

Was ist Algebra?

eine didaktische Perspektive

Übersicht

- wissenschaftlich
Perspektive
- historische
Perspektive
- didaktische
Perspektive

Das Verallgemeinern,
das Abstrahieren und
das Generieren von Wissen

begründen auch
die Algebra in der Schule

...

Addieren und Subtrahieren üben

„...denn die mittlere Zahl geht ja zweimal in das Ergebnis ein.“

„Das Ergebnis berechnet sich als Summe der Werte des linken und rechten Basissteins und des doppelten Werts des mittleren.“

$$d = b_l + 2 \cdot b_m + b_r$$

„...das sind die zwei Mauern mit 23 und 12 außen und 31 innen“

„...da steht die größte Zahl der drei Zahlen drin.“

„Immer wenn in der Mitte die größte von drei Zahlen steht, dann steht im Deckstein das größte Ergebnis.“

- a) Welche Zahl steht im Deckstein?
b) Finde die Summe der Werte dieser Basissteine.
c) Welche Zahl steht im Deckstein?
Welche Zahl steht bei diesen Mauern im mittleren P...

Algebra aus didaktischer Perspektive

- Algebraisches Denken
- Algebraische Lerngegenstände
- Radford (2010) : Algebraisches Denken ist...
 - ...Denken mit unbestimmten Objekten
 - ...Denken durch Erfassen von Beziehungen zwischen den Objekten
 - ...Denken vermittelt (symbolischer und anderer) Repräsentationen der Objekte und ihrer Beziehungen
- Hefendehl-Hebeker und Rezat (2015)

Algebraisches Denken impliziert ein sich im Lernprozess ausweitendes Spektrum von Fähigkeiten, das sich in Tätigkeiten wie den folgenden artikuliert:

1. Strukturen in Form von Beziehungen zwischen Zahlen und Größen erkennen
2. Gesetzmäßigkeiten des Operierens mit Zahlen und Größen erfassen
3. Strukturen und Gesetzmäßigkeiten in begrifflicher und symbolischer Form beschreiben
4. symbolische Ausdrücke regelgeleitet und zielbezogen umformen
5. sachgerecht interpretieren und neue Informationen ablesen

Algebra aus didaktischer Perspektive

- Algebraisches Denken
- Algebraische Lerngegenstände

- Variablen
- Terme
- Gleichungen

Variablenaspekte

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen
- Der Buchstabe wird
als Zeichen für eine Zahl
verstanden
(**Gegenstandsaspekt**)
- Der Buchstabe wird
tatsächlich oder gedanklich
durch eine Zahl ersetzt
(**Einsetzungsaspekt**)
- Der Buchstabe ist
Gegenstand eines Kalküls
(**Kalkülaspekt**)

(Malle, 1993)

...wenn Symbolsinn fehlt

fruit salad algebra

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

“a is apples and b is bananas,
and so $3a + 2b$ is like 3 apples and 2 bananas,
and since you can't add apples and bananas
we just write it as $3a + 2b$.”

Umkehrfehler

“There are
six times as many students
as professors at this university.”

Use S for the number of students
and P for the number of professors.

$$6 \cdot S = 1 \cdot P$$

Symbolsinn unterstützen

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

- sprachliche Sorgfalt:

“a steht für die *Anzahl der Äpfel...*”

“a steht für die *Länge der Seite a...*”

- Wertetabellen:

*Bestimme x als
Lösung der Gleichung*

$$2x + 3 = 3x - 1$$

x	2x+3	3x-1	w/f
2	7	5	f
7	17	20	f
5	13	14	f
4	11	11	w
...

Symbolsinn unterstützen

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

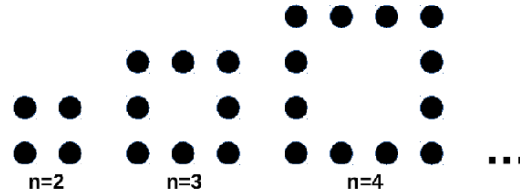
- sprachliche Sorgfalt:

“a steht für die *Anzahl der Äpfel...*”

“a steht für die *Länge der Seite a...*”

- Wertetabellen:

*Entwickle eine Formel
für die Anzahl der Punkte
in der n-ten Figur*



n	Anzahl
2	4
3	8
4	12
5	16
n	$4 \cdot (n-1)$

Symbolsinn unterstützen

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

- sprachliche Sorgfalt:

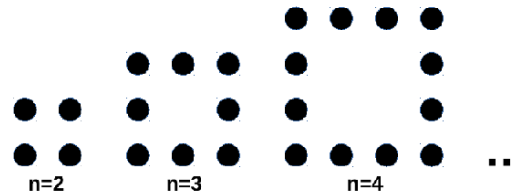
“a steht für die *Anzahl der Äpfel...*”

“a steht für die *Länge der Seite a...*”

- Wertetabellen:

- Strukturieren:

*Entwickle eine Formel
für die Anzahl der Punkte
in der n-ten Figur*



$$A(n) = 4 \cdot (n-1)$$

$$A(n) = 2n + 2(n-2)$$

$$A(n) = n^2 - (n-2)^2$$

...

Symbolsinn unterstützen

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

"There are
six times as many students
as professors at this university."
Use S for the number of students
and P for the number of professors."

$$6 \cdot S = 1 \cdot P$$



Symbolsinn unterstützen

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

"There are
six times as many students
as professors at this university."
Use S for the number of students
and P for the number of professors."

$$6 \cdot S = 1 \cdot P$$

1. konkret-
anschaulich
im Kontext

S	P
	





Symbolsinn unterstützen

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

"There are
six times as many students
as professors at this university."
Use S for the number of students
and P for the number of professors."

$$6 \cdot S = 1 \cdot P$$

1. konkret-
anschaulich
im Kontext

S	P
	
	













2. abstrakt-
formal
im Kontext

Symbolsinn unterstützen

- **symbol sense**
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

"There are
six times as many students
as professors at this university."
Use S for the number of students
and P for the number of professors."

1. konkret-
anschaulich
im Kontext

S	P
	
	
	
	
	
	
S = 6 P	

2. abstrakt-
formal
im Kontext

3. abstrakt-
formal in der
Algebra

Bezüge herstellen und Wiedererkennen

- symbol sense (Arcavi, 1993)
- **structure sense** (Arcavi, 2005)
- Gleichungen

Strukturieren meint

- das Herstellen von Bezügen zwischen Teiltermen eines gegebenen Terms
- das Wiedererkennen einer bekannten Termstruktur in einem gegebenen Term

im Effekt die Konstruktion einer “der Algebra immanenten” Semantik

Vereinfache:

$$\frac{6x^3 + 9x^2}{4x + 6}$$

Verwende
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,
um den Term $x^4 - y^4$
zu faktorisieren.

Faktorisiere nun auch
den Term $(x-3)^4 - (x+3)^4$.

...wenn Struktursinn fehlt

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

Sie brauchen die folgende Gleichung nicht vollständig zu vereinfachen.

$$3 + 2 \cdot (a - 4) = 3 \cdot (a - 4)$$

Aber wie würden Sie als erstes umformen?

- A** $3 + 2 \cdot a - 8 = 3 \cdot a - 12$ **B** $5 \cdot (a - 4) = 3 \cdot (a - 4)$
C $3 = a - 4$ **D** $5 \cdot a - 20 = 3 \cdot a - 12$

...wenn Struktursinn fehlt

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

$$\frac{\cancel{d} \cdot b + c}{\cancel{d} \cdot d} = \frac{b + c}{d}$$

inadäquate
Schemata

$$a \cdot b + \cancel{c} = \cancel{c} \cdot d \implies a \cdot b = d$$

perzeptive
Ähnlichkeit

$$\frac{\textcircled{a^2 + b}}{\textcircled{a^2 + b} \cdot c}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Übergeneralisierung

...wenn Struktursinn fehlt

- symbol sense
(Arcavi, 1993)

$$(x-3)^2(x-3)^2 - (x+3)^2(x+3)^2$$

- **structure sense**
(Arcavi, 2005)

$$\begin{aligned} & (x^2 - 6x + 9)^2 - (x^2 + 6x + 9)^2 \\ & = x^4 - 36x^2 + 81 - x^4 - 36x^2 - 81 \end{aligned}$$

- Gleichungen

$$x^4 - 12x + 81 - x^4 - 12x - 81$$

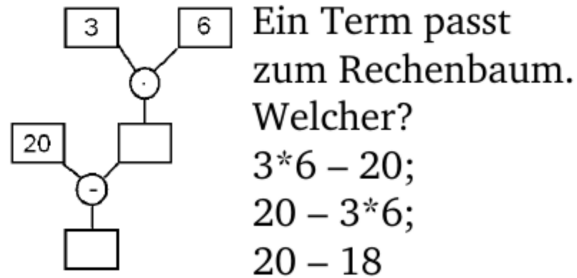
$$(x-3-x-3)^2(x-3+x+3)^2$$

Verwende
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,
um den Term $x^4 - y^4$
zu faktorisieren.

Faktorisiere nun auch
den Term $(x-3)^4 - (x+3)^4$.

Struktursinn unterstützen : Strukturen analysieren

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen



Rechenbäume

Klammergebirge

$$(98 - (20 - 4 \cdot 3)) : (10 - 1)$$

$$(98 - (20 - 4 \cdot 3)) : (10 - 1) = 10$$

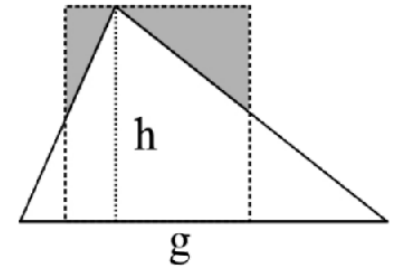
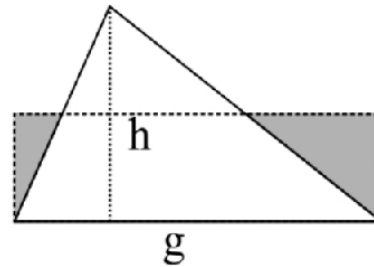
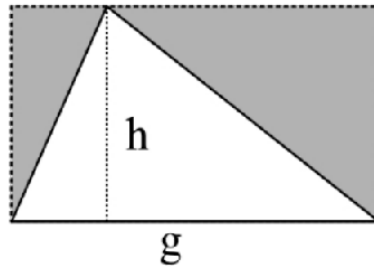
Struktursinn unterstützen : Terme und Figuren strukturieren

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

Alle drei Terme bilden
gültige Berechnungsformeln
für den Dreiecksflächeninhalt.

$$\frac{g \cdot h}{2} \quad g \cdot \frac{h}{2} \quad \frac{g}{2} \cdot h$$

Welcher Term gehört zu welcher Figur?



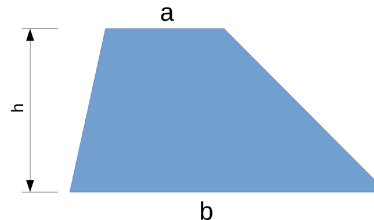
Struktursinn unterstützen : Terme und Figuren strukturieren

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

Alle drei Terme bilden
gültige Berechnungsformeln
für den Trapezflächeninhalt.

$$\frac{h \cdot (a+b)}{2} \quad (a+b) \cdot \frac{h}{2} \quad \frac{h \cdot a}{2} + \frac{h \cdot b}{2}$$

Begründe jeden Term
anhand einer geeigneten Strukturierung
dieser Figur:



Struktursinn unterstützen : “Wirkungslose Variation”

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

Klammern

1 Nimm die Zahl 2000 und verstecke sie auf verschiedene Arten:

	2000	2000	2000
Einfach versteckt	$(10\,000 : 5)$	$(1\,357 + 643)$	$(8 \cdot 250)$
Doppelt versteckt	$((4 \cdot 2\,500) : 5)$	$(1\,357 + (1\,929 : 3))$...
Dreifach versteckt	$((4 \cdot 2\,500) : (12 - 7))$...	
Vierfach versteckt	...		

Struktursinn unterstützen : “Wirkungslose Variation”

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

Entwickle einen Anwendungsfall
für die dritte binomische Formel,
indem du die Variablen ersetzt:

$$\begin{array}{l|l} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) & | a^2 = 16 \\ 16 - b^2 = (4+b)(4-b) & | b = t^2 \\ 16 - b^4 = (4+t^2)(4-t^2) & \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{l|l} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) & | a = 2u \\ 4u^2 - b^2 = (2u+b)(2u-b) & | b = (v+u)^2 \\ 4u^2 - (v+u)^4 = (2u + (v+u)^2)(2u - (v+u)^2) & \end{array}$$

zwei Lesarten des Gleichheitszeichens

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- structure sense
(Arcavi, 2005)
- **relational thinking**

•Das Gleichheitszeichen signalisiert eine Berechnung oder eine Umformung.

Ein Term ist die “Aufgabe”, der andere Term bzw. Zahl das “Ergebnis”

operationale Lesart:
“**Ergebniszeichen**”

•Das Gleichheitszeichen ist Ausdruck eines Vergleichs.

Beide Terme sind gleichwertig

relationale Lesart:
“**Vergleichszeichen**”

(Kieran, 1981; Filloy & Rojano, 1989; Malle, 1993)

zwei Lesarten des Gleichheitszeichens

	operationale vorherrschend	nur die relationale Lesart möglich
• symbol sense (Arcavi, 1993)		
• structure sense (Arcavi, 2005)	$3 + 5 = 8$	$3 + 5 = 2 + 6$
• relational thinking	$2x + 3 = 11$	$2x + 3 = 3x - 1$
	$A = \frac{h \cdot (a+b)}{2}$	
	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	

...wenn Gleichheit als Relation fehlt

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- structure sense
(Arcavi, 2005)
- **relational
thinking**

Gleichungsketten

$$3 + 5 = 8 + 6 = 14$$

lack of closure

$$\text{If } e+f = 8$$

$$e+f+g = 8+g = 8g$$

(Hodgen & al., 2008)

...Wenn Gleichheit als Relation fehlt

- symbol sense (Arcavi, 1993)
- structure sense (Arcavi, 2005)
- **relational thinking**

Formel umstellen

$$12 = 10 + b$$
$$2 = b$$

$$A = \frac{h \cdot (a+b)}{2}$$

$$24 = \frac{4 \cdot (10+b)}{2}$$

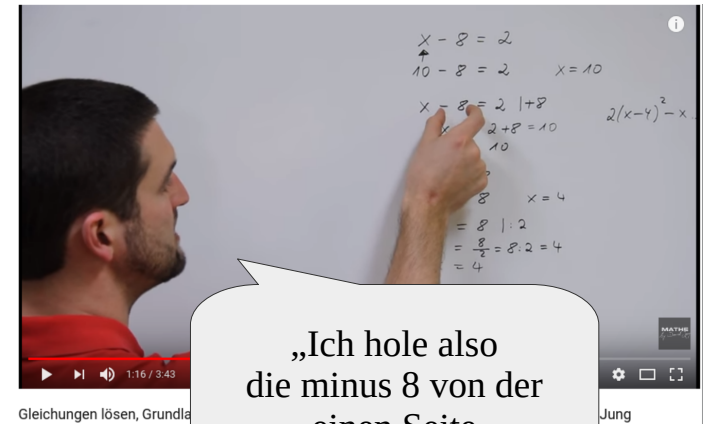
$$24 = 2 \cdot (10+b)$$

$2x + 3 = 11$
durch Operationsumkehr
verständlich lösbar,

$$2x + 3 = 3x - 1$$

nicht

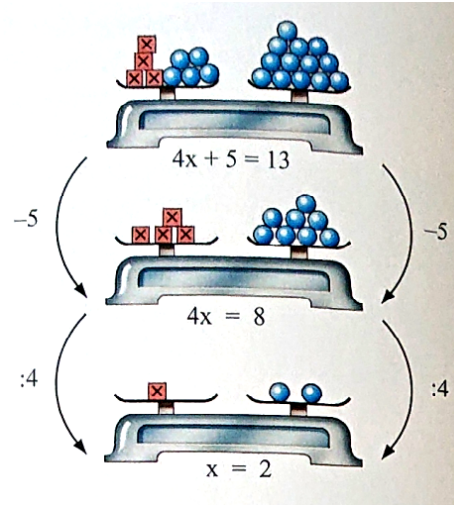
„rüberholen“



(Kieran, 1981; Malle, 1993)

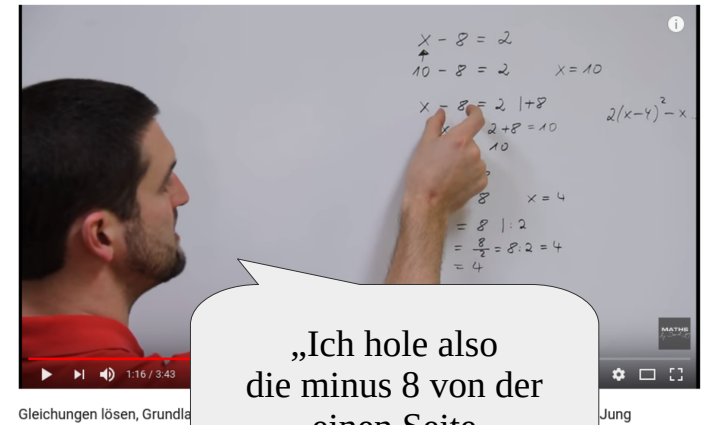
Gleichheit als Relation unterstützen : Die Waage als Erklärungsmodell

- symbol sense (Arcavi, 1993)
- structure sense (Arcavi, 2005)
- **relational thinking**



$$\begin{array}{l}
 x + 7 = 3 \\
 \xrightarrow{-7} \quad x + 7 - 7 = 3 - 7 \\
 \quad \quad \quad x = -4
 \end{array}$$

(mathe live 8)



„Ich hole also die minus 8 von der einen Seite plus 8 auf die andere.“

Gleichheit als Relation unterstützen : “Wirkungslose Variation”

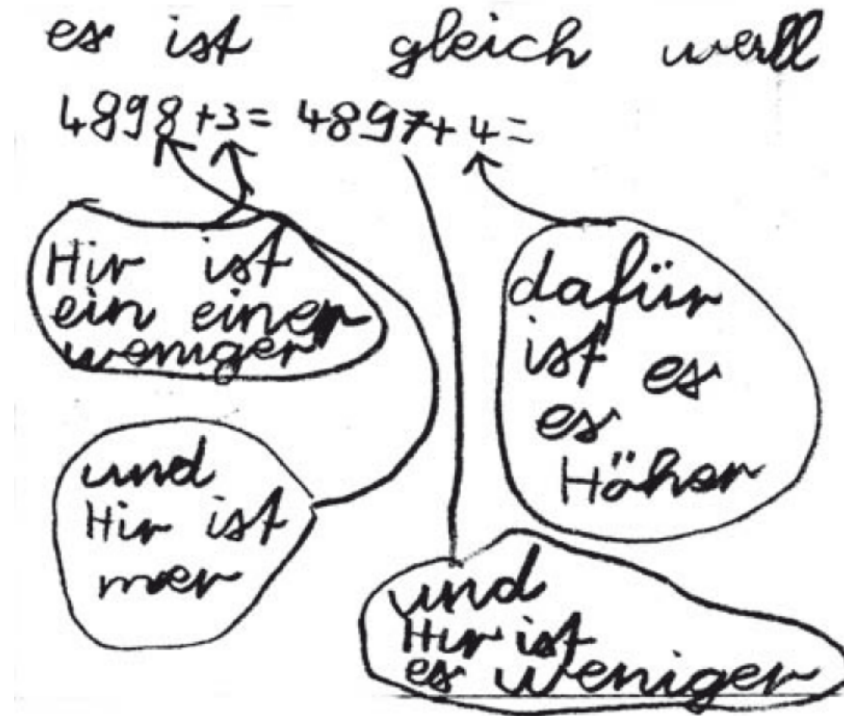
- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- structure sense
(Arcavi, 2005)
- **relational
thinking**

es ist gleich wert

$$4898 + 3 = 4897 + 4 =$$

Gleichheit als Relation unterstützen : “Wirkungslose Variation”

- symbol sense (Arcavi, 1993)
- structure sense (Arcavi, 2005)
- **relational thinking**



(Steinweg, 2013)

Gleichheit als Relation unterstützen : “Wirkungslose Variation”

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- structure sense
(Arcavi, 2005)
- **relational thinking**

Ergänze (ohne umzuformen!)

$$131x + 133x + 135x = 132x + 132x + \square$$

$$17x \cdot 3 - \square \cdot 3x = 119 \cdot 2x - 2 \cdot 119x$$

Überlege für jede Gleichung:
Sind die beiden Terme tatsächlich
wie behauptet wertgleich?

$$247x - 178x = x + 246x - 179x$$

$$65(12x - 7) = 13(60x - 35)$$

(Rüede, 2012, 2015)

Gleichheit als Relation unterstützen : “Wirkungslose Variation”

Entwickle eine komplexe Bestimmungsgleichung durch fortgesetzte Anwendung von Term- und Äquivalenzumformungen:

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
- structure sense
(Arcavi, 2005)
- **relational thinking**

$$\begin{array}{l} x = 2 \\ 4x = 8 \\ 4x + 3 = 11 \\ -2x + 3 = 11 - 6x \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot 4 \\ | +3 \\ | -6x \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 - 16 = -12 \\ (x+4)(x-4) = -12 \\ 3(x-4)(x-4) = -36 \end{array} \quad \begin{array}{l} | -16 \\ | \text{Binomi 3} \\ | \cdot 3 \end{array}$$

Gleichheit als Relation unterstützen : Flexibilität entwickeln

- symbol sense
(Arcavi, 1993)
 - structure sense
(Arcavi, 2005)
 - **relational thinking**
1. Lösen Sie die Gleichung
 $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$.
 2. Lösen Sie dieselbe Gleichung noch einmal,
jetzt aber auf anderem Weg.
 3. Lösen Sie dieselbe Gleichung ein drittes Mal,
jetzt wieder auf andere Weise.

(Rüede, 2012)

Gleichheit als Relation unterstützen : Flexibilität entwickeln

- symbol sense (Arcavi, 1993)
- structure sense (Arcavi, 2005)
- **relational thinking**

Bertas Lösung:		Erikas Lösung:	
$\frac{4x^2-16}{2x-4}$	Ausklammern	$\frac{4x^2-16}{2x-4}$	3. binomische Formel anwenden
$\frac{4(x^2-4)}{2(x-2)}$	Kürzen	$\frac{(2x+4)(2x-4)}{2x-4}$	Kürzen
$\frac{2(x^2-4)}{x-2}$	3. binomische Formel anwenden	$2x+4$	
$\frac{2(x+2)(x-2)}{x-2}$	Kürzen		
$2(x+2)$	Ausmultiplizieren		
$2x+4$			

1. Beide haben die Aufgabe unterschiedlich gelöst, erhalten aber dasselbe Ergebnis – warum?
2. Welchen Weg würdest du wählen?

Gleichheit als Relation unterstützen : Flexibilität entwickeln

27| Welches Verfahren ist das günstigste?

In der Tabelle sind verschiedene Verfahren zum Lösen einer quadratischen Gleichung zusammengefasst.

- symbol sense (Arcavi, 1993)
- structure sense (Arcavi, 2005)
- **relational thinking**

Wurzelziehen	$4x^2 = 20$
Wurzelziehen	$(x+4)^2 = 15$
Ausklammern (Faktorisieren)	$3x^2 - 15x = 0$ „Produkt=0“-Regel
Quadratisches Ergänzen	$x^2 - 12x + 10 = 0$
pq-Formel	$3x^2 - 8x - 15 = 0$



- Löse die Gleichungen in der Tabelle nach dem jeweiligen Verfahren.
- Die pq-Formel kann man immer anwenden. Löse die Gleichung in der ersten Zeile der Tabelle mit der pq-Formel. Was geht schneller, das Lösen durch Wurzelziehen oder mit der pq-Formel?
- Löse die quadratischen Gleichungen. Entscheide zunächst, nach welchem Verfahren du rechnen willst.

(1) $3x^2 - 4x - 4 = 0$ (2) $(x+7)^2 = 5$ (3) $15x^2 = 5x$ (4) $8x^2 - 16 = 0$
 (5) $x^2 + 14x + 49 = 0$ (6) $x^2 + 20x = 0$ (7) $(x+3)^2 = 36$ (8) $(x+6)(x-4) = 0$