

Lernschwierigkeiten Algebra

Was ist Algebra?

Übersicht

- wissenschaftlich
Perspektive
- historische
Perspektive
- didaktische
Perspektive

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechenoperationen
- bedient sich einer formalen Sprache
- elementare Algebra (Schulalgebra)
Recheneigenschaften in $N(+, \cdot)$, $Z(+, \cdot)$, $Q(+, \cdot)$, $R(+, \cdot)$, $V(\oplus, \odot)$, z.B.
 - Addition und Multiplikation immer kommutativ
 - alle Mengen bzgl. Addition und Multiplikation immer abgeschlossen
 - in N fehlen inverse Elemente bzgl. Addition und Multiplikation
 - in Z fehlen inverse Elemente bzgl. Multiplikation
 - Q nicht dicht
 - ...

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

- untersucht Eigenschaften von Rechenoperationen
- bedient sich einer formalen Sprache
- elementare Algebra (Schulmathematik)
Recheneigenschaften in $N(+, \cdot)$, $Z(+, \cdot)$, $Q(+, \cdot)$, $R(+, \cdot)$, $V(\oplus, \odot)$,
- Algebra (Hochschulmathematik)
Recheneigenschaften allgemein beschreiben, z.B.
 - Symmetriegruppen

Algebra aus wissenschaftlicher Perspektive

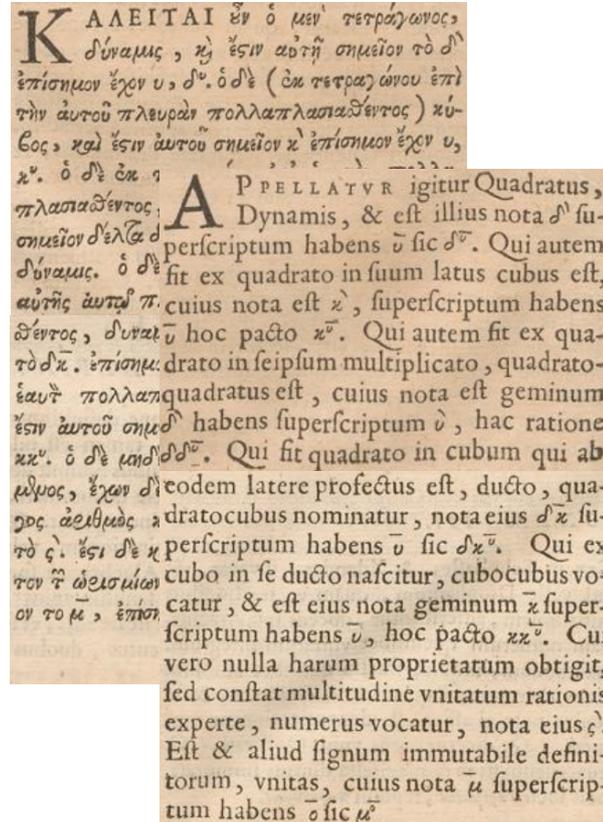
- untersucht Eigenschaften von Rechenoperationen
- bedient sich einer formalen Sprache
- regelgeleitetes Verknüpfen von bedeutungslosen Zeichen
- Gründe
 - Verallgemeinern:
 - Gesetzmäßigkeiten für ganze Klassen von Objekten ausdrücken können
 - Abstrahieren
 - nicht empirisches, sondern theoretisches Begründen der Gültigkeit solcher Gesetzmäßigkeiten
 - neues Wissen generieren
 - nicht nur Begründungen existierender Vermutungen, sondern Erzeugen von Vermutungen, die außerhalb der Algebra nicht erkennbar wären

Übersicht

- wissenschaftlich
Perspektive
- historische
Perspektive
- didaktische
Perspektive

Diophant (~ 250 v.Chr.) : Buchstaben als Platzhalter

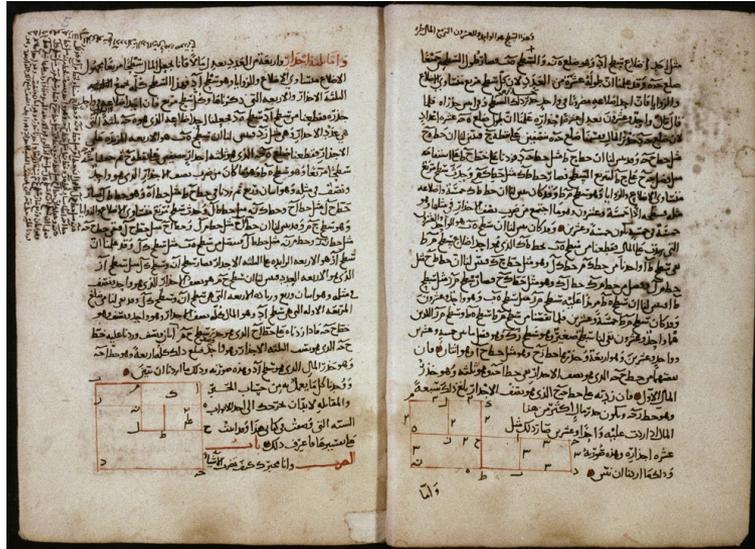
- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren



- Lösungsverfahren von etwa 300 Gleichungen
- generische Beispiele
- Buchstaben als Platzhalter für die gesuchte Lösung (und ihre Potenzen)

al-Chwarizmi (9. Jh.) : „Algebra“

- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren

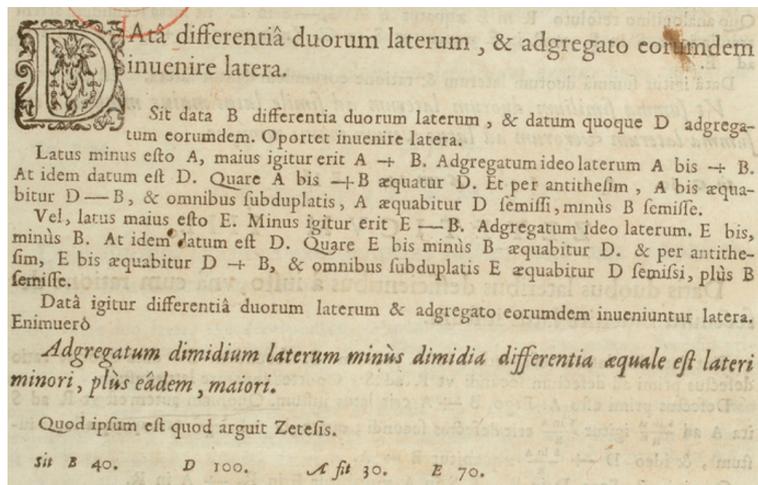


Von Al-Chwarizmi - Bodleian Libraries, Gemeinfrei,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=43327479>

- „Al-Kitāb al-muḥtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-'l-muqābala“
(Das kurzgefasste Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen)
- Größen und Verfahren sind verbal ausgedrückt
- Begründungen erfolgen geometrisch

Vieta (16. Jh.) : Formelsprache

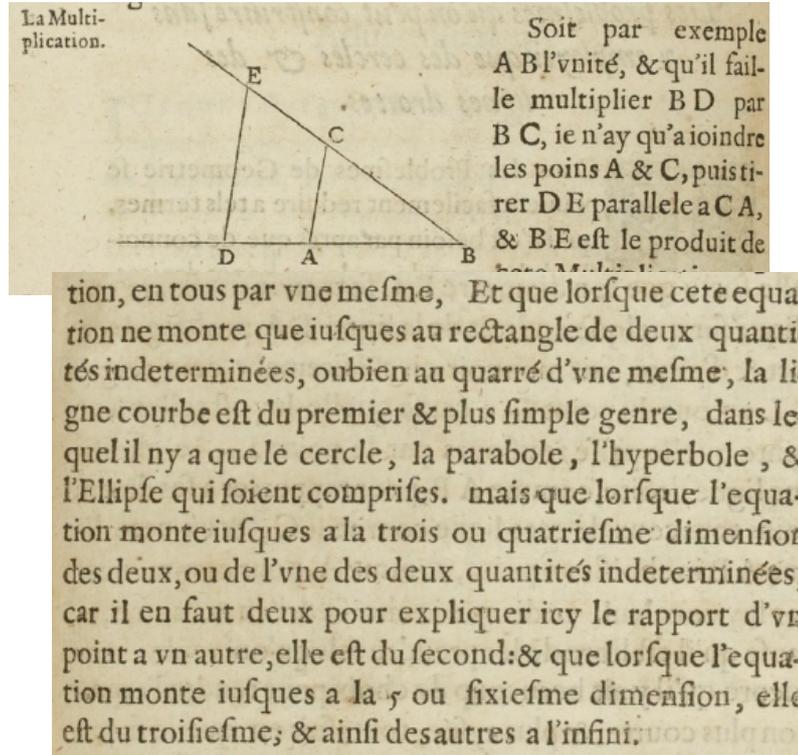
- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren



- Buchstaben als Platzhalter für die gesuchte Lösung
- Buchstaben als Parameter für gegebene Größen
- Rechen- und Gleichheitszeichen von Widmann (15. Jh.)
- Begründungen zwar symbolisch, aber weiterhin geometrisch motiviert
(→ Homogenitätsgesetz:
 $x + x^2$ eine sinnlose Verknüpfung unterschiedlicher Größen)

Descartes (17. Jh.) : Algebra als Ordnungswerkzeug

- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren



- Überwindung des Homogenitätsgesetzes
- Klassifikation von Gleichungen nach deren höchstem Potenzgrad

Übersicht

- wissenschaftlich
Perspektive
- historische
Perspektive
- didaktische
Perspektive

- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Generieren

Addieren und Subtrahieren üben

... mit gleichen Grundsteinen

„...denn die mittlere Zahl geht ja zweimal in das Ergebnis ein.“

„Das Ergebnis berechnet sich als Summe der Werte des linken und rechten Basissteins und des doppelten Werts des mittleren.“

$$d = b_l + 2 \cdot b_m + b_r$$

„...das sind die zwei Mauern mit 23 und 12 außen und 31 innen“

„... da steht die größte Zahl der drei Zahlen drin.“

„Immer wenn in der Mitte die größte von drei Zahlen steht, dann steht im Deckstein das größte Ergebnis.“

- a) Welche Zahl steht im oberen Deckstein?
 b) Finde die Summe der drei Basissteine.
 c) Welche Zahl steht im unteren Deckstein?
 Welche Zahl steht bei diesen Mauern im mittleren Deckstein?

Algebra aus didaktischer Perspektive

- Algebraisches Denken
- Herausforderungen

Addieren und Subtrahieren üben

① Zahlenmauern mit gleichen Grundsteinen

Gleiche Zahlen in den Basissteinen.

Gleiche Ergebnisse in den Decksteinen?

M

- Welche Ergebnisse bekommen Lea und Tim oben im Deckstein?
- Finde viele verschiedene Mauern mit diesen Basissteinen.
- Welche Mauern haben das größte Ergebnis im Deckstein?
Welche Zahl steht bei diesen Mauern im mittleren Basisstein?

Algebra aus didaktischer Perspektive

- Algebraisches Denken
- Herausforderungen
- Radford (2010) : Algebraisches Denken ist...
 - ...Denken mit unbestimmten Objekten
 - ...Denken durch Erfassen von Beziehungen zwischen den Objekten
 - ...Denken vermittelt (symbolischer und anderer) Repräsentationen der Objekte und ihrer Beziehungen
- Hefendehl-Hebeker und Rezat (2015)

Algebraisches Denken impliziert ein sich im Lernprozess ausweitendes Spektrum von Fähigkeiten, das sich in Tätigkeiten wie den folgenden artikuliert:

1. Strukturen in Form von Beziehungen zwischen Zahlen und Größen erkennen
2. Gesetzmäßigkeiten des Operierens mit Zahlen und Größen erfassen
3. Strukturen und Gesetzmäßigkeiten in begrifflicher und symbolischer Form beschreiben
4. symbolische Ausdrücke regelgeleitet und zielbezogen umformen
5. sachgerecht interpretieren und neue Informationen ablesen

Algebra aus didaktischer Perspektive

- Algebraisches Denken
- Herausforderungen