

Lernschwierigkeiten Algebra

# **Didaktische Herausforderungen**

# Welche Herausforderungen sehen Sie?



<https://flinga.fi/s/FER6TG6>

# Übersicht

- Phänomene
- Erklärungen
- Themen

- **Variablen**

“a is apples and b is bananas,  
and so  $3a + 2b$  is like 3 apples and 2 bananas,  
and since you can't add apples and bananas  
we just write it as  $3a + 2b$ .”

(MacGregor & Stacey, 1997; Chick, 2009)

- Variablen
- **Terme**

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

- Variablen
- Terme
- **Gleichungen**

Von einem Trapez sind der Flächeninhalt  $A = 24 \text{ cm}^2$ , die Höhe  $h = 4 \text{ cm}$  und die Länge einer der beiden parallelen Seiten  $a = 10 \text{ cm}$  bekannt. Berechne die Länge der anderen parallelen Seite.

$$A = \frac{h \cdot (a+b)}{2}$$

$$24 = \frac{4 \cdot (10+b)}{2}$$

$$24 = 2 \cdot (10+b)$$

$$12 = 10+b$$

$$2 = b$$

# Übersicht

- Phänomene
- Erklärungen
- Themen

- Variablen
- Terme
- Gleichungen



# Variablenaspekte

- **symbol sense**  
(Arcavi, 1993)
  - Terme
  - Gleichungen
- Der Buchstabe wird als Zeichen für eine Zahl verstanden  
(**Gegenstandsaspekt**)
  - Der Buchstabe wird tatsächlich oder gedanklich durch eine Zahl ersetzt  
(**Einsetzungsaspekt**)
  - Der Buchstabe ist Gegenstand eines Kalküls  
(**Kalkülaspekt**)

(Malle, 1993)

# ...wenn Symbolsinn fehlt

fruit salad algebra

- **symbol sense**  
(Arcavi, 1993)
- Terme
- Gleichungen

“a is apples and b is bananas,  
and so  $3a + 2b$  is like 3 apples and 2 bananas,  
and since you can't add apples and bananas  
we just write it as  $3a + 2b$ .”

## Umkehrfehler

“There are  
six times as many students  
as professors at this university.”

Use S for the number of students  
and P for the number of professors.

$$6 \cdot S = 1 \cdot P$$

# Bezüge herstellen und Wiedererkennen

- symbol sense  
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**  
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

Strukturieren meint

- das Herstellen von Bezügen zwischen Teiltermen eines gegebenen Terms
- das Wiedererkennen einer bekannten Termstruktur in einem gegebenen Term

im Effekt die Konstruktion einer “der Algebra immanenten” Semantik

Vereinfache:

$$\frac{6x^3 + 9x^2}{4x + 6}$$

Verwende  
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ,  
um den Term  $x^4 - y^4$   
zu faktorisieren.

Faktorisiere nun auch  
den Term  $(x-3)^4 - (x+3)^4$ .

# ...wenn Struktursinn fehlt

- symbol sense  
(Arcavi, 1993)

$$(x-3)^2(x-3)^2 - (x+3)^2(x+3)^2$$

- **structure sense**  
(Arcavi, 2005)

$$\begin{aligned} & (x^2 - 6x + 9)^2 - (x^2 + 6x + 9)^2 \\ & = x^4 - 36x^2 + 81 - x^4 - 36x^2 - 81 \end{aligned}$$

- Gleichungen

$$x^4 - 12x + 81 - x^4 - 12x - 81$$

$$(x-3-x-3)^2(x-3+x+3)^2$$

Verwende  
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ,  
um den Term  $x^4 - y^4$   
zu faktorisieren.

Faktorisiere nun auch  
den Term  $(x-3)^4 - (x+3)^4$ .

# ...wenn Struktursinn fehlt

- symbol sense  
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**  
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

Sie brauchen die folgende Gleichung nicht vollständig zu vereinfachen.

$$3 + 2 \cdot (a - 4) = 3 \cdot (a - 4)$$

Aber wie würden Sie als erstes umformen?

- A**  $3 + 2 \cdot a - 8 = 3 \cdot a - 12$       **B**  $5 \cdot (a - 4) = 3 \cdot (a - 4)$   
**C**  $3 = a - 4$       **D**  $5 \cdot a - 20 = 3 \cdot a - 12$

# ...wenn Struktursinn fehlt

- symbol sense  
(Arcavi, 1993)
- **structure sense**  
(Arcavi, 2005)
- Gleichungen

$$\frac{\cancel{d} \cdot b + c}{\cancel{d} \cdot d} = \frac{b + c}{d}$$

inadäquate  
Schemata

$$a \cdot b + \cancel{c} = \cancel{c} \cdot d \implies a \cdot b = d$$

perzeptive  
Ähnlichkeit

$$\frac{\textcircled{a^2 + b}}{\textcircled{a^2 + b} \cdot c}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Übergeneralisierung

# zwei Lesarten des Gleichheitszeichens

- symbol sense (Arcavi, 1993)
  - structure sense (Arcavi, 2005)
  - **relational thinking**
- Das Gleichheitszeichen signalisiert eine Berechnung oder eine Umformung.  
Ein Term ist die “Aufgabe”, der andere Term bzw. Zahl das “Ergebnis”  
operationale Lesart: **“Ergebniszeichen”**
  - Das Gleichheitszeichen ist Ausdruck eines Vergleichs.  
Beide Terme sind gleichwertig  
relationale Lesart: **“Vergleichszeichen”**

(Kieran, 1981; Filloy & Rojano, 1989; Malle, 1993)

# zwei Lesarten des Gleichheitszeichens

- symbol sense (Arcavi, 1993)
- structure sense (Arcavi, 2005)
- **relational thinking**

operationale  
vorherrschend

$$3 + 5 = 8$$

$$2x + 3 = 11$$

$$A = \frac{h \cdot (a+b)}{2}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

nur die  
relationale Lesart  
möglich

$$3 + 5 = 2 + 6$$

$$2x + 3 = 3x - 1$$



# ...wenn Gleichheit als Relation fehlt

- symbol sense  
(Arcavi, 1993)
- structure sense  
(Arcavi, 2005)
- **relational  
thinking**

## Gleichungsketten

$$3 + 5 = 8 + 6 = 14$$

lack of closure

$$\text{If } e+f = 8$$

$$e+f+g = 8+g = 8g$$

(Hodgen & al., 2008)

# ...wenn Gleichheit als Relation fehlt

- symbol sense (Arcavi, 1993)
- structure sense (Arcavi, 2005)
- **relational thinking**

$$A = \frac{h \cdot (a+b)}{2}$$

$$24 = \frac{4 \cdot (10+b)}{2}$$

$$24 = 2 \cdot (10+b)$$

Formel umstellen

$$12 = 10+b$$
$$2 = b$$

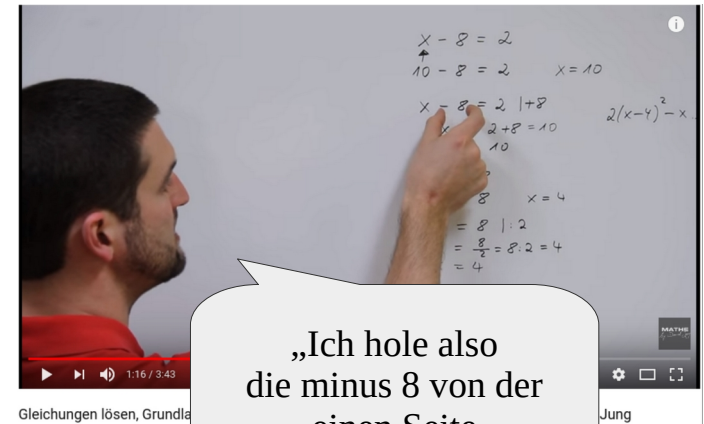
(Kieran, 1981; Malle, 1993)

$2x + 3 = 11$   
durch Operationsumkehr  
verständlich lösbar,

$$2x + 3 = 3x - 1$$

nicht

“rüberholen”



„Ich hole also die minus 8 von der einen Seite plus 8 auf die andere.“

# Übersicht

- Phänomene
- Erklärungen
- Themen



[https://nextcloud.pinkernell.online/  
index.php/s/rNgGH6tNmQgQcm5](https://nextcloud.pinkernell.online/index.php/s/rNgGH6tNmQgQcm5)