# Sachanalyse und didaktische Analyse

## Thema: Brüche ordnen und vergleichen - Klasse 6

### 1. Sachanalyse

Der Lerngegenstand der Unterrichtsstunde ist das Vergleichen und Ordnen von Brüchen. Brüche stellen Zahlen dar und können daher - ebenso wie natürliche Zahlen - hinsichtlich ihrer Größe miteinander verglichen und in eine Reihenfolge gebracht werden. Beim Vergleich zweier Brüche wird entschieden, welcher Bruch den größeren beziehungsweise kleineren Wert beschreibt oder ob beide Brüche gleichwertig sind. Zur Darstellung dieser Beziehungen werden die Vergleichszeichen <, > und = verwendet.

Ein Bruch a/b besteht aus Zähler und Nenner. Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wird, während der Zähler beschreibt, wie viele dieser Teile betrachtet werden. Für den Größenvergleich ist entscheidend, dass Veränderungen von Zähler und Nenner unterschiedliche Auswirkungen auf den Wert des Bruches haben. Daraus ergeben sich verschiedene Vergleichssituationen, die für die Lernenden unterschiedliche Anforderungen mit sich bringen.

Besitzen zwei Brüche denselben Nenner, können ihre Zähler direkt miteinander verglichen werden. So gilt beispielsweise 3/8 < 5/8, weil bei beiden Brüchen gleich große Achtel betrachtet werden, beim zweiten Bruch jedoch mehr dieser Teile vorhanden sind. Bei gleichem Nenner gilt daher: Je größer der Zähler, desto größer ist der Bruch. Haben zwei Brüche dagegen denselben Zähler, verhält sich der Vergleich umgekehrt. So ist 3/4 > 3/8, da Viertel größer als Achtel sind. Wird ein Ganzes in mehr gleich große Teile zerlegt, werden die einzelnen Teile kleiner. Bei gleichem Zähler gilt somit: Je größer der Nenner, desto kleiner ist der Bruch.

Sind sowohl Zähler als auch Nenner verschieden, ist ein unmittelbarer Vergleich häufig nicht möglich. Eine zentrale Strategie besteht dann darin, die Brüche durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen. Beispielsweise lassen sich 2/3 und 3/4 als 8/12 und 9/12 darstellen. Da 8/12 < 9/12 gilt, folgt 2/3 < 3/4. Das bereits bekannte Erweitern erhält dadurch eine neue Funktion: Es dient nicht nur dazu, gleichwertige Brüche zu erzeugen, sondern ermöglicht einen systematischen Größenvergleich. Das vorhandene Vorwissen der Lerngruppe kann damit unmittelbar für den neuen Lerngegenstand genutzt werden.

Neben dem rechnerischen Vergleich sind anschauliche Darstellungen von besonderer Bedeutung. Flächenmodelle, Bruchstreifen oder der Zahlenstrahl ermöglichen es, die Größe von Brüchen sichtbar zu machen. Vor allem der Zahlenstrahl unterstützt den Übergang von der Vorstellung eines Bruchs als Anteil eines Ganzen zur Vorstellung eines Bruchs als Zahl. Auf dem Zahlenstrahl gilt: Je weiter rechts ein Bruch liegt, desto größer ist sein Wert. Zusätzlich können bekannte Referenzwerte wie 0, 1/2 und 1 genutzt werden. So lässt sich beispielsweise erkennen, dass 3/8 kleiner als 1/2 und 5/8 größer als 1/2 ist.

Das Vergleichen und Ordnen von Brüchen verlangt somit ein Zusammenspiel verschiedener Grundvorstellungen und Strategien. Ziel ist nicht nur das Beherrschen einer Regel, sondern die Einsicht, dass Brüche Zahlen mit einer bestimmten Größe darstellen. Diese Einsicht bildet zugleich eine wichtige Grundlage für weitere Inhalte der Bruchrechnung, etwa das Einordnen von Brüchen auf dem Zahlenstrahl und das spätere Rechnen mit Brüchen.

## 2. Didaktische Analyse

Das Thema „Brüche ordnen und vergleichen“ wird in der vorliegenden sechsten Klasse erstmals explizit behandelt. Die Schülerinnen und Schüler verfügen jedoch bereits über grundlegende Erfahrungen mit Brüchen und haben das Erweitern und Kürzen von Brüchen kennengelernt. Dieses Vorwissen bildet eine zentrale Lernvoraussetzung, da es beim Vergleich ungleichnamiger Brüche genutzt werden kann. Die bereits bekannte Technik des Erweiterns wird damit in einen neuen Bedeutungszusammenhang gestellt und erhält für die Lernenden einen nachvollziehbaren Zweck.

Für die Einführung bietet sich ein anschaulicher und verständnisorientierter Zugang an. Ein ausschließlich formales Vorgehen birgt die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler zwar einen gemeinsamen Nenner herstellen, jedoch nicht verstehen, warum ein Bruch größer oder kleiner als ein anderer ist. Deshalb sollten zunächst Bruchdarstellungen, Bruchstreifen oder der Zahlenstrahl eingesetzt werden. An ihnen können die Lernenden Größenbeziehungen beobachten, beschreiben und begründen, bevor daraus Regeln und Rechenstrategien abgeleitet werden. Der gewählte Zugang entspricht damit der Forderung, fachliche Inhalte sowohl sachgerecht als auch lernendengerecht aufzubereiten und mögliche Grundvorstellungen beziehungsweise handlungsbasierte Zugänge einzubeziehen.

Eine typische Schwierigkeit ist der Vergleich von Brüchen mit gleichem Zähler. Lernende könnten beispielsweise vermuten, dass 3/8 größer als 3/4 sei, weil 8 größer als 4 ist. Hier zeigt sich die Übertragung einer aus den natürlichen Zahlen bekannten Denkweise auf Brüche. Dieser Fehlvorstellung kann durch Visualisierung begegnet werden: Werden zwei gleich große Ganze einmal in vier und einmal in acht gleich große Teile zerlegt, wird unmittelbar sichtbar, dass ein Achtel kleiner als ein Viertel ist. Wichtig ist dabei, stets gleich große Ganze als Bezugsgröße zu verwenden.

Auch bei Brüchen mit unterschiedlichen Zählern und Nennern sind Fehlansätze zu erwarten. Einige Schülerinnen und Schüler könnten lediglich die Zähler oder lediglich die Nenner miteinander vergleichen. An dieser Stelle kann eine problemorientierte Frage nach einer geeigneten Möglichkeit gestellt werden, die beiden Brüche besser vergleichbar zu machen. Das bekannte Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner bietet sich als Lösung an. Dadurch knüpft die Stunde direkt an die bisherigen Kenntnisse der Klasse an und macht deren Nutzen für eine neue Fragestellung sichtbar.

Didaktisch sinnvoll ist es, verschiedene Vergleichsstrategien zuzulassen und im Unterricht gemeinsam zu besprechen. Manche Brüche lassen sich aufgrund gleicher Nenner oder gleicher Zähler direkt vergleichen, andere über einen gemeinsamen Nenner oder über Referenzwerte wie 1/2 und 1. Auf diese Weise wird vermieden, dass das Vergleichen von Brüchen als starres Rechenschema verstanden wird. Vielmehr sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, Strukturen in den vorliegenden Brüchen zu erkennen und eine passende Strategie auszuwählen und zu begründen.

Der Zahlenstrahl besitzt dabei eine besondere Funktion, da er Brüche als Zahlen sichtbar macht und zugleich das Ordnen mehrerer Brüche unterstützt. Werden verschiedene Brüche auf einem Zahlenstrahl positioniert, können ihre Größenbeziehungen unmittelbar abgelesen und sprachlich beschrieben werden. Damit wird der Übergang vom paarweisen Vergleich zum Ordnen mehrerer Brüche vorbereitet. Gleichzeitig können unterschiedliche Lösungswege der Lernenden aufgegriffen werden, etwa ein bildlicher Vergleich, das Erweitern oder die Orientierung an einem Referenzwert.

Für den Unterricht ist daher mit unterschiedlichen Lösungsansätzen, Begründungen und Schwierigkeiten zu rechnen. Diese sollten nicht nur korrigiert, sondern für mathematische Gespräche genutzt werden. Durch das Gegenüberstellen verschiedener Strategien können die Lernenden erkennen, welche Vorgehensweise in einer bestimmten Situation besonders geeignet ist. Der Schwerpunkt der Stunde liegt somit nicht auf dem bloßen Anwenden einer Vergleichsregel, sondern auf dem Aufbau eines tragfähigen Größenverständnisses für Brüche. Dieses Verständnis ist für die weitere Bruchrechnung grundlegend und ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, spätere Verfahren nicht nur auszuführen, sondern auch inhaltlich nachzuvollziehen.