Quadratisch clever!

Übungsstunde Klasse 10 · Normalform ■ Scheitelform mit quadratischer Ergänzung

Name: _____ **Datum:** _____ **Arbeitszeit:** ca. 45 Min.

Heute kannst du … quadratische Terme durch quadratische Ergänzung zwischen Normalform **$f(x)=ax^2+bx+c$** und Scheitelform **$f(x)=a(x-h)^2+k$** umwandeln, den Scheitelpunkt ablesen und die Darstellung passend zur Aufgabe wählen.

Merke
Bei x^2+px ergänzt man **$(p/2)^2$**:
$x^2+px=(x+p/2)^2-(p/2)^2$
Bei $a\neq 1$ zuerst a bei den x-Termen ausklammern.

WIGORA-Landkarte: Wissen = Begriffe/Regel · Grundvorstellungen = Bedeutung verstehen · Operationale Flexibilität = sicher umformen · Repräsentationale Flexibilität = Darstellungen wechseln · Anwendungen = im Kontext nutzen

1 · Formen-Detektiv · Ordnen und begründen

W · Wissen

Ordne jeder Funktion die passende Form zu: **N** = Normalform, **S** = Scheitelform. Eine Funktion kann durch Ausmultiplizieren in die jeweils andere Form gebracht werden. Markiere außerdem bei den Scheitelformen den Scheitelpunkt.

a) $f(x)=x^2-6x+5$ Form: ____

b) $g(x)=(x+2)^2-7$ Form: ____ Scheitel S(____ | ____)

c) $h(x)=2(x-3)^2+1$ Form: ____ Scheitel S(____ | ____)

d) $p(x)=x^2+4x+4$ Form: ____

Begründe: Woran erkennst du die Scheitelform? _____

2 · Warum ergänzt man die Hälfte?

G · Grundvorstellungen

Vervollständige die Gleichungen. Nutze dabei die binomische Formel und erkläre in einem Satz, warum die Zahl halbiert wird.

a) x^2+8x+____ $=(x+$____$)^2$ b) x^2-10x+____ $=(x-$____$)^2$

Erklärung: _____

3 · Umformen mit System

O · Operationale Flexibilität

Wandle durch quadratische Ergänzung in die Scheitelform um. Schreibe die Zwischenschritte auf und kontrolliere durch Ausmultiplizieren.

a) $f(x)=x^2+6x+2$

b) $g(x)=x^2-4x-1$

Quadratisch clever! · Weiter geht’s

Rechne nachvollziehbar. Achte auf Vorzeichen und darauf, ob vor x^2 ein Faktor steht.

3 · Umformen mit System · Fortsetzung

O · Operationale Flexibilität

c) $h(x)=2x^2+12x+7$

4 · Zwischen Term, Scheitelpunkt und Graph

R · Repräsentationale Flexibilität

Gegeben ist **$f(x)=x^2-4x-5$**.

a) Wandle f in die Scheitelform um. _____

b) Lies den Scheitelpunkt ab: S(____ | ____). Bestimme außerdem die Nullstellen: x■=____, x■=____.

c) Skizziere den Graphen. Markiere Scheitelpunkt, Nullstellen und Symmetrieachse.

5 · Die Brücke im Park

A · Anwendungen

Der Querschnitt eines kleinen Brückenbogens wird im betrachteten Bereich durch **$h(x)=-0{,}5x^2+4x+1$** beschrieben. x und h(x) sind in Metern angegeben.

a) Forme h(x) durch quadratische Ergänzung in die Scheitelform um.

b) Wie hoch ist der Bogen an seiner höchsten Stelle, und bei welchem x-Wert liegt sie? Begründe mit der Scheitelform.

6 · Exit-Ticket · Ich kann …

R · Repräsentationale Flexibilität

Kreuze an und ergänze: ■ sicher ■ mit etwas Hilfe ■ noch unsicher

Der wichtigste Schritt bei x^2+px ist: _____

Eine Sache, auf die ich beim Umformen besonders achte: _____

Lösungen & WIGORA-Überblick

Hinweis für die Lehrkraft: Die Lösungen können für die Selbstkontrolle nach der Bearbeitung genutzt werden.

1 · Wissen	a) N. b) S, Scheitel S(–2 | –7). c) S, Scheitel S(3 | 1). d) N (auch als $(x+2)^2$ schreibbar). Scheitelform erkennt man an $a(x–h)^2+k$; daraus lässt sich der Scheitel direkt ablesen.
2 · Grundvorstellungen	a) $x^2+8x+16=(x+4)^2$. b) $x^2–10x+25=(x–5)^2$. Die linearen Koeffizienten werden halbiert, weil beim Quadrieren von $(x+a)^2$ der Mittelterm 2ax entsteht.
3 · Operationale Flexibilität	a) $x^2+6x+2=(x+3)^2–9+2=(x+3)^2–7$. b) $x^2–4x–1=(x–2)^2–4–1=(x–2)^2–5$. c) $2x^2+12x+7=2(x^2+6x)+7=2[(x+3)^2–9]+7=2(x+3)^2–11$.
4 · Repräsentationale Flexibilität	a) $f(x)=(x–2)^2–9$. b) Scheitel S(2 | –9); Nullstellen aus $(x–2)^2=9$: $x■=–1$, $x■=5$. Symmetrieachse x=2; Parabel nach oben geöffnet.
5 · Anwendungen	$h(x)=–0,5(x^2–8x)+1=–0,5[(x–4)^2–16]+1=–0,5(x–4)^2+9$. Der Scheitel ist S(4 | 9): höchste Stelle 9 m hoch bei x=4 m, denn der Koeffizient vor der Klammer ist negativ.
Didaktische Zuordnung	Aufgabe 1 aktiviert Begriffe und Erkennen (Wissen). Aufgabe 2 baut die Bedeutung der Halbierung über die binomische Formel auf (Grundvorstellungen). Aufgabe 3 trainiert das Verfahren, auch mit $a≠1$ (Operationale Flexibilität). Aufgabe 4 verknüpft Term, Scheitel, Nullstellen und Graph (Repräsentationale Flexibilität). Aufgabe 5 überträgt das Verfahren auf eine Sachsituation (Anwendungen). Exit-Ticket unterstützt Reflexion.