Was ist Algebra?

eine Antwort aus
wissenschaftlicher und
historischer Perspektive

Übersicht

- wissenschaftlich Perspektive
- historische Perspektive
- didaktische Perspektive

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechen-operationen
- bedient sich einer formalen Sprache

- elementare Algebra (Schulmathematik)

  Recheneigenschaften in
  N(+,·), Z(+,·), Q(+,·), R(+,·), V(⊕,⊙), z.B.

  - Addition und Multiplikation immer kommutativ
  - alle Mengen bzgl. Addition und Multiplikation immer abgeschlossen
  - in N fehlen inverse Elemente bzgl. Addition und Multiplikation
  - in Z fehlen inverse Elemente bzgl. Multiplikation
  - Q nicht dicht
  - ...

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechen-operationen

- bedient sich einer formalen Sprache

- elementare Algebra (Schulmathematik)

  Recheneigenschaften in
  $N(+,\cdot)$, $Z(+,\cdot)$, $Q(+,\cdot)$, $R(+,\cdot)$, $V(\oplus,\odot)$

- Algebra (Hochschulmathematik)

  Recheneigenschaften allgemein beschreiben, z.B.

  - Gruppen
  - Ringe
  - Körper
  - ...

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechen-operationen

- bedient sich einer formalen Sprache

- regelgeleitetes Verknüpfen von Zeichen
- Gründe
  - Verallgemeinern:
    - Gesetzmäßigkeiten für ganze Klassen von Objekten ausdrücken können, etwa

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{R} \;:\; p \in \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow\; \exists\, n, z \in \mathbb{Z} : p = n/z}$$

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechen-operationen
- bedient sich einer formalen Sprache

- regelgeleitetes Verknüpfen von Zeichen
- Gründe
  - Verallgemeinern
  - Abstrahieren
    - nicht empirisches, sondern theoretisches Begründen der Gültigkeit solcher Gesetzmäßigkeiten

$$
\begin{aligned}
&\text{Angenommen, dass } \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \\
\Rightarrow\ & \exists\, n, z \in \mathbb{Z} \text{ und } n, z \text{ sind teilerfremd} : \sqrt{2} = z/n \\
\Rightarrow\ & 2 \cdot n^2 = z^2 \\
\Rightarrow\ & \exists\, k \in \mathbb{Z}\ : 2 \cdot k = z \\
\Rightarrow\ & n^2 = 2 \cdot k^2 \\
\Rightarrow\ & \exists\, l \in \mathbb{Z} : n = 2 \cdot l \\
\Rightarrow\ & n, z \ \text{ sind nicht teilerfremd}
\end{aligned}
$$

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechen-operationen

- bedient sich einer formalen Sprache

- regelgeleitetes Verknüpfen von Zeichen
- Gründe
  - Verallgemeinern
  - Abstrahieren
  - Generieren
    - nicht nur Begründungen existierender Vermutungen, sondern Erzeugen von Vermutungen, die außerhalb der Algebra nicht erkennbar wären:

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechen-operationen

- bedient sich einer formalen Sprache

$\mathbb{M}$ heißt abzählbar genau dann, wenn es eine surjektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ gibt.

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

	1	2	3	4	5	6
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar:

Unter allen gezählten Zahlen

$$0{,}z_{11}z_{12}z_{13}z_{14}\ldots$$
$$0{,}z_{21}z_{22}z_{23}z_{24}\ldots$$
$$0{,}z_{31}z_{32}z_{33}z_{34}\ldots$$
$$0{,}z_{41}z_{42}z_{43}z_{44}\ldots$$
$$\ldots$$

ist

$$0{,}x_{11}x_{22}x_{33}x_{44}\ldots, \qquad x_{ii} \neq z_{ii}$$

noch nicht gezählt.

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechen-operationen

- bedient sich einer formalen Sprache

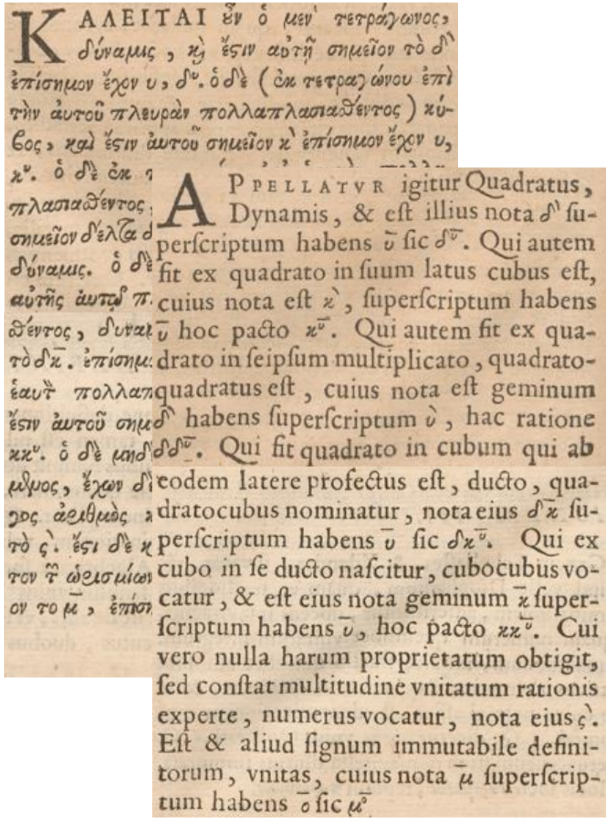
- regelgeleitetes Verknüpfen von Zeichen
- Gründe
  - Verallgemeinern:
    - Gesetzmäßigkeiten für ganze Klassen von Objekten ausdrücken können
  - Abstrahieren
    - nicht empirisches, sondern theoretisches Begründen der Gültigkeit solcher Gesetzmäßigkeiten
  - Generieren
    - nicht nur Begründungen existierender Vermutungen, sondern Erzeugen von Vermutungen, die außerhalb der Algebra nicht erkennbar wären

Übersicht

- wissenschaftlich
  Perspektive
- historische
  Perspektive
- didaktische
  Perspektive

Diophant (~ 250 v.Chr.) : Buchstaben als Platzhalter

- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren


ΚΑΛΕΙΤΑΙ οὖν ὁ μὲν τετράγωνος, δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ δ ἐπίσημον ἔχον υ, δ^{υ}. ὁ δὲ (ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν πολλαπλασιασθέντος) κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον κ ἐπίσημον ἔχον υ, κ^{υ}.

APPELLATVR igitur Quadratus, Dynamis, & est illius nota δ superscriptum habens υ sic δ^{υ}. Qui autem fit ex quadrato in suum latus cubus est, cuius nota est κ, superscriptum habens υ hoc pacto κ^{υ}. Qui autem fit ex quadrato in seipsum multiplicato, quadratoquadratus est, cuius nota est geminum δ habens superscriptum υ, hac ratione $\delta\delta^{\upsilon}$. Qui fit quadrato in cubum qui ab eodem latere profectus est, ducto, quadratocubus nominatur, nota eius δκ superscriptum habens υ sic $\delta\kappa^{\upsilon}$. Qui ex cubo in se ducto nascitur, cubocubus vocatur, & est eius nota geminum κ superscriptum habens υ, hoc pacto $\kappa\kappa^{\upsilon}$. Cui vero nulla harum proprietatum obtigit, sed constat multitudine vnitatum rationis experte, numerus vocatur, nota eius ς. Est & aliud signum immutabile definitorum, vnitas, cuius nota μ superscriptum habens ο sic μ^{o}

- Lösungsverfahren
  von etwa 300 Gleichungen
- generische Beispiele
- Buchstaben als Platzhalter
  für die gesuchte Lösung
  (und ihre Potenzen)

al-Chwarizmi (9. Jh.) : „Algebra“

- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren

Von Al-Chwarizmi - Bodleian Libraries, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=43327479

- „Al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-ʾl-muqābala“

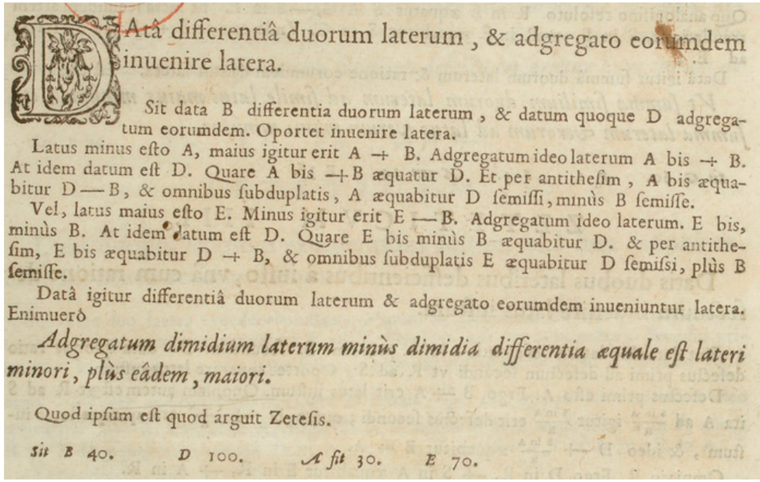
  (Das kurzgefasste Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen)

- Größen und Verfahren sind verbal ausgedrückt

- Begründungen erfolgen geometrisch

Vieta (16. Jh.) : Formelsprache

- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren



DAtâ differentiâ duorum laterum , & adgregato eorumdem inuenire latera.

Sit data B differentia duorum laterum , & datum quoque D adgregatum eorumdem. Oportet inuenire latera.

Latus minus eſto A, maius igitur erit A + B. Adgregatum ideo laterum A bis + B. At idem datum eſt D. Quare A bis + B æquatur D. Et per antitheſim , A bis æquabitur D — B, & omnibus ſubduplatis, A æquabitur D ſemiſſi, minùs B ſemiſſe.

Vel, latus maius eſto E. Minus igitur erit E — B. Adgregatum ideo laterum. E bis, minùs B. At idem datum eſt D. Quare E bis minùs B æquabitur D. & per antitheſim, E bis æquabitur D + B, & omnibus ſubduplatis E æquabitur D ſemiſsi, plùs B ſemiſſe.

Datâ igitur differentiâ duorum laterum & adgregato eorumdem inueniuntur latera. Enimuerò

Adgregatum dimidium laterum minùs dimidia differentia æquale eſt lateri minori, plùs eâdem, maiori.

Quod ipſum eſt quod arguit Zeteſis.

Sit B 40. *D* 100. *A fit* 30. *E* 70.

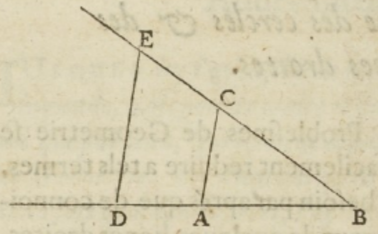
- Buchstaben als Platzhalter für die gesuchte Lösung
- Buchstaben als Parameter für gegebene Größen
- Rechen- und Gleichheitszeichen von Widmann (15. Jh.)
- Begründungen zwar symbolisch, aber weiterhin geometrisch motiviert

(→ Homogenitätsgesetz:
$x + x^2$ eine sinnlose Verknüpfung unterschiedlicher Größen)

Descartes (17. Jh.) : Algebra als Ordnungswerkzeug

- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren

La Multiplication.



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de

tion, en tous par vne meſme. Et que lorſque cete equation ne monte que iuſques au rectangle de deux quantités indeterminées, oubien au quarré d'vne meſme, la ligne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans lequel il ny a que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'Ellipſe qui ſoient compriſes. mais que lorſque l'equation monte iuſques a la trois ou quatrieſme dimenſion des deux, ou de l'vne des deux quantités indeterminées, car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn point a vn autre, elle eſt du ſecond: & que lorſque l'equation monte iuſques a la 5 ou ſixieſme dimenſion, elle eſt du troiſieſme; & ainſi des autres a l'infini.

- Überwindung des Homogenitätsgesetzes
- Klassifikation von Gleichungen nach deren höchstem Potenzgrad

Übersicht

- wissenschaftlich Perspektive
- historische Perspektive
- didaktische Perspektive

Das Verallgemeinern,
das Abstrahieren und
das Generieren von Wissen

begründen auch
die Algebra in der Schule

...