
die folgende Erklärung
von Gleichungsumformungen



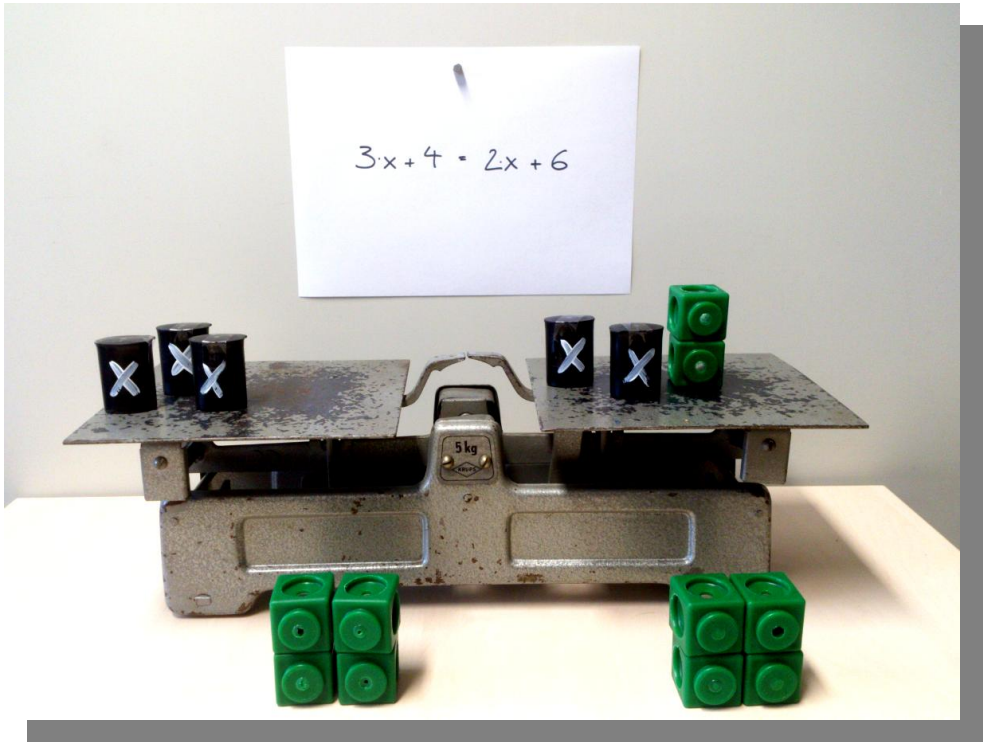
„Ich hole also die minus 8
von der einen Seite
plus 8 auf die andere.
Sie steht völlig alleine,
sie steht nicht mal oder
geteilt irgendetwas.
Minus 8 hole ich plus 8 rüber
und komme auf die Lösung
x gleich 10.“

https://ww (min. 1ff.)



„Handlungs-orientierung“ – aber sinnstiftend strukturiert

psychomotorische Bewegungen mit **struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren**



„Handlungs-orientierung“ – aber sinnstiftend strukturiert

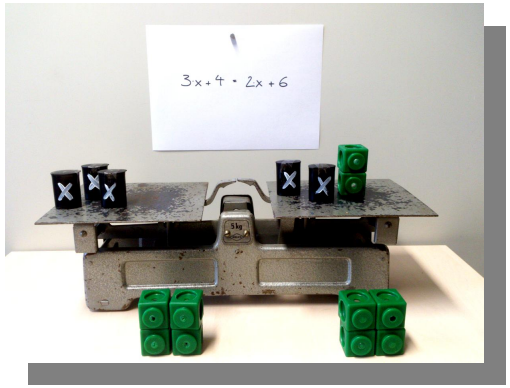
psychomotorische Bewegungen mit **struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren**



„Handlungs-orientierung“ – aber sinnstiftend strukturiert

psychomotorische Bewegungen mit **struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren**





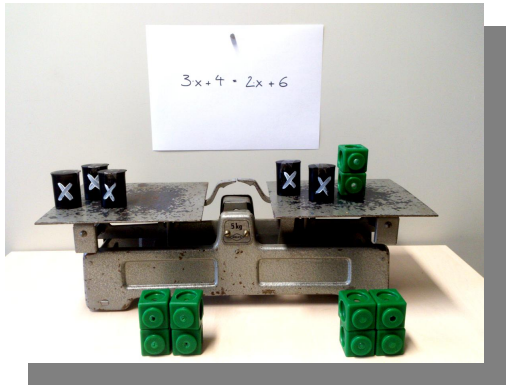


„alle x-Terme auf eine Seite“ ?

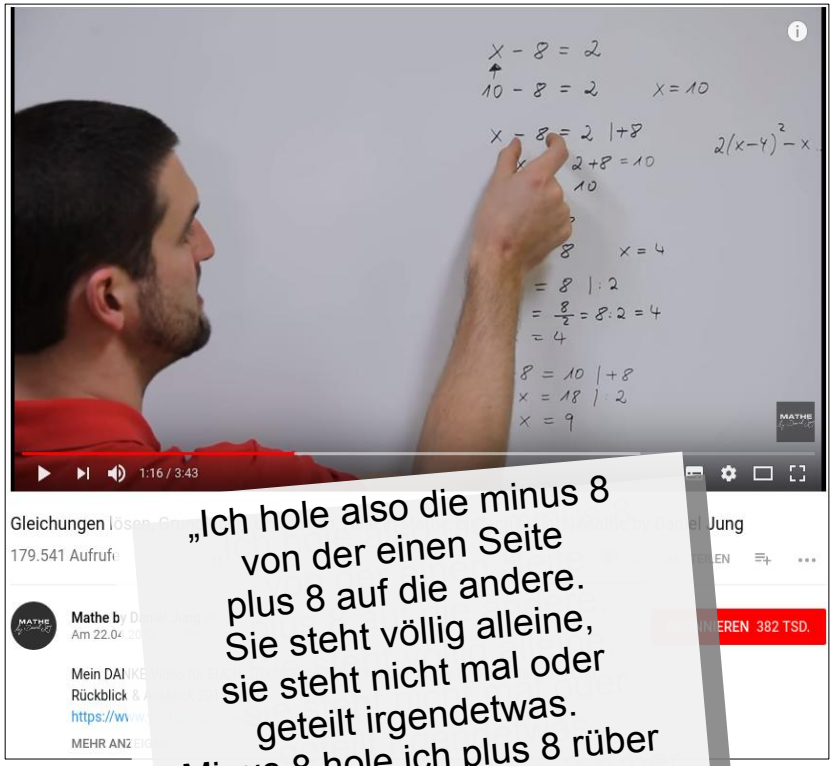
„Handlungs-orientierung“ – aber sinnstiftend strukturiert

psychomotorische Bewegungen mit **struktureller Ähnlichkeit zum math. Verfahren**









„Ich hole also die minus 8
von der einen Seite
plus 8 auf die andere.
Sie steht völlig alleine,
sie steht nicht mal oder
geteilt irgendetwas.
Minus 8 hole ich plus 8 rüber
und komme auf die Lösung
x gleich 10.“

$3x + 4 = 2x + 6$

$x - 8 = 2$







Lösen durch Äquivalenzumformungen:

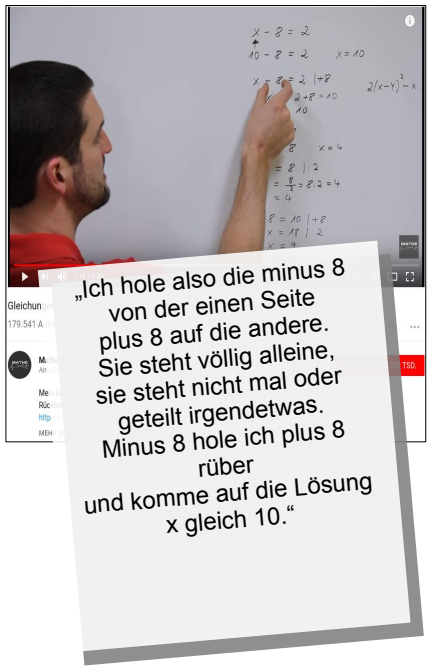
Sichtweise der Gleichung:
Beide Terme sind für ein bestimmtes x gleichwertig

Lösen durch Beibehalten der dieser Gleichwertigkeit mittels gleicher Umformungen auf beiden Seiten

Lösen durch Operationsumkehr:

Sichtweise der Gleichung:
Die 2 ist das Ergebnis einer Rechnung, in der der Wert für x unkenntlich ist.

Lösen durch Rückgängigmachen der Rechenoperation mittels Operationsumkehr



$3x + 4 = 2x + 6$

Grundvorstellungen des Gleichungen-lösens

$x - 8 = 2$







Lösen durch Äquivalenzumformungen:

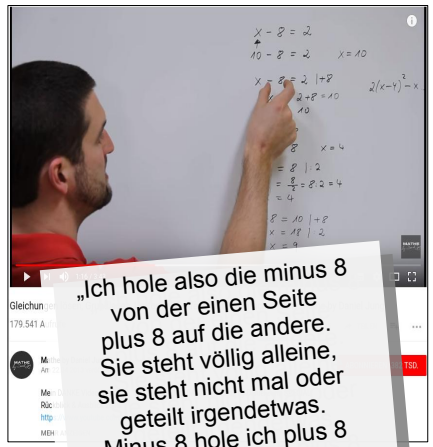
Sichtweise der Gleichung:
Beide Terme sind für ein bestimmtes x gleichwertig

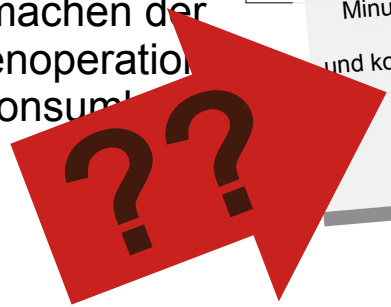
Lösen durch Beibehalten der dieser Gleichwertigkeit mittels gleicher Umformungen auf beiden Seiten

Lösen durch Operationsumkehr:

Sichtweise der Gleichung:
Die 2 ist das Ergebnis einer Rechnung, in der der Wert für x unkenntlich ist.

Lösen durch Rückgängigmachen der Rechenoperation mittels Operationsumkehr





3. Strukturanalogie von Handlungen und Operation

- Verstehen heißt,
  über drei Darstellungsformen (enaktiv, ikonisch, symbolisch)
  des entsprechenden Wissensinhaltes
  zu verfügen
- eine verständnisorientierte Einführung
  in ein (frühes) mathematisches Verfahren heißt demnach,
  mit einem enaktiven Zugang zu beginnen,
  dessen Versprachlichung die Verinnerlichung vorbereitet
- dabei nicht „Hauptsache handlungsorientiert“,
  sondern der enaktive Zugang muss strukturelle Ähnlichkeiten
  mit dem mathematischen Verfahren aufweisen

Übersicht

1. Operative Flexibilität : Merkmale und Genese
2. Operative Flexibilität : Förderung
3. Aber Achtung: Strukturanalogie!

Ausblick: Operatives Üben als Teil eines umfassenden Modells von Übungsformen

- **Ausbildung** von mentalen Operationen nach Bruner
  immer ausgehend von Handlungen (< „enaktiver Zugang“)
- Des weiteren **Übungsformen**,
  die diese mentale Flexibilität und Mobilität unterstützen:

„Statt isolierter Kenntnisse
ist es das Ziel des **operativen Üben**s,
bewegliches Denken herauszubilden,
den Schüler Zusammenhänge und Beziehungen erkennen zu lassen
und ihn damit in die Lage zu versetzen,
auch komplexere Ganzheiten
bewältigen zu können.“

(Schipper 2009, Seite 312)

Ausblick: Operatives Üben als Teil eines umfassenden Modells von Übungsformen

Formen	Ziele	Theorie
Automatisiertes Üben	Grundkenntnisse auswendig lernen, Fertigkeiten sicher beherrschen	Cognitive Load Theory
Beziehungsreiches Üben: operatives Üben	Ausbau der Beweglichkeit des Denkens (Ausbildung von Operativem Denken) durch Herstellen vielfältiger Beziehungen und Zusammenhänge	Operatives Prinzip
Beziehungsreiches Üben: strukturorientiertes Üben	Entwicklung eines Verständnisses für mathematische Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge	Prinzip des Entdeckenden Lernen
Anwendungsorientiertes Üben	Übertragung des Gelernten auf neue Fragestellungen und Situationen	Prinzip der Anwendungsorientierung (Problemlösen, Modellieren, sinnstiftende Kontexte)

Ausblick: Operatives Üben als Teil eines umfassenden Modells von Übungsformen

Formen	Ziele	Theorie
Automatisiertes Üben	Grundkenntnisse auswendig lernen, Fertigkeiten sicher beherrschen	Cognitive Load Theory
operatives Üben	Ausbau der Beweglichkeit des Denkens (Ausbildung von Operativem Denken) durch Herstellen vielfältiger Beziehungen und Zusammenhänge	Operatives Prinzip
Beziehungsreiches Üben		
strukturorientiertes Üben	Entwicklung eines Verständnisses für mathematische Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge	Prinzip des Entdeckenden Lernen
Anwendungsorientiertes Üben	Übertragung des Gelernten auf neue Fragestellungen und Situationen	Prinzip der Anwendungsorientierung (Problemlösen, Modellieren, sinnstiftende Kontexte)

was Sie können sollten...

- Merkmale operativer Flexibilität benennen können
- die Bedeutung von Aufgabenvariation für die Ausbildung operativer Flexibilität begründen können
- eine Grundaufgabe mittels geeigneter Aufgabenvariationen so ergänzen können, dass ein Beispiel für operatives Üben entsteht
- für eine Grundaufgabe mindestens drei verschiedene Rechenstrategien angeben können
- die drei Repräsentationsmodi nach Bruner an einem Beispiel beschreiben können
- an einem Beispiel die Ausbildung operativer Flexibilität auf Basis von Handlungen beschreiben können
- Die Notwendigkeit von Strukturanalogie zwischen Handlung und Operation begründen können

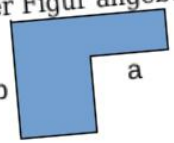
was Sie können sollten...

- Merkmale operativer Flexibilität benennen können
- die Bedeutung von Aufgabenvariation für die Ausbildung operativer Flexibilität begründen können
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

1 Eine Grundaufgabe zur Termumformung wäre zum Beispiel:

Klammere aus: $2ab - a^2$

Welche der folgenden Aufgaben wäre dann eine
(a) Umkehraufgabe
(b) Nachbaraufgabe
(c) Darstellungs- oder Handlungswechsel?

Klammere aus: $2ab - a$	Formuliere zwei Terme, die nach einem Ausklammern das Ergebnis $2a(b-a)$ zeigen.	Formuliere zwei Terme, die den Flächeninhalt dieser Figur angeben: 

Bringen Sie zur Antwort die Buchstaben a,b,c in die passende Reihenfolge (ohne Kommas).

2 Gegeben sei die Aufgabe $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$.

Welche der folgenden Berechnungen würde die Rechenstrategie

(a) Verdoppeln Nutzen
(b) Gleichsinniges Verändern
(c) Gegensinniges Verändern
(d) Hilfsaufgaben Nutzen
(e) Schrittweises Rechnen

zeigen?

$= \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$ $= \frac{1}{2}+\frac{4}{4}-\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$

Bringen Sie zur Antwort zwei der drei Buchstaben a,b,c in die passende Reihenfolge (ohne Kommas)